1.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ

Цель лекции: ознакомление с курсом, изучение основ теории цифровых устройств.

1.1.1. БУЛЕВА АЛГЕБРА

Математический аппарат, описывающий действие дискретных устройств, базируется на алгебре логики, или, как ее еще называют, *булевой алгебре*, названной в честь английского математика Джорджа Буля.

СПРАВКА

Джордж Буль (1815–1864) – английский математик, создатель алгебры логики, названной впоследствии в его честь булевой алгеброй. Родился в семье торговца. Самоучка. В конце карьеры – профессор математики в католическом колледже в Корке (Англия).

Имел 5 дочерей, в том числе будущую знаменитую писательницу Этель Войнич, автора широко известного в свое время романа «Овод», посвященного освободительной борьбе итальянского народа против австрийского господства.

На практике булева алгебра впервые была применена американским ученым Клодом Шенноном в 1938 г. при исследовании электрических цепей с контактными выключателями.

СПРАВКА

Клод Элвуд Шеннон (1916–2001) – американский ученый – математик и электротехник – французского происхождения. Один из создателей математической теории информации и связи.

Окончил Мичиганский университет в 1936 г. и аспирантуру Массачусетского технологического института. В 1940 г. защитил докторскую диссертацию, в которой доказал, что работу переключателей и реле в электрических схемах можно представить посредством алгебры, созданной в середине XIX века английским математиком Джорджем Булем.

«Просто случилось так, что никто другой не был знаком с этими обеими областями одновременно!» – так скромно Шеннон объяснил причину своего открытия.

Булева алгебра оперирует двоичными переменными «0» и «1», которые подчиняются следующему условию:

$$x = 1,\ \text{если}\ x \neq 0,\ \text{и}$$

$$x = 0,\ \text{если}\ x \neq 1$$

В основе булевой алгебры лежит понятие переключательной (или булевой) функции вида:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0\ \text{или}\ 1$$

относительно аргументов x_1, x_2 , … , x_n , которая может принимать только эти два значения.

Логическая функция может быть задана одним из следующих способов:

– словесно;
– алгебраическим выражением;
– таблицей, называемой *таблицей истинности*.

Между обычной алгеброй и алгеброй логики имеются существенные различия в отношении количества и характера операций, а также законов, которым они подчиняются.

Действия над двумя переменными в булевой алгебре производятся по правилам логических операций. Существуют три простейшие логические операции:

1) отрицание (инверсия, или операция «НЕ»);
2) логическое умножение (конъюнкция, или операция «И»);
3) логическое сложение (дизъюнкция, или операция «ИЛИ»).

Более сложные логические операции и преобразования можно свести к указанным выше трем операциям.

Операция отрицания выполняется над одной переменной и характеризуется следующими свойствами:

$$y = 1,\ \text{если}\ x = 0,\ \text{и}\ y = 0,\ \text{если}\ x = 1.$$

Обозначается отрицание чертой над переменной, с которой производится операция:

$$y = \overline{x}\ \ (\text{соответственно}\ \ \overline{y} = x\ ).$$

Операция логического умножения (конъюнкции) для двух переменных определяется следующей таблицей:

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Операция обозначается:

$$y = x_1 \wedge x_2,\ \text{или}\ \ y = x_1 \bullet x_2$$

и может быть распространена на большее число переменных.

Операция логического сложения (дизъюнкции) для двух переменных определяется следующей таблицей:

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операция обозначается:

$$y = x_1 \vee x_2, \text{ или } y = x_1 + x_2$$

и также может быть распространена на большее число переменных.

Первое обозначение предпочтительно, так как оно позволяет отличить логическое сложение от арифметического.

Совокупность различных значений переменных в булевой алгебре называется *набором.* Булева функция от n аргументов может иметь до $N = 2^n$ наборов.

Поскольку функция принимает только два значения, общее число булевых функций от n аргументов равно $2^n = 2^{2n}$.

Для одного аргумента – это 4 значения: $y = x$, $y = \overline{x}$, $y = 1$, $y = 0$.

Если аргументов два, то количество операций возрастает до 16. Приведем их в виде табл. 1.1.

Таблица 1.1

Логические операции над набором из двух переменных

Аргументы					Функция	Наименование операции
x_1	0	0	1	1		
x_2	0	1	0	1		
0		0	0	0	$y = 0$	Константа «0»
0		0	0	1	$y = x_1 \bullet x_2$	Конъюнкция, операция «И»
0		0	1	0	$y = x_1 \bullet \overline{x}_2 = x_1 \to \overline{x}_2$	Запрет по x_2
0		0	1	1	$y = x_1$	Тождественность x_1
0		1	0	0	$y = \overline{x}_1 \bullet x_2 = x_2 \to \overline{x}_1$	Запрет по x_1
0		1	0	1	$y = x_2$	Тождественность x_2
0		1	1	0	$y = x_1 \bullet \overline{x}_2 \vee x_1 \bullet \overline{x}_2$	Исключающее «ИЛИ» (отрицание равнозначности, сумма по модулю 2)
0		1	1	1	$y = x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2$	Дизъюнкция, операция «ИЛИ»
1		0	0	0	$y = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 = x_1 \downarrow x_2$	Стрелка Пирса, операция «ИЛИ–НЕ»
1		0	0	1	$y = x_1 \bullet x_2 \vee \overline{x}_1 \bullet \overline{x}_2 = x_1 \square x_2$	Равнозначность, эквивалентность
1		0	1	0	$y = \overline{x}_2$	Инверсия x_2
1		0	1	1	$y = x_1 \vee \overline{x}_2 = x_2 \to x_1$	Импликация от x_2 к x_1
1		1	0	0	$y = \overline{x}_1$	Инверсия x_1
1		1	0	1	$y = \overline{x}_1 \vee x_2 = x_1 \to x_2$	Импликация от x_1 к x_2
1		1	1	0	$y = \overline{x_1 \bullet x_2} = x_1 / x_2$	Штрих Шеффера, операция «И–НЕ»
1		1	1	1	$y = 1$	Константа «1»

1.1.2. АКСИОМЫ И ЗАКОНЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

Булева алгебра базируется на нескольких аксиомах, из которых выводят основные законы для преобразований с двоичными переменными.

Каждая аксиома вследствие принципа дуальности (двойственности) логических операций, согласно которому операции конъюнкции и дизъюнкции допускают взаимную замену, если одновременно поменять логическую “1” на “0”, а “0” на “1”, знак “ИЛИ” на “И”, а “И” на “ИЛИ”, может быть представлена в двух видах: *конъюнктивном* и *дизъюнктивном*.

Аксиомы булевой алгебры

Аксиома операции отрицания: $\overline{0}=1$; $\overline{1}=0$.

Аксиомы операций конъюнкции и дизъюнкции:

1. $0 \bullet 0 = 0$ (а) $1 \vee 1 = 1$ (б)
2. $1 \bullet 0 = 0 \bullet 1 = 0$ (а) $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1$ (б)
3. $1 \bullet 1 = 1$ (а) $0 \vee 0 = 0$ (б).

Аксиома 1 б не имеет аналога в двоичной арифметике, где $1+1=10$. (здесь цифры и знаки имеют обычный арифметический смысл).

Законы булевой алгебры

Законы булевой алгебры вытекают из аксиом и также имеют две формы выражения: для *конъюнкции* и *дизъюнкции*. Приведем их без доказательств, поскольку их правильность легко проверить по таблицам истинности либо путем подстановки 0 и 1 вместо соответствующих значений переменных.

Законы булевой алгебры представим в виде табл. 1.2.

Таблица 1.2

Законы булевой алгебры

Закон	Конъюнктивная форма	Дизъюнктивная форма
1	2	3
1. Переместительный	$x_1 \bullet x_2 = x_2 \bullet x_1$	$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$
2. Сочетательный	$x_1 \bullet (x_2 \bullet x_3) =$ $= (x_1 \bullet x_2) \bullet x_3 =$ $= x_1 \bullet x_2 \bullet x_3$	$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) =$ $= (x_1 \vee x_2) \vee x_3 =$ $= x_1 \vee x_2 \vee x_3$
3. Повторения	$x \bullet x = x$	$x \vee x = x$
4. Обращения	Если $x_1 = x_2$, то $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$	
5. Двойной инверсии	$\overline{\overline{x}} = x$	
6. Нулевого множества	$x \bullet 0 = 0$	$x \vee 0 = x$
7. Универсального множества	$x \bullet 1 = x$	$x \vee 1 = 1$
8. Дополнительности	$x \bullet \overline{x} = 0$	$x \vee \overline{x} = 1$
9. Распределительный	$x_1 \bullet (x_2 \vee x_3) = x_1 \bullet x_2 \vee x_1 \bullet x_3$	$x_1 \vee (x_2 \bullet x_3) =$ $= (x_1 \vee x_2) \bullet (x_1 \vee x_3)$
10. Поглощения	$x_1 \vee x_1 \bullet x_2 = x_1$	$x_1 \bullet (x_1 \vee x_2) = x_1$
11. Склеивания	$(x_1 \vee x_2) \bullet (x_1 \vee \overline{x}_2) = x_1$	$x_1 \bullet x_2 \vee x_1 \bullet \overline{x}_2 = x_1$
12. Инверсии (закон де Моргана)	$\overline{x_1 \bullet x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$ После инвертирования левых и правых частей $x_1 \bullet x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$	$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \bullet \overline{x}_2$ $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1 \bullet \overline{x}_2}$

1.1.3. Взаимное соответствие булевых функций и логических схем

Двоичные переменные, входящие в логические уравнения, можно представить двумя различными электрическими сигналами. Путем преобразований этих сигналов получают другие, тоже двоичные, сигналы, которые соответствуют результатам определенных логических операций. Имея запись булевой функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, можно составить развернутую электрическую схему, которая будет преобразовывать логические сигналы x_1, $x_2, \ldots, x_n$ согласно указанной функции.

Устройства, выполняющие в аппаратуре логические операции, называют логическими элементами (сокращенно ЛЭ). ЛЭ различаются между собой характером реализуемой функции, числом входов (по числу одновременно действующих переменных), числом выходов и другими признаками. Работа их оценивается только с точки зрения логики, без учета практического воплощения (технической базы, способа питания и т. п.).

Входы и выходы ЛЭ в зависимости от уровня сигнала, при котором воспринимается или вырабатывается определенное значение двоичной переменной, подразделяются на прямые и инверсные. На прямом входе (выходе) двоичная переменная имеет значение логической 1, когда сигнал на этом входе (выходе) имеет значение, принятое за 1. На инверсном входе (выходе) двоичная переменная имеет значение 1, когда уровень сигнала на этом входе (выходе) соответствует состоянию, принятому за 0.

На логические входы можно подавать постоянные логические уровни 1 и 0 (константа 1 и константа 0) согласно законам универсального и нулевого множества. Входы, равноценные в логическом отношении (которые можно менять местами без ущерба для выполняемой функции), допускают объединение по закону повторения. При этом они действуют как один вход.

Для примера преобразуем на основе законов булевой алгебры функцию

$$y = x_1 \bullet x_2 \left(x_3 \vee x_1 \bullet x_3 \right).$$

Раскроем скобки:

$$y = x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 \vee x_1 \bullet x_2 \bullet x_1 \bullet x_3.$$

Так как $x_1 \bullet x_1 = 0$, то $y = x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 \vee 0 = x_1 \bullet x_2 \bullet x_3$.

Проектирование различных устройств осуществляется с помощью специальных методик. Они сводятся к последовательным формальным процедурам, которые могут быть реализованы на ЭВМ. Широко используются ЛЭ, совмещающие несколько операций, например «И–НЕ», «ИЛИ–НЕ», «И–ИЛИ–НЕ», «И–ИЛИ», «исключающее ИЛИ» и др.

1.1.4. Положительная и отрицательная логика

В современных цифровых устройствах логические состояния представляются двумя уровнями напряжения (потенциалов): высоким, близким к напряжению источника питания, и низким, близким к нулю. Это так называемая *потенциальная система представления информации,* для которой характерны непосредственная связь между отдельными элементами схемы. Длительность потенциальных сигналов определяется частотой смены информации, а переключающими импульсами служат перепады напряжения от одного уровня к другому.

Два уровня напряжения, характеризующие логические состояния, определяются просто как более высокий «*H*» (англ. *high* – высокий) и низкий «*L*» (*low* – низкий). Эти два значения называют логическими уровнями. Существуют два рода так называемых логических соглашений в зависимости от того, каким уровнем напряжения кодировать логическую «1» (и соответственно логический «0»).

В соглашении положительной логики более высокий уровень напряжения («*H*») соответствует логической «1», а низкий – логическому «0». В соглашении отрицательной логики – наоборот.

Элемент, выполняющий логические функции, можно оценивать с позиций как положительной, так и отрицательной логики. Его функциональная роль в обоих случаях будет различной. Это важное положение, которым часто пользуются на практике, вытекает из законов де Моргана.

С учетом сказанного элементы, выполняющие логические операции, допускается изображать на принципиальных схемах в двух логически эквивалентных формах. Имея изображение ЛЭ, его эквивалентную форму можно получить, проделав следующие преобразования:

1. В основном поле изображения ЛЭ символ операции & заменить на символ 1 либо наоборот.
2. Все прямые входы ЛЭ заменить инверсными, а инверсные – прямыми.
3. Все прямые выходы ЛЭ заменить инверсными, а инверсные – прямыми.

Соглашение положительной логики имеет преимущественное применение. В каталогах, справочниках, заводских этикетках логические функции цифровых интегральных схем также даются для положительной логики.

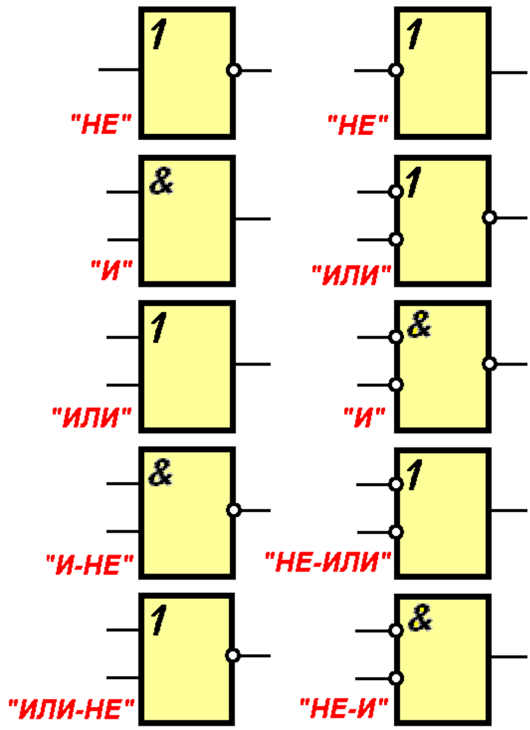
Следует обратить внимание на одно обстоятельство. Многие разработчики аппаратуры на принципиальных схемах логические свойства элементов всегда показывают так, как они даны в справочниках. Между тем с точки зрения наглядности и удобства чтения принципиальной схемы для тех случаев, когда переключающим сигналом служит логический «0», лучше изображать элементы в отрицательной логике.

1.1.5. Изображение базовых логических элементов на принципиальной электрической схеме

В конструкторской документации на принципиальных электрических схемах ЛЭ согласно ГОСТ 2.743-91 *«Обозначения условные графические в схемах. Элементы цифровой техники»* изображают прямоугольником (так называемое основное поле), в верхней части которого указывают символ функции: & для «И», 1 для «ИЛИ». Входы показывают с левой стороны прямоугольника, выходы – с правой. Допускается другая ориентация прямоугольника, при которой входы располагают сверху, а выходы снизу. Инверсные входы и выходы выделяются индикатором логического отношения – небольшим кружком у вывода. Выводы питания и общий в графических схемах цифровых устройств обычно не показывают. Это обстоятельство всегда следует иметь в виду при разборе прохождения токов на входах и выходах микросхем. Когда это нужно, шины, не несущие логической информации (в том числе питания и общие), подводят к левой или правой стороне прямоугольника и помечают звездочкой.

Западный мир в конструкторской документации (далее КД) использует обозначения логических элементов, установленных стандартом МЭК 117-15А (стандартом Международной электротехнической комиссии, сокращенно МЭК).

В грамотно представленной принципиальной электрической схеме цифрового устройства токи должны протекать сверху вниз, а сигналы распространяться слева направо.



а *б*

Рис. 1.1. Эквивалентные формы представления логических элементов: *а* – в положительной логике; *б* – в отрицательной логике

ГОСТ 2.743-91 почти полностью соответствует международному стандарту МЭК 117-15.

В США для обозначения ЛЭ используется стандарт *MilSpace.* Обозначение основных ЛЭ согласно этому стандарту показано на рис. 1.2.

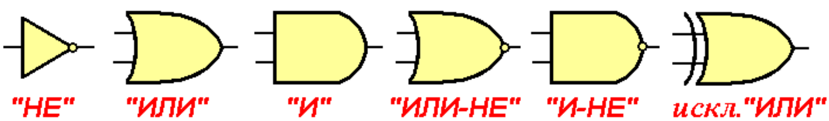


Рис. 1.2. Обозначение основных логических элементов по стандарту *MilSpace*

Контрольные вопросы к лекции 1

Вопрос 1	Как называется операция логического умножения?
Ответы:	
1	Конъюнкция
2	Дизъюнкция
3	Импликация
Вопрос 2	Как называется операция логического сложения?
Ответы:	
1	Дизъюнкция
2	Конъюнкция
3	Инверсия
Вопрос 3	Что такое логический элемент?
Ответы:	
1	Это устройство, выполняющее в электронной аппаратуре логическую операцию.
2	Это устройство, с помощь которого в электронной аппаратуре генерируют цифровые сигналы
3	Это устройство, которое усиливает электрические сигналы.
Вопрос 4	Какие законы Булевой алгебры относятся только к одной переменной?
Ответы:	
1	Двойной инверсии, повторения и дополнительности.
2	Нулевого множества и обращения.
3	Сочетательный, переместительный и универсального множества.
Вопрос 5	Что такое соглашение положительной логики?
Ответы:	
1	Это когда высокий уровень логического сигнала принимают за «1», а низкий – за «0».
2	Это когда высокий уровень логического сигнала принимают за «0», а низкий – за «1».