Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

К. Б. Лукин, М. И. Портнов, А. В. Фролов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ДИПЛОМНОГО ПРОЕКТА ПО КОНСТРУИРОВАНИЮ РАДИОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРНЫХ УСТРОЙСТВ

Часть 1

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ И ПРОЦЕССОВ СБОРКИ

Москва · 1981

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

К.Б.Лукин, М.И.Портнов, А.В.Фролов

Утверждены
редсоветом МВТУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ДИПЛОМНОГО ПРОЕКТА ПО КОНСТРУИРОВАНИЮ РАДИОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРНЫХ УСТРОЙСТВ

Часть 1

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ И ПРОЦЕССОВ СБОРКИ

На добрую память
5.02.82

Под редакцией А.В.Фролова

Москва 1981

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом. Рассмотрены и одобрены кафедрой 26.03.80 г., Методической комиссией факультета и Учебно-методическим управлением.

Рецензенты д.т.н., проф. Мусьянов М.И.,
к.т.н., доц. Ковригин В.А.

В производстве современных радиомеханических приборных устройств (РПУ) предъявляются высокие требования к качеству используемых материалов и оборудования, к качеству технологических процессов, которые должны обеспечивать надежную воспроизводимость режимов технологических операций и выходных параметров РПУ.

Разработка сложного производства РПУ, отдельных его этапов вызывает необходимость изменения методики исследования, контроля и анализа технологического процесса.

Цель данной работы – ознакомить студентов с основными практическими методами моделирования, анализа и контроля технологических процессов, так как существующие пособия по теории вероятностей и математической статистике не отражают особенностей указанных методов в технологии производства РПУ. Теоретические положения математической статистики иллюстрируются примерами.

Редактор Ю.Н.Хлебинский Корректор Л.И.Малютина

Заказ 1231 Объем 2.25 п.л.(2 уч.-изд.л.) Тираж 200 экз.
Бесплатно Подписано к печати 17.11.80 г. План 1980 г., № 19 доп.

Ротапринт МВТУ. 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО РАСЧЕТУ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СБОРОЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Случайные величины и законы их распределения. Числовые характеристики случайных величин

Случайной величиной называется переменная, которая принимает некоторое численное значение в результате испытания со случайным исходом. Понятие случайной величины позволяет отображать качественные результаты эксперимента на количественной шкале. Так, количество исправной или количество неисправной аппаратуры в выборке, подлежащей контролю, является случайной величиной. Таким образом, введение случайной величины превращает элементы контролируемой выборки, определяемые качественно, в целочисленные случайные величины, имеющие физический смысл.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины. Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, принимаемые случайной величиной с определенными вероятностями (значения дискретной случайной величины можно пронумеровать). Дискретными случайными величинами являются: количество неисправных электронных блоков в партии; число единиц оборудования, выходящего из строя за определенный период; число отказов, наблюдаемых при испытаниях рабочих характеристик РПУ.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать любые числовые значения в рассматриваемом диапазоне. Непрерывными случайными величинами являются: время до момента выхода из строя РПУ; значения контролируемых параметров в партии РПУ; суточное производство продукции на предприятии; уровень шума приемника или передатчика в децибелах; процент брака выпускаемых электронных блоков.

Случайная величина X характеризуется распределением, которое отражает вероятность появления всех ее возможных значений. Наиболее полная характеристика случайной величины X дается интегральной функцией распределения, показывающей вероятность того, что X не превысит некоторое значение x_i

$$F(x) = P\{X \leq x_i\}. \qquad (1)$$

Дискретная случайная величина часто задается перечнем ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

Непрерывную случайную величину можно определить плотностью распределения (дифференциальным законом распределения вероятности)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \qquad (2)$$

Основными числовыми характеристиками случайных величин являются математическое ожидание и дисперсия. Математическое ожидание $M\{X\}$ определяет положение центра группирования распределения и середину поля допуска случайной величины X.

Для дискретной случайной величины

$$M\{X\}=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i , \tag{3}$$

где x_i – частные значения случайной величины X ; p_i – соответствующие этим значениям вероятности; n – общее количество значений случайной величины в партии;

для непрерывной случайной величины

$$M\{X\}=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\cdot dx . \tag{4}$$

Дисперсия $\sigma^2\{X\}$ вычисляется по формулам:

для дискретной случайной величины

$$\sigma^2\{X\}=M\{[x-M\{X\}]^2\}=\sum_{i=1}^{n} p_i [x_i-M\{X\}]^2 , \tag{5}$$

для непрерывной случайной величины

$$\sigma^2\{X\}=\int_{-\infty}^{\infty} [x_i-M\{X\}]^2 f(x)dx , \tag{6}$$

где $\sigma\{X\}$ – среднее квадратическое отклонение случайной величины X, отражающее характер влияния случайных факторов технологического процесса на изучаемую величину X. Начальные и центральные моменты k-го порядка обозначаются ν_k и μ соответственно и определяются из выражений:

для дискретных случайных величин

$$M_k=M\{X^k\}=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k , \tag{7}$$

$$\mu_k=M\{[x-M\{x\}]^k\}=\sum_{i=1}^{n} p_i [x_i-M\{X\}]^k ; \tag{8}$$

для непрерывных случайных величин

$$M_k=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx , \tag{9}$$

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty} [x-M\{X\}]^k\cdot f(x)dx . \tag{10}$$

Большинство распределений могут быть описаны с помощью первых четырех моментов, причем начальный момент первого порядка соответствует математическому ожиданию, центральный момент второго порядка является дисперсией распределения, центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения, а четвертый момент – эксцесс, или островершинность, распределения.

Как правило, распределение и его числовые характеристики неизвестны, и оценки необходимых моментов вычисляются по выборке определенного размера при замене в приведенных ранее выражениях для моментов M_k на $\sum_{i=1}^{n} x_i^k / n$, где x_i – значения полученных наблюдений в выборке. Под n в этом случае понимается объем выборки.

Оценка называется несмещенной, если при данном объеме выборки ее математическое ожидание совпадает с оцениваемым параметром РПУ. При $n \to \infty$ оценка параметра должна совпадать с его истинным значением в генеральной совокупности.

Несмещенной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое результатов n измерений

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = m_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_0), \tag{11}$$

где m_0 – новое начало отсчета, равное значению x_i, при наибольшей частоте m_i; m_i – количество значений x_i в данном интервале при разбиении выборки на интервалы.

При неизвестном значении математического ожидания несмещенной оценкой дисперсии будет

$$s^2\{X\} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_0)^2 - \frac{n}{n-1} (\bar{X} - m_0)^2, \tag{12}$$

а при известном математическом ожидании

$$s^2\{X\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [x_i - M\{X\}]^2. \tag{13}$$

Оценка третьего центрального момента определяется из выражения

$$M_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - M\{X\})^3}{n}. \tag{14}$$

Оценка четвертого центрального момента

$$M_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - M\{X\})^4}{n}. \tag{15}$$

Выражения для оценки центральных моментов требуют громоздких вычислений. Расчеты упрощаются, если центральные моменты заменить условными. Условный момент порядка k

$$M'_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i u_i^k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{x_i - m_0}{h} \right)^k}{n}. \tag{16}$$

В частности,

$$P\{\hat{\theta}-\varepsilon<\theta<\hat{\theta}+\varepsilon\}=P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=\alpha, \qquad (23)$$

где θ – оцениваемый параметр распределения случайной величины; $\hat{\theta}$ – оценка параметра распределения случайной величины; ε – точность оценки параметра распределения; α – доверительная вероятность, или достоверность, оценки; характеризует вероятность того, что неизвестный параметр не выйдет за пределы интервала, зависящие от объема выборки; $(\hat{\theta}+\varepsilon)$ и $(\hat{\theta}-\varepsilon)$ – верхняя и нижняя границы доверительного интервала, характеризующего точность оценки.

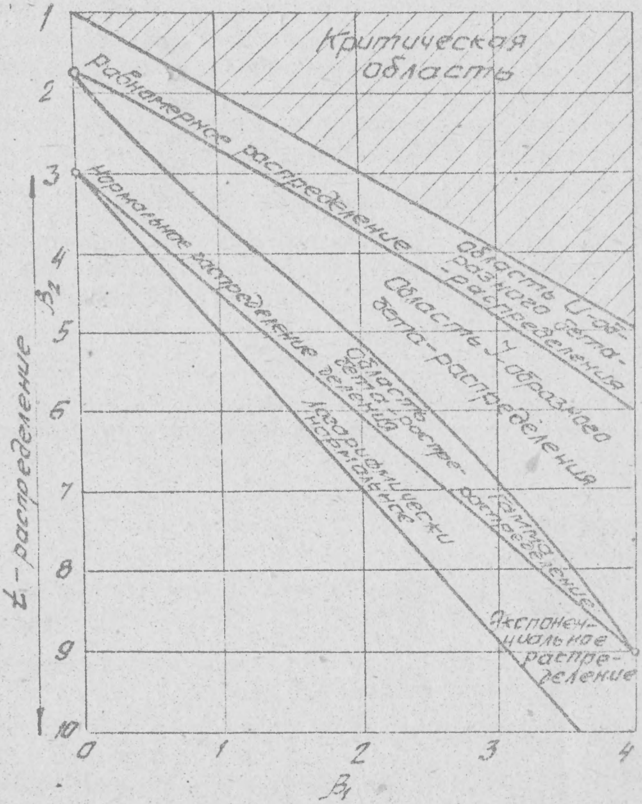

Рис. 1

Поскольку обычно неизвестно, каким именно теоретическим распределением описывается генеральная совокупность, из которой взята данная выборка, то для нахождения доверительного ин

$$\mu_1' = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{x_i - m_0}{h}\right)}{n} = \frac{1}{h}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{n} - m_0 \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}\right] = \frac{1}{h}(\bar{X} - m_0). \quad (17)$$

Отсюда

$$\bar{X} = M_1' \cdot h + m_0. \quad (18)$$

Центральные моменты через условные определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \mu_2 &= S^2\{X\} = h^2[M_2 - (M_1')^2], \\ M_3 &= h^3[M_3 - 3M_2 M_1 + 2(M_1')^3], \\ M_4 &= h^4[M_4' - 4M_3' M_1' - 6M_3 (M_1')^2 - 3(M_1')^4]. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Для вычисления сводных характеристик выборки удобно пользоваться не непосредственно измеренными величинами x_i, а условными u_i. Переход к условным значениям наблюдаемых величин осуществляется по формуле

$$u_i = \frac{x_i - m_0}{h}, \quad (20)$$

где h - шаг (единица масштаба), т.е. разность между двумя соседними значениями x_i, расположенными в возрастающем порядке.

Оценки моментов дают возможность подобрать эмпирическое распределение для описания экспериментальных данных. Подбор распределений выполняется с помощью графика, приведенного на рис. 1. На этом графике показаны области в плоскости (β_1, β_2) для различных распределений. Величина

$$\beta_1 = \left(\frac{M_3}{S^3}\right)^2 \quad (21)$$

является квадратом нормированного показателя асимметрии и позволяет сравнивать асимметрию двух распределении, имеющих различный масштаб. Величина

$$\beta_2 = \frac{M_4}{S^4} \quad (22)$$

является относительным показателем эксцесса.

Оценки числовых характеристик распределения параметров технологического процесса дают приближенные значения $M\{X\}$, $\sigma\{X\}, \mu_3, \mu_4$. Надежность полученных значений может быть оценена вероятностью тервала используют эмпирическое распределение Пирсона [4]. Для доверительных интервалов распределений Пирсона составлены таблицы [4, стр.366]. Входами в таблицу являются нормированные показатели асимметрии и эксцесса распределения, а также доверительная вероятность α. Истинное значение измеряемой величины равно математическому ожиданию, поэтому $M\{\theta\}$ должно находиться внутри интервала:

$$\bar{\theta} - s\{\theta\} \cdot z_{\alpha_1} < M\{\theta\} < \bar{\theta} + s\{\theta\} \cdot z_{\alpha_2}, \qquad (24)$$

покрывающего $M\{\theta\}$ с заданной надежностью $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Для устранения неопределенности рассматривают обычно симметричный интервал относительно параметра θ, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2$, хотя значения α_1 и α_2 могут быть любыми в пределах приведенного выше равенства.

Методика определения интервальных оценок числовых значений нормального распределения хорошо известна [1].

2. Нормальное распределение

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если оно описывается дифференциальной функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\{X\}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x - M\{X\}]^2}{2\sigma^2\{X\}}}. \qquad (25)$$

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (x_1, x_2), равна

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \Phi\left[\frac{x_2 - M\{X\}}{\sigma\{X\}}\right] - \Phi\left[\frac{x_1 - M\{x\}}{\sigma\{x\}}\right], \qquad (26)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, определяемая по [1, стр. 479].

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа ε, равна

$$P\{|x - M\{x\}| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma\{X\}}\right). \qquad (27)$$

Если математическое ожидание равно нулю, справедливо равенство

$$P\{|X| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma\{X\}}\right). \qquad (28)$$

Асимметрия нормального распределения равна нулю, нормированный показатель эксцесса равен 3.

Плотность вероятности системы двух случайных величин X_1 и X_2, подчиняющихся нормальному закону,

$$f(x_1;x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma\{x_1\}\sigma\{X_2\}\sqrt{1-r^2}}\times$$
$$\times e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{[x_1-M\{X_1\}]^2}{\sigma^2\{X_1\}}-\frac{2r[x_1-M\{X_1\}][x_2-M\{X_2\}]}{\sigma\{X_1\}\sigma\{X_2\}}+\frac{[x_2-M\{X_2\}]^2}{\sigma^2\{X_2\}}\right]}, \quad (29)$$

где r – коэффициент корреляции X_1 и X_2.

Нормальное распределение получило широкое применение в технических приложениях. Гипотеза о нормальности распределений исследуемых параметров лежит в основе методов дисперсионного и регрессионного анализов, планирования экспериментов. Многие распределения с той или иной степенью достоверности можно аппроксимировать нормальным. Применимость нормального распределения обосновывается одной из центральных предельных теорем математической статистики.

3. Системы случайных величин

Функция распределения системы n случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ имеет вид

$$F(x_1;x_2;\ldots x_n)=P\{X_1<x_1;X_2<x_2,\ldots X_n<x_n\}.$$

Если существует плотность вероятности системы случайных величин

$$f(x_1;x_2;\ldots x_n)=\frac{\partial^n F(x_1;x_2;\ldots x_n)}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}, \quad (30)$$

то функция распределения выражается через плотность:

$$F(x_1;x_2;\ldots x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\ldots\int_{-\infty}^{x_n}f(x_1;x_2;\ldots x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n. \quad (31)$$

Для дискретных случайных величин плотность вероятности не существует, и система таких величин характеризуется совокупностью вероятностей $P(X_1=i_1;X_2=i_2;\ldots X_n=i_n)$. Эти вероятности удобно свести в таблицу с n входами. Функция распределения системы дискретных случайных величин выражается формулой

$$F(x_1;x_2;\ldots x_n)=\sum_{i_1<x_1}\sum_{i_2<x_2}\ldots\sum_{i_n<x_n}P\{X_1=i_1;X_2=i_2;\ldots X_n=i_n\}. \quad (32)$$

Здесь суммирование выполняется по всем возможным значениям каждой из случайных величин.

Основные числовые характеристики системы n случайных величин:

математические ожидания

$$M\{X_i\}=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}x_i f(x_1;x_2;\ldots x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n, \quad (33)$$

дисперсии

$$\sigma^2\{X_i\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} [x_i - M\{X_i\}]^2 f(x_1; x_2; \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n; \tag{34}$$

моменты связи

$$K_{ij} = M\{[x_i - M\{x_i\}][x_j - M\{x_j\}]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} [x_i - M\{X_i\}] \times$$

$$\times [x_j - M\{X_j\}] f(x_1; x_2; \ldots x_n) \times dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{35}$$

Вторые центральные моменты составляют корреляционную матрицу

$$|K_{ij}| = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \ldots & K_{1n} \\ & K_{22} & K_{23} & \ldots & K_{2n} \\ & & K_{33} & \ldots & K_{3n} \\ & & & \ldots & \ldots \\ & & & & K_{nn} \end{vmatrix}. \tag{36}$$

Если случайные величины, входящие в систему, независимы, все элементы матрицы, кроме диагональных, равны нулю.

Безразмерной характеристикой связи случайных величин X_i и X_j служит коэффициент корреляции

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{\sigma^2\{X_i\}\sigma^2\{X_j\}}}. \tag{37}$$

Для системы n нормальных величин

$$f(x_1; x_2; \ldots x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{ij} K_{ij}^{(-1)} [x_i - M\{x_i\}][x_j - M\{x_j\}]}, \tag{38}$$

где Δ – определитель, составленный из элементов корреляционной матрицы (31); K_{ij}^{-1} – элементы обратной матрицы,

$$K_{ij}^{-1} = \frac{1}{\Delta} A_{ij} = \frac{1}{\Delta} A_{ji};$$

здесь A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента K_{ij}.

Непрерывные случайные величины независимы, если

$$f(x_1; x_2; \ldots x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n).$$

Если случайная величина Y связана функциональной зависимостью со случайными величинами $X_1, X_2, \ldots, X_n$, т.е. $Y = \varphi(X_1; X_2; \ldots X_n)$, где φ – известная функция, а плотность вероятности $f(x_1; x_2; \ldots x_n)$ системы задана, то начальные и центральные моменты определяются по формулам:

$$M_K(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1; x_2; \ldots x_n)]^K f(x_1; x_2; \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \tag{39}$$

$$\mu_K(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1; x_2; \ldots x_n) - M\{Y\}]^K f(x_1; x_2; \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \tag{40}$$

Математическое ожидание функции от дискретной случайной величины

$$M\{\varphi(x)\} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \varphi(x_i), \tag{41}$$

а математическое ожидание функции от непрерывной случайной величины

$$M\{\varphi(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f(x) \cdot dx. \tag{42}$$

4. Законы распределения функций случайных величин

Если выходной параметр РПУ связан с параметрами комплектующих электрорадиоэлементов (ЭРЭ) или параметрами технологического процесса аналитической зависимостью вида $Y=\varphi(X)$ и эта зависимость монотонна в диапазоне возможных значений X, то плотность вероятности

$$f_y(y) = f_x[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|. \tag{43}$$

Если функция Y не монотонна, что означает неоднозначность обратной функции $\psi(y)$, плотность вероятности случайной величины определяется формулой

$$f_y(y) = \frac{d}{dy} F(y), \tag{44}$$

где

$$F(y) = P\{Y<y\} = \sum_i \int_{\Delta_i(y)} f_x(x) dx.$$

В последнем выражении $\Delta_i(y)$ – участки абсцисс, которым соответствует $Y<y$. Для функции двух случайных величин (39) примет вид

$$F_y(y) = \iint_{(D_y)} f_x(x_1; x_2) dx_1 dx_2, \tag{45}$$

где D_y – область, в которой $Y<y$.

В общем случае, если известен якобиан преобразования от случайных величин $(X_1, X_2, \dots X_n)$ к случайным величинам $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$, т.е.

$$D = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}, \tag{46}$$

и если это преобразование взаимно однозначно, то

$$f_y(y_1;y_2;\dots y_n)=|D|\cdot f_x(x_1;x_2;\dots x_n). \quad (47)$$

5. Сумма законов распределения

Для двух независимых дискретных величин X_1 и X_2 (например, количество бракованных РПУ по двум различным параметрам) ряд распределения случайной величины $Y=X_1+X_2$ определяется как

$$P\{Y=y\}=\sum_{x_1=1}^{n_1} P\{X_1=x_1\}P\{X_2=Y-x_1\}=\sum_{x_2=1}^{n_2} P\{X_2=x_2\}P\{X_1=Y-x_2\}. \quad (48)$$

Для двух непрерывных случайных величин (например, брак РПУ по двум различным параметрам) плотность вероятности $Y=X_1+X_2$ определяется формулой

$$f_y(y)=\frac{d}{dy}F(y), \quad (49)$$

где

$$F(y)=\iint_{X_1+X_2<y} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\,dx_1\,dx_2. \quad (50)$$

Когда закон распределения одной из случайных величин задается одной формулой на всем диапазоне значений аргумента, определение плотности вероятности случайной величины Y упрощается:

$$f_{X_1}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(y-x_1)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(x_2)f_{X_1}(y-x_2)\,dx_2. \quad (51)$$

6. Линеаризация функций случайных величин

Непрерывная дифференцируемая функция $Y=\varphi(X_1;X_2;\dots X_n)$, производная которой не обращается в бесконечность в данной точке, соответствующей математическим ожиданиям аргументов X_i, при достаточно малых пределах изменения аргументов может быть заменена линейной разложением ее в ряд Тейлора и удержанием только линейных членов. Математическое ожидание и дисперсию можно оценить с помощью следующих выражений:

$$M\{Y\}\approx\varphi[M\{X_1\},M\{X_2\},\dots M\{X_n\}], \quad (52)$$

$$\sigma^2\{Y\}\approx\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\sigma^2\{X_i\}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)K_{ij}. \quad (53)$$

Для независимых аргументов

$$\sigma^2\{Y\}\approx\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\sigma^2\{X_i\}. \quad (54)$$

Чем большее число членов разложения функции удерживается, тем точнее результат приближения.

7. Критерии согласия

Критерии согласия позволяют проверить гипотезу о предполагаемом виде закона распределения случайного параметра технологического процесса. Проверка гипотезы основана на изучении расхождения

$$\varepsilon = F_э(x) - F_T(x),$$

где $F_T(x)$ – теоретическая функция распределения параметра x ;

$F_э(x)$ – эмпирическая функция распределения параметра x .

Наиболее часто используются критерий χ^2 Пирсона и критерий Колмогорова. Первый из них

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i^2}{np_i} - n, \qquad (55)$$

где k – число интервалов при разбиении выборки на интервалы; p_i – частности интервала (вероятности попадания параметра в заданный интервал).

Для вычисления этого критерия все множество возможных значений X разбивается на k интервалов с числом значений Xm_i в каждом интервале. Желательно, чтобы при этом выполнялось условие $np_i \geq 10$, $(i = 1, 2, \ldots k)$. Задаваясь уровнем значимости α , выраженным в процентах, по таблицам распределения χ_1^2 [2, стр. 392] с $f = k - \theta - 1$ степенями свободы находим такое значение χ_1^2 , что $P\{\chi^2 > \chi_1^2\} = \alpha$. Здесь θ – число параметров, характеризующих предполагаемый закон распределения. Так, нормальный закон распределения характеризуется математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, и в этом случае $\theta = 2$. Если $\chi^2 > \chi_1^2$, то отклонение значимо и с α %-ным уровнем значимости гипотеза о принятом распределении отвергается, как не согласующаяся с опытными данными. При $\chi^2 < \chi_1^2$ данная выборка согласуется с принятой гипотезой о законе распределения.

Критерий Колмогорова удобен для проверки гипотезы о распределении в случае известного закона $F_T(x)$. Для применения этого критерия находится наибольшее отклонение

$$D_k = max\,|F_э(x) - F_T(x)| \qquad (56)$$

и вычисляется значение $D_k\sqrt{n}$. Задаваясь уровнем значимости α , выраженным в процентах, [1, стр. 479] ,можно найти вероятность $P\{D_k\sqrt{n}\}$. Если значение $P\{D_k\sqrt{n}\} \geq 0{,}03 \ldots 0{,}05$, то гипотеза о совпадении распределения выборки с теоретическим законом принимается. В противном случае отклонения в выборке от теоретического закона распределения вызывается не случайными причинами, а ошибками в гипотезе и гипотеза отвергается.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример 1. Количество блоков РПУ, собираемых на различных операциях на конвейерной линии за один и тот же период времени, задано законом распределения:

x_i	2	4	7
p_i	0,5	0,3	0,2

Определить интегральную функцию $F(x)$, характеризующую вероятность сборки требуемого количества блоков по операциям и построить ее график.

Решение. Если $x \le 2$, то $F(x) = 0$, так как значений, меньших числа 2, величина X не принимает. Если $2 < x \le 4$, то $F(x) = 0,5$ по условию. Если $4 < x \le 7$, то $F(x) = 0,8$. Действительно, X может принять значение 2 с вероятностью 0,5 и значение 4 с вероятностью 0,3. Следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместимых событий) с вероятностью 0,5+0,3 = 0,8. Если $x > 7$, то $F(x) = 1$, так как событие $x \le 7$ достоверно и вероятность его равна единице. Таким образом, искомая интегральная функция имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2; \\ 0,5 & \text{при } 2 < x \le 4; \\ 0,8 & \text{при } 4 < x \le 7; \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведен на рис. 2.

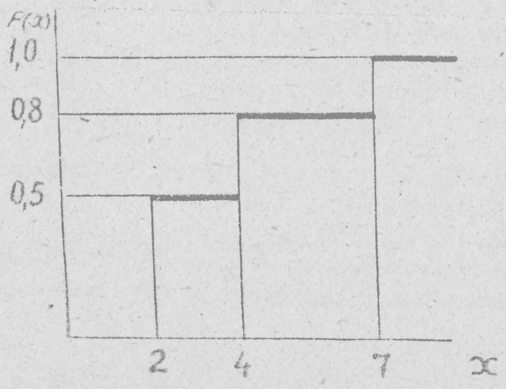

Рис. 2

Пример 2. Изменение центра группирования погрешности тонкопленочного резистора на точностной диаграмме процесса напыления можно описать интегральным законом распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2; \\ 0{,}5x - 1 & \text{при } 2 < x \leq 4; \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что среднее значение погрешности X примет значение: а) меньшее 0,2; б) меньшее 3; в) не меньшее 3; г) не меньшее 5.

Решение. Так как при $x \leq 2$ функция $F(x) = 0$, то $F(0{,}2) = 0$, т.е. $P\{X < 0{,}2\} = 0$; $P\{X < 3\} = F(3) = (0{,}5 \cdot 3 - 1) = 0{,}5$.

Так как сумма вероятностей противоположных событий равна единице, а события $X \geq 3$ и $X < 3$ противоположны, $P\{X \geq 3\} + P\{X < 3\} = 1$. Тогда, учитывая, что $P\{X < 3\} = 0{,}5$, получим $P\{X \geq 3\} = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Аналогично, $P\{X \geq 5\} + P\{X < 5\} = 1$. Наконец, учитывая условие, в силу которого при $x > 4$ функция $F(x) = 1$, получим $P\{X \geq 5\} = 1 - P\{X < 5\} = 1 - F(5) = 1 - 1 = 0$.

Пример 3. Для проведения испытаний из партии в 100 РПУ, среди которых имеется 10 неисправных, взяты 5 РПУ. Построить ряд распределения случайного числа бракованных РПУ X, содержащихся в выборке.

Решение. Число бракованных РПУ в выборке может быть любым целым числом в пределах от 0 до 5, поэтому частные значения x_i случайной величины X следующие: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$.

Общее число возможных элементарных исходов испытаний равно числу способов, которыми можно извлечь n РПУ из партии размером N РПУ, т.е. равно числу сочетаний из N элементов по n: C_N^n. Среди n РПУ d РПУ бракованные. Из Q бракованных РПУ можно взять d C_Q^d способами, при этом остальные $n-d$ РПУ будут годными. Выбрать же $n-d$ годных РПУ из $N-Q$ годных можно C_{N-Q}^{n-d} способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $C_Q^d \cdot C_{N-Q}^{n-d}$.

Искомая вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех элементарных исходов:

$$P_{d,n} = \frac{C_Q^d \cdot C_{N-Q}^{n-d}}{C_N^n}.$$

В данном случае $N = 100$, $Q = 10$, $n = 5$. Вероятность $P\{X = d\}$ того, что в выборке окажется ровно d бракованных РПУ,

$$P\{X=d\} = \frac{C_{10}^{d} \cdot C_{90}^{5-d}}{C_{100}^{5}}; \qquad d = 0,1,2,3,4,5.$$

В результате расчетов по этой формуле с точностью до 0,001 получим: $P\{X=0\}=0,583$; $P\{X=1\}=0,340$; $P\{X=2\}=0,070$; $P\{X=3\}=0,007$; $P\{X=4\}=P\{X=5\}=0$.

По результатам расчета выписываем ряд распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,583	0,34	0,07	0,007	0	0

Пример 4. Вероятность получения в результате сборки без регулировки годного прибора равна 0,8. После первого же бракованного прибора осуществляется его регулировка. Найти выражение для ряда распределения числа приборов, собираемых без регулировки.

Решение. В процессе сборки осуществляют регулировку i -го прибора, если первые i −1 приборов собираются без регулировки, а выходные параметры i -го прибора не отвечают требованиям ТУ. Если X – случайное число приборов, то

$$P\{X=i\}=(1-0,2)^{i-1}\cdot 0,2=0,2\cdot(0,8)^{i-1}$$

или

x_i	1	2	3	… k …
p_i	0,2	0,16	0,128	$0,2\ (0,8)^{i-1}$

Пример 5. Изменение значения тонкопленочного сопротивления на поверхности подложки от центра к периферии выражается функцией распределения случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -a, \\ A + B\cdot \arcsin \frac{x}{a} & \text{при } -a < x < a, \\ 1 & \text{при } x \ge a, \end{cases}$$

где a – расстояние от центра подложки до центра наиболее удаленного резистора.

Определить: а) значения A и B, при которых функция распределения является непрерывной; б) вероятность того, что случайная величина X окажется в пределах интервала $(-a/2;\ a/2)$; в) плотность вероятности $f(x)$ распределения сопротивления на поверхности подложки.

Решение. а) $F(x)$ непрерывна, если выполняются следующие условия: $F(-a)=0$ и $F(a)=1$. Отсюда имеем два уравнения для определения A и B:

$$A+B\cdot\arcsin(-a/a)=A-B\cdot\pi/2=0$$

$$A+B\cdot\arcsin(a/a)=A+\pi/2\cdot B=1.$$

Из решения системы А = 1/2 и В = $1/\pi$. Функция распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -a;\\ 1/2+1/\pi\cdot\arcsin\dfrac{x}{a} & \text{при } -a<x<a;\\ 1 & \text{при } x\geqslant a.\end{cases}$$

б) Вероятность $P\{-a/2<X<a/2\}$ того, что случайная величина X окажется в пределах промежутка $(-a/2;\,a/2)$,

$$P\{-a/2<X<a/2\}=F(a/2)-F(-a/2)=1/2+1/\pi\ \arcsin\left(\frac{a}{2a}\right)-$$

$$-1/2-1/\pi\arcsin(-a/2a)=1/\pi\cdot\pi/6+1/\pi\cdot\pi/6=1/3.$$

в) Плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X равна для всех x, принадлежащих отрезку $(-a;\,a)$:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(1/2+1/\pi\ \arcsin\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$$

Во всех остальных случаях $f(x)=0$.

Пример 6. Плотность распределения времени сборки РЭА T на поточной линии

$$f(T)=A\cdot T^2 e^{-\lambda T};\quad \lambda=0;\quad 0<T<\infty.$$

Найти коэффициент A, функцию распределения времени сборки РЭА и вероятность того, что время сборки будет находиться в пределах интервала $(0;\,1/\lambda)$.

Решение. На основании свойства функции распределения случайной величины $F(T)=1$ или

$$\int_0^\infty f(T)\,dT=1;\ \int_0^\infty A\cdot T^2\cdot e^{-\lambda T}dT \text{ и } A=1/\int_0^\infty T^2 e^{-\lambda T}dT.$$

Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^\infty T^2\cdot e^{-\lambda T}\,dT=\frac{2}{\lambda^3}$$ и $A=\lambda^3/2$. Тогда $f(x)=\lambda^3/2\ T^2\cdot e^{-\lambda T}$.

Функция распределения

$$F(x)=\int_0^t \frac{\lambda^3}{2}T^2\cdot e^{-\lambda T}\cdot dT=1-\frac{\lambda^2T^2+2\lambda T+2}{2}e^{-\lambda T}.$$

Вероятность того, что время сборки РЭА не выйдет за пределы $(0;\,1/\lambda)$,

$$P\{0<T<1/\lambda\}=\frac{\lambda^3}{2}\int_0^{1/\lambda}T^2\cdot e^{-\lambda T}\cdot dT=\frac{\lambda^3}{2}\Big(-\frac{T^2}{\lambda}\cdot e^{-\lambda T}-$$

$$-\frac{2}{\lambda^3}T\cdot e^{-\lambda T}-\frac{2}{\lambda^3}e^{-\lambda T}\Big|_0^{1/\lambda}=1-\frac{5}{2e}\approx 0{,}086.$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ x \text{ при } 0 < x \le 1; \\ 1 \text{ при } x \ge 1; \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ 1 \text{ при } 0 < x \le 1; \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

$$M\{\xi\}=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=1/2;$$

$$\sigma^2\{\xi\}=\int_0^1 (x-1/2)^2\,dx=1/12$$

Пример 9. При изготовлении гермоблоков РЭА годная продукция составляет 95%. Брак по герметизации блоков составляет 3%, брак по выходным параметрам – 4,5%. Определить коэффициент корреляции двух видов дефектов.

Решение. Введем ξ – случайную величину, которая принимает значение 1, если блок бракуется по герметичности, и $\xi=0$, если блок годный; η – случайную величину, равную 1 или 0 в зависимости от того, бракуется блок по выходным параметрам или нет. Тогда $P\{\xi=0,\eta=0\}=0{,}95$ по условию. Так как по условию задачи $P\{\xi=0\}=1-0{,}03=0{,}97$, то $P\{\xi=0,\eta=1\}=P\{\xi=0\}-P\{\xi=0,\eta=0\}=0{,}97-0{,}95=0{,}02$. Аналогично $P\{\xi=1,\eta=0\}=0{,}005$, так как $P\{\eta=0\}=1-0{,}045=0{,}955$, а $P\{\eta=0\}=P\{\xi=0,\eta=0\}+P\{\xi=1,\eta=0\}$. Отсюда $P\{\xi=1,\eta=0\}=0{,}955-0{,}95=0{,}005$. Наконец, $P\{\xi=1,\eta=1\}=P\{\xi=0,\eta=1\}+P\{\xi=1,\eta=0\}=0{,}02+0{,}005=0{,}025$. Таким образом, совместное распределение (ξ,η) задается табл. 1.

Таблица 1

η	ξ = 1	ξ = 0
1	0,025	0,02
0	0,005	0,95

На основании выражения (3) $M(\xi)=0{,}03$; $M(\xi^2)=0{,}03$; $\sigma^2\{\xi\}$ вычисляется по формуле (5) и равна $\sigma^2\{\xi\}=0{,}0291$. Аналогично $M\{\eta\}=0{,}045$; $M\{\eta^2\}=0{,}045$; $\sigma^2\{\eta\}=0{,}0043$. Момент связи определяется по формуле (35) и равен $K_{\xi\eta}=0{,}0236$. Коэффициент корреляции определяется по формуле (37): $r_{\xi\eta}=0{,}669$.

Пример 10. Замыкающий размер сборочной размерной цепи A_n является суммой трех таких взаимосвязанных размеров, что $M\{A_1\}=1$; $M\{A_2\}=2$; $M\{A_3\}=1{,}5$; $\sigma^2\{A_1\}=0{,}01$; $\sigma^2\{A_2\}=0{,}04$; $\sigma^2\{A_3\}=0{,}09$; $r_{12}=0{,}2$; $r_{13}=0{,}2$; $r_{23}=-0{,}1$.

Определить центр группирования и допуск замыкающего размера сборочной размерной цепи, считая, что рассеивание размеров подчиняется нормальному закону распределения.

Пример 7. Среди 10 интегральных микросхем имеется 8 годных и 2 бракованных. Случайным образом берут 2 микросхемы. Определить закон распределения числа годных микросхем среди отобранных.

Решение. Случайная величина X, характеризующая число годных интегральных микросхем среди двух отобранных, имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2$.
Используя формулу из примера 3, найдем вероятность возможных значений X:

$$P\{X=k\} = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m},$$

где N - число микросхем в партии; n - число годных микросхем; m - число отобранных микросхем; k - число годных микросхем среди отобранных.
Отсюда

$$P\{X=0\} = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}} = \frac{1}{45};$$

$$P\{X=1\} = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8\cdot 2}{45} = \frac{16}{45};$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}}{45} = \frac{28}{45}.$$

Требуемый закон распределения:

x_i	0	1	2
p_i	1/45	16/45	28/45

Пример 8. Погрешности питающих напряжений электронных схем ξ распределены равномерно на отрезке (0,1). Найти функцию распределения и плотность ξ, математическое ожидание и дисперсию отклонения питающего напряжения.

Решение. Функция распределения определяет вероятность появления отклонения напряжения в заданном интервале. Найдем вероятность отклонения напряжения на отдельных отрезках интервала:

$P\{0<\xi\le 1\}=1,\ P\{\xi\le 0\} = P\{\xi\ge 1\} = 0.\quad F_\xi(x) = P\{\xi<x\}$

При $x\le 0$ $F(x) = 0$; при $x\ge 1$ $F(x) = 1$; при $0<x\le 1$

$F(x) = P\{0<\xi<x\} = kx.$ В частности, при $x=1$ имеем

$P\{0<\xi<1\} = k = 1$, т.е. $F(x) = x$ при $0<x<1$. Таким образом, Решение.

$$M\{A_n\}=M\{A_1\}+M\{A_2\}+M\{A_3\}=4{,}5;$$
$$\sigma^2\{A_n\}=\sigma^2\{A_1\}+\sigma^2\{A_2\}+\sigma^2\{A_3\}+2r_{12}\sigma\{A_1\}\sigma\{A_2\}+$$
$$+2r_{13}\sigma\{A_1\}\sigma\{A_3\}+2r_{23}\sigma\{A_2\}\sigma\{A_3\}=0{,}01+0{,}04+0{,}09+$$
$$+2\cdot 0{,}2\sqrt{0{,}0004}+2\cdot 0{,}2\sqrt{0{,}0009}-2\cdot 0{,}1\sqrt{0{,}036}=0{,}172;$$
$$\sigma\{A_n\}=0{,}416;\quad \delta_n=6\sigma\{A_n\}=2{,}5$$

Пример 11. Собранные радиоэлектронные приборы подвергаются выборочному контролю. Каждый прибор может с вероятностью p оказаться годным и с вероятностью q – дефектным. В то же время прибор может быть проверен с вероятностью α и не проверен с вероятностью β. Приборы выбираются до обнаружения первого дефектного. Пусть N – число приборов, прошедших контроль, из них R – число бракованных, но не обнаруженных.

Найти совместное распределение (N,R), распределение N и R по отдельности, $M\{N\}$ и $M\{R\}$, корреляционный момент величин N и R.

Решение. Чтобы $N=n, R=r$, r приборов из n должны быть бракованными, но не обнаруженными, а $(n+1)$-й прибор – дефектным и обнаруженным, т.е.

$$P\{N=n;\ R=r\}=P_{n,r}=C_n^r(q\beta)^r\cdot p^{n-r}\cdot q\cdot\alpha.$$

Суммируя $P_{n,r}$ по r, найдем $P\{N=n\}$, т.е. вероятность того, что до первого обнаружения брака пройдет n приборов:

$$P\{N=n\}=\sum_{r=0}^{n}P_{n,r}=q\alpha(p+q\beta)=(1-q\alpha)^n\cdot q\beta.$$

Суммируя $P_{n,r}$ по всем $n\geqslant r$, найдем $P\{R=r\}$, т.е. вероятность того, что вообще не обнаружатся R бракованных приборов:

$$P\{R=r\}=q\alpha\sum_{n=r}^{\infty}C_n^r(q\beta)^r p^{n-r}=q\alpha(q\beta)^r\sum_{n=r}^{\infty}C_n^r p^{n-r}=q\alpha(q\beta)^r\times$$
$$\times\left(1+\frac{K+1}{1!}p+\frac{(K+1)(K+2)}{2!}p^2+\dots\right)=q\alpha(q\beta)^r(1-p)^{1-r}=\alpha\beta^r;$$

$$M\{N\}=\sum_{n=0}^{\infty}nP\{N=n\}=q\alpha\sum_{n=1}^{\infty}n(1-q\alpha)^n=\frac{1-q\alpha}{q\beta};$$

$$M\{R\}=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha\beta^r=\frac{\beta}{\alpha}M\{[N-M\{N\}][R-M\{R\}]\}=$$
$$=\frac{\beta}{q\alpha^2}.$$

Согласно (28)

$$K_{NR}=M\{[N-M\{N\}][K-M\{K\}]\}=q\alpha$$

Пример 12. Выходной параметр РПУ, равномерно распределенный в интервале (0,2), контролируется измерительным прибором, ошибка измерения которого распределена равномерно в интервале (-1,1).

Определить плотность распределения измеряемой величины, ее среднее значение и дисперсию.

Решение.

$$f(x_1)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ 1/2 & \text{при } 0<x\le 2;\\ 0 & \text{при } x>2;\end{cases}\qquad f(x_2)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1;\\ 1/2 & \text{при } -1<x\le 1;\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Здесь под X_1 понимается значение выходного параметра РПУ, под X_2 – случайная погрешность измерительного прибора. Требуется определить характеристики случайной величины $Y=X_1+X_2$:

$$f_y(y)=\frac{1}{2}\int_0^2 f_x(y-u)\,du;\quad y-1<u<1+y,\quad 0<u<2,$$

т.е. при $x\le -1$ $\quad f_y(y)=0.$

При $-1<x\le 1$

$$f_y(y)=\frac{1}{4}\int_0^{1+x}du=\frac{1+x}{4}.$$

При $1<x\le 3$

$$f_y(y)=\frac{1}{4}\int_{x-1}^{2}du=\frac{3-x}{4}.$$

При $x>3$ $\quad f_y(y)=0.$

На основании формулы (4)

$$M\{Y\}=\int_{-1}^{1}\frac{x(1+x)}{4}dx+\int_1^3\frac{x(3-x)}{4}dx=\frac{1}{4}\Big[\Big(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{-1}^{1}+\Big(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{-1}^{3}\Big]=1.$$

Для определения дисперсии измеряемой величины воспользуемся формулой (6):

$$\sigma^2\{Y\}=\int_0^1\frac{x^2(1+x)}{4}dx+\int_1^3\frac{x^2(3-x)}{4}dx-[M\{Y\}]^2=\frac{1}{4}\Big[\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}+$$

$$+\Big(x^3-\frac{x^4}{4}\Big)\Big|_1^3\Big]-1^2=\frac{2}{3}.$$

График функции $f(y)$ приведен на рис. 3.

Пример 13. Плотность вероятности отклонения выходного сопротивления электронного блока R от номинального значения R_0 в пределах поля допуска 2δ описывается законом

$$f(r)=\frac{1}{\pi\sqrt{R_0^2-r^2}}.$$

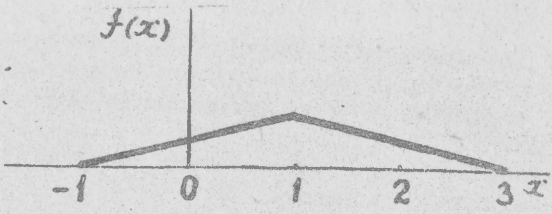

Рис. 3

Найти математическое ожидание и дисперсию отклонения сопротивления от номинального значения.

Решение. На основании формулы (4)

$$M\{R\}=\int_{-\delta}^{\delta} r\cdot f(r)\,dr=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{r\cdot dr}{\sqrt{R_0^2-r^2}}.$$

С учетом того, что подынтегральная функция нечетная и пределы интегрирования симметричны относительно начала координат, интеграл равен нулю. Следовательно, $M\{R\}=0$, и

$$\sigma^2\{R\}=\int_{-\delta}^{\delta}[r-M\{R\}]^2\cdot f(r)\,dr=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{r^2\cdot dr}{\sqrt{R_0^2-r^2}}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\delta}\frac{r^2\cdot dr}{\sqrt{R_0^2-r^2}}.$$

Сделав подстановку $r=c\cdot\sin t$, получим

$$\sigma^2\{X\}=\frac{R_0^2}{\pi}\arcsin\frac{R_0}{\delta}-\frac{\delta}{\pi}\sqrt{R_0^2-\delta^2}.$$

Пример 14. При контроле партии, включающей N микросборок, p из которых годные, а q бракованные, отбирается n годных микросборок. Определить математическое ожидание и дисперсию числа отобранных микросборок, если отбор ведется без возвращения проверенных микросборок.

Решение. Обозначим случайное число годных микросборок в выборке из n микросборок X. Случайную величину X можно представить в виде

$$X=\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где x_i – число годных микросборок при i-м извлечении из партии.

Случайная величина X может принимать только два значения: 1 – с вероятностью p/N или 0 – с вероятностью $1-p/N$ и, следовательно, $M\{x_i\}$ численно равно p. В этом случае

$$M\{X\}=M\Big[\sum_{i=1}^{n}x_i\Big]=\sum_{i=1}^{n}M\{x_i\}=np$$

При извлечении микросборок без возвращения случайные величины X зависимы, поэтому

$$6^2\{X\}=6^2[\sum_{i=1}^{n} x_i]=\sum_{i=1}^{n} 6^2\{x_i\}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}, \quad i\neq j,$$

где

$$6^2\{x_i\}=[1-M\{x_i\}]^2 p+[0-M\{x_i\}]^2(1-p)=(1-p)^2 p+(0-p)^2\times$$

$$\times(1-p)=p(1-p)=pq; \quad K_{ij}=M\{[x_i-M\{x_i\}][x_j-M\{x_j\}]\}=$$

$$=M\{x_i x_j\}-M^2\{x_i\}=P\{x_i\}P\{x_j/x_i\}-p^2=p\,\frac{Np-1}{N-1}=pq/N-1$$

Окончательно

$$6^2\{x\}=npq(1-\frac{n-1}{N-1}).$$

Пример 15. Параметр РПУ задается преобразующей функцией $Y=\sqrt{|X|}$. Определить плотность вероятности величины Y, если X – нормальная случайная величина с числовыми характеристиками $M\{X\}=0$ и $6^2\{X\}=1$.

Решение. Обратная функция $X=\psi(Y)$ двузначна (рис. 4), поэтому вначале определим функцию распределения Y:

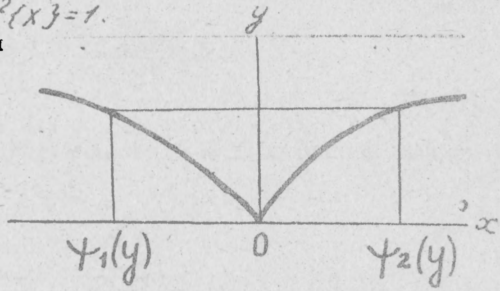

Рис. 4

$$F_y(y)=P\{Y<y\}=$$

$$=P[\psi_1(y)<X<\psi_2(y)]=$$

$$=\int_{\psi_1}^{\psi_2} f(x)\,dx,$$

$$f_y(y)=\frac{d}{dy}[\int_{\psi_1}^{\psi_2} f(x)dx]=f_x[\psi_2(y)]\psi_2'(y)-f_x[\psi_1(y)]\psi_1'(y),$$

где

$$\psi_1(y)=-y^2; \qquad \psi_2(y)=y^2;$$

$$\psi_1'(y)=-2y; \qquad \psi_2'(y)=2y.$$

Тогда $f(y)=\frac{4y}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^4}{2}}$ при $0\leq y<\infty$; $f(y)=0$ при $y<0$.

Пример 16. Система случайных величин (X, Y) распределена нормально с плотностью вероятности

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\{x,y\}}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2\{x,y\}}}.$$

Найти плотность вероятности системы (R , γ), если $x=R\cdot\cos\gamma$, $y=R\cdot\sin\gamma$.

Решение. На основании формул (45) и (46) имеем

$$f(r,\gamma)=f[x(r,\gamma);\,y(r,\gamma)]\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\gamma)}\right|$$

Якобиан преобразования от заданной системы к системе (R,γ)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\gamma)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \gamma}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \gamma}\end{vmatrix}=r.$$

Отсюда

$$f(r,\gamma)=\frac{r}{2\pi\sigma^2\{x,y\}}e^{-\frac{r^2\cos^2\gamma+r^2\sin^2\gamma}{2\sigma^2\{x,y\}}}=\frac{r}{2\pi\sigma^2\{x,y\}}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2\{x,y\}}}.$$

Случайные величины R и γ независимы, так как

$$f(r,\gamma)=f_R(r)\cdot f(\gamma),$$

где $f(r)=\frac{r}{2\sigma^2\{x,y\}}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2\{x,y\}}}$ – закон Рэлея;

$f(\gamma)=1/2\pi$ – закон равномерного распределения.

Пример 17. Математическое ожидание числа бракованных РПУ определяется формулой

$$\bar{T}=N\left[1-\left(1-\frac{p}{nN}\right)^m\right],$$

где N – число приборов в партии; p – вероятность успешного испытания прибора (испытание прибора дает результат); n – среднее число испытаний до получения отказа; m – число испытаний (успешных и неуспешных), приходящихся на один прибор.

Пользуясь методом линеаризации, определить зависимость математического ожидания и дисперсии $\bar{T}$ от m, если N, p и n – независимые случайные величины со следующими числовыми характеристиками:

$$M(N)=5; \quad M\{P\}=0{,}8; \quad M\{n\}=4;$$
$$\sigma^2\{N\}=1; \quad \sigma^2\{P\}=0{,}1; \quad \sigma^2\{n\}=0{,}2.$$

Решение. Используя формулы (52) и (54), получим

$$M\{T\}=M\{N\}\left[1-\left(1-\frac{M\{P\}}{M\{n\}M\{N\}}\right)^m\right]=5(1-0{,}96^m),$$

$$\sigma^2\{T\}=\left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)^2\sigma^2\{N\}+\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)^2\sigma^2\{P\}+\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)^2\sigma^2\{n\},$$

где

$$\left.\frac{\partial T}{\partial N}\right|_{\substack{N=M\{N\}\\ n=M\{n\}\\ P=M\{P\}}}=1-\left[1-\frac{M\{P\}}{M\{n\}M\{N\}}\right]^m-\frac{mM\{P\}}{M\{n\}M\{N\}}\times$$

$$\times\left[1-\frac{M\{P\}}{M\{N\}M\{n\}}\right]=1-0{,}96^m-0{,}04m\cdot 0{,}96^{m-1};$$

$$\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{m}{M\{n\}}\left[1-\frac{M\{P\}}{M\{n\}M\{N\}}\right]^{m-1}=0{,}25m\cdot 0{,}96^{m-1};$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}=-0{,}05m\cdot 0{,}96^{m-1};$$

$$\sigma^2\{T\}=0{,}00835m^2\cdot 0{,}96^{2(m-1)}-0{,}08m\cdot 0{,}96^{m-1}(1-0{,}96)+(1-0{,}96^m)^2$$

Приближенные значения $M\{T\}$ и $\sigma^2\{T\}$ для различных m равны:

m	2	10	30	100
$M\{T\}$	0,39	1,675	3,53	4,91
$\sigma^2\{T\}$	0,025	0,327	0,684	0,854

Пример 18. Независимые параметры X и Y имеют одинаковые плотности вероятности:

$$f(x)=f(y)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}; \quad 0\le x,y\le 1.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $z=\operatorname{arctg} X/Y$.

Решение. На основании формул (52) и (54) определяем:

$$M\{z\}\approx\operatorname{arctg}\frac{M\{X\}}{M\{Y\}};$$

$$\sigma^2\{z\} \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot \sigma^2\{x\} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \sigma^2\{y\}.$$

$$M\{x\} = M\{y\} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi};$$

$$\sigma^2\{x\} = \sigma^2\{y\} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - M^2\{x\} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=M(x)\\ y=M\{y\}}} = \frac{M\{y\}}{M^2\{x\}+M^2\{y\}} = \frac{\pi}{4};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=M\{x\}\\ y=M\{y\}}} = -\frac{M\{x\}}{M^2\{x\}+M^2\{y\}} = -\frac{\pi}{4}.$$

$$M\{z\} \approx \operatorname{arctg}\frac{\pi/2}{\pi/2} = \frac{\pi}{4};$$

$$\sigma^2\{z\} \approx 2\cdot\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{\pi^2-8}{2\pi^2} = \frac{\pi^2-8}{16}.$$

Пример 19. Для определения точности собираемого РПУ, систематическая ошибка которого равна нулю, проведено четыре независимых измерения его выходного параметра:

№ измер.	1	2	3	4
x, В	8	9	11	12

Найти выборочную среднюю результатов измерений, выборочную и исправленную дисперсии выходного параметра РПУ.

Решение.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{8+9+11+12}{4} = 10;$$

$$s^2\{x\} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(8-10)^2+(9-10)^2+(11-10)^2+(12-10)^2}{4} = 2{,}5$$

Исправленная дисперсия

$$s_n^2\{x\} = \frac{n}{n-1}\,s^2\{x\} = \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2} = \frac{10}{3}.$$

Пример 20. Радиоэлектронный прибор собирается из двух блоков. Сборка выполняется в том случае, если выходные характеристики первого блока соответствуют входным характеристикам второго блока. Найти закон распределения числа собранных приборов $Z = X + Y$ в том случае, когда законы распределения числа блоков с требуемыми характеристиками заданы следующими:

x	0	1	2		y	1	2
$P\{x\}$	0,1	0,2	0,7		$P\{y\}$	0,6	0,4

Определить математическое ожидание и дисперсию числа собранных приборов.

Решение. Число собранных приборов равно возможным суммам $X + Y$ чисел блоков с требуемыми характеристиками. Вероятности реализации этих сумм определяются по теореме умножения независимых событий: $P\{x\} \cdot P\{y\}$. Соответствующие значения вероятности данных сумм приведены в табл. 2.

Таблица 2

$Z = X + Y$	$P\{z\} = P\{x\} + P\{y\}$
0+1 = 1	0,1 0,6 = 0,06
0+3 = 3	0,1 0,4 = 0,04
1+1 = 2	0,2 0,6 = 0,12
1+3 = 4	0,2 0,4 = 0,08
2+1 = 3	0,7 0,6 = 0,42
2+3 = 5	0,7 0,4 = 0,28

$\Sigma P\{z\} = 1{,}00$

Применив теорему сложения для равных значений Z, получим $P\{Z=3\} = P\{(0+3)$ или $(2+1)\} = 0{,}04 + 0{,}42 = 0{,}46$.

Закон распределения Z:

z	1	2	3	4	5
$P\{z\}$	0,06	0,12	0,46	0,08	0,26

$$M\{z\} = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot p_i = 1\;0{,}06 + 2\;0{,}12 + 3 \cdot 0{,}46 + 4\;0{,}08 + 5 \cdot 0{,}28 = 3{,}4$$

$$\sigma^2\{z\} = \sum_{i=1}^{n} [z_i - M\{z\}]^2 \cdot p_i = M\{z^2\} - M^2\{z\}.$$

Составим вспомогательную таблицу:

z^2	1	4	9	16	25
$P\{z^2\} = P\{z\}$	0,06	0,12	0,46	0,08	0,28

Тогда

$$M\{z^2\} = 1 \cdot 0{,}06 + 4 \cdot 0{,}12 + 9 \cdot 0{,}46 + 16 \cdot 0{,}08 + 25 \cdot 0{,}28 = 12{,}96$$

$$\sigma^2\{z\} = 12{,}96 - (3{,}4)^2 = 1{,}40.$$

Пример 21. Оценка влияния сборочной операции на выходной параметр РПУ проводится на основе обработки результатов выборки из партии собранных устройств. Объем выборки 73 РПУ. Обработка результатов измерений на предыдущей операции показала, что данный параметр распределен нормально с $M\{x\}$ = = 1,5 мкс и $\sigma\{x\}$ = 0,25 мкс.

Определить распределение длительности импульса и влияние сборочной операции.

Решение. Результаты измерений длительности импульса в выборке РПУ приведены в табл. 3 в двух первых столбцах. Значения длительности импульса расположены в возрастающем порядке и сгруппированы в 13 интервалов через 0,1 мкс. В первом столбце табл. 3 даны границы интервалов (от 1,4 до 1,5; от 1,5 до 1,6 и т.д.), во втором – количество n_i значений x_i в данном интервале. В следующих столбцах приведены результаты промежуточных вычислений центральных и условных моментов в соответствии с формулами (13)–(19).

Таблица 3

Границы интервалов	m_i	u_i	$m_i u_i$	$m_i u_i^2$	$m_i u_i^3$	$m_i u_i^4$	$m_i (u_i+1)^4$
1,4–1,5	1	–6	–6	36	–216	1296	625
1,5–1,6	2	–5	–10	50	–250	1250	512
1,6–1,7	5	–4	–20	80	–320	1280	405
1,7–1,8	11	–3	–33	99	–297	891	176
1,8–1,9	9	–2	–18	36	–72	144	9
1,9–2,0	11	–1	–11	11	–11	11	0
2,0–2,1	12	0	Σ –98	0	Σ –1166	0	12
2,1–2,2	5	1	5	5	5	5	80
2,2–2,3	5	2	10	20	40	80	135
2,3–2,4	4	3	12	36	108	103	1024
2,4–2,5	3	4	12	48	192	768	1875
2,5–2,6	1	5	5	25	125	625	1296
2,6–2,7	4	8	32	256	2048	16384	26244
			Σ +76		Σ +2518	–	–
Σ	73		–22	702	1352	22842	32393
Контроль сумм	73		4Σ = –88	6Σ = =4212	4Σ = =5408	Σ = =22842	32393

Последний столбец и нижняя строка табл. 3 позволяют контролировать правильность вычислений:

$$\sum_{i=1}^{K} m_i (u_i+1)^4 = \sum_{i=1}^{K} (m_i u_i^4 + 4\sum_{i=1}^{K} m_i u_i^3 + 6\sum_{i=1}^{K} m_i u_i^2 + 4\sum m_i u_i + n).$$

Используя данные таблицы, по формулам (16)-(17) определяем условные оценки моментов распределения:

$$M_1' = -0{,}3; \quad M_2' = 9{,}62; \quad M_3' = 18{,}5; \quad M_4' = 319.$$

По формулам (18), (19) определяем центральные моменты распределения:

$\bar{X} = 1{,}97$; $S^2(X) = 0{,}953$; $s(X) = 0{,}31$; $M_3 = 0{,}027$; $M_4 = 0{,}035$.

Значения нормированных показателей асимметрии и эксцесса определяются по формулам (21) и (22): $b_1 = 0{,}90$; $b_2 = 3{,}9$. По рис. 1 определяем, что выходной параметр РПУ может быть описан бета-распределением.

Задаваясь достоверностью оценки $\alpha = 0{,}99$, по приложению 1 определяем $z_{\alpha_1=0{,}005} = -1{,}51$ и $z_{\alpha_2=0{,}995} = 3{,}34$. Отсюда находим, что истинное значение выходного параметра заключено согласно (24) в интервале $1{,}5 < M\{X\} < 3{,}0$ с доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}99$.

Таким образом, можно сделать вывод, что данная технологическая операция оказывает сильное влияние на выходной параметр РПУ, так как среднее значение параметра (систематическая погрешность) увеличивается на 1,97 - 1,5 = 0,47 мкс, а среднее квадратическое отклонение - на 0,31 - 0,25 = 0,06 мкс (случайная составляющая погрешности). Это составляет соответственно $\delta M = 31\%$, $\delta S = 24\%$. Кроме того, изменяется характер закона распределения параметра.

Пример 22. Операция герметизации радиоэлектронного блока приводит к изменению его коэффициента усиления K. Систематическая погрешность уменьшает коэффициент усиления на 50. Случайная ошибка распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma\{\Delta K\} = 100$. Определить вероятность того, что изменение коэффициента усиления на данной операции не превзойдет по абсолютной величине 150.

Р е ш е н и е. По условию задачи плотность вероятности отклонения коэффициента усиления имеет вид

$$f(\Delta K) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta K+50)^2}{20000}} \approx 0{,}4 \cdot e^{-\frac{(\Delta K+50)^2}{20000}}.$$

На основании формулы (26) с помощью таблиц функции Лапласа определяем

$$P\{|\Delta K|<150\}=P\{-150<\Delta K<150\}=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{150+50}{100}\right)-\Phi\left(\frac{-150+50}{100}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Phi(2)-\Phi(-1)\right].$$

Так как интеграл вероятности – нечетная функция $\Phi(\Delta K)=-\Phi(\Delta K)$, то $\Phi(-1)=-\Phi(1)$. Тогда

$$P\{|\Delta K|<150\}=0{,}5\cdot[\Phi(2)+\Phi(1)].$$

Из приложения 2 находим $\Phi(2)=0{,}9545$; $\Phi(1)=0{,}6827$.

$$P\{|\Delta K|<150\}=0{,}5\ (0{,}9545+0{,}6827)=0{,}8186.$$

Пример 23. Определить экономическую целесообразность двух способов снижения погрешности выходного параметра РПУ: отбраковки устройств с большими погрешностями коэффициента усиления или уменьшения среднего квадратического отклонения погрешности. Закон распределения погрешности выходного параметра устройства – нормальный.

Решение. Введем обозначения: C_c – стоимость РПУ до отбраковки; C_K – стоимость проверки РПУ; δX – допуск на выходной параметр, заданный техническими условиями; N – общее число РПУ в партии; Q – количество годных РПУ в партии; q – количество бракованных РПУ в партии.

В случае нормального закона распределения погрешность выходного параметра $\Delta X=\pm 3\sigma\{X\}$ с достоверностью, практически равной единице. Обычно $\delta X<\Delta X$. Обозначим через β отношение $\delta X/\Delta X$, тогда $\delta X=\beta\cdot\Delta X$. Вероятность выхода коэффициента усиления за заданные пределы

$$P\{|\delta X|<\beta\Delta X\}=\Phi\left(\frac{\beta\Delta X}{\Delta X}\right)=\Phi(\beta);$$

$Q=N\cdot\Phi(\beta)$; $Q=N-q$. Обозначим $\alpha=q/Q$.

Тогда стоимость годного РПУ

$$C_r=C_0(1+\alpha)=\frac{C_0}{\Phi(\beta)}.$$

Стоимость контроля годного РПУ

$$C_{Kr}=C_K/\Phi(\beta).$$

Суммарная стоимость РПУ после отбраковки

$$C_{y1}=\frac{C_0+C_K}{\Phi(\beta)}.$$

При уменьшении погрешности выходного параметра увеличивается точность РПУ, что связано с дополнительными затратами. Стоимость устройства в этом случае также увеличивается:

$C_{y2} = C_0/\beta^{\varepsilon} > C_0$, где $\varepsilon \geq 1$ — коэффициент, характеризующий повышение точности устройства при уменьшении $\sigma\{X\}$.

Определим отношение стоимостей устройства для двух случаев уменьшения погрешности выходного параметра:

$$C_{y1}/C_{y2} = \frac{C_0(1+C_K/C_0)}{\Phi(\beta)} \cdot \frac{\beta^{\varepsilon}}{C_0} = (1+\gamma)\frac{\beta^{\varepsilon}}{\Phi(\beta)},$$

где $\gamma = C_K/C_0$. При $C_{y1}/C_{y2} = 1$ $\Phi(\beta) = (1+\gamma)\beta^{\varepsilon}$. Из этого равенства определяем $\beta = \beta_0$.

При $\beta > \beta_0$ $C_{y1} > C_{y2}$ и целесообразно использовать первый вариант снижения погрешности коэффициента усиления РПУ; при $\beta < \beta_0$ $C_{y1} < C_{y2}$ и экономически выгоден второй вариант. В обоих случаях относительное увеличение стоимости устройства $C_y/C = 1/\Phi(\beta)$, где $\beta = 3/a$. Величина a =1,2,3,... показывает, во сколько раз уменьшается допуск по сравнению с первоначальным.

Увеличение стоимости РПУ характеризуется следующими цифрами:

a	1	2	3	4	5	10	20
C_y/C	1	1,15	1,47	1,84	2,21	4,24	8,40

Пример 24. При контроле приемных устройств установлено, что 80% их имеет чувствительность X в пределах ±20 мкВ. Найти среднее квадратическое отклонение чувствительности приемника, если этот параметр подчиняется нормальному закону распределения, а математическое ожидание равно нулю

Решение. По условию $P\{|X| < 20\} = 0,8$. Так как закон распределения чувствительности нормальный, а $M\{X\} = 0$, то

$$P\{|X| \leq 20\} = P\{-20 \leq X \leq 20\} = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{20}{\sigma\{X\}}\right) - \Phi\left(-\frac{20}{\sigma\{X\}}\right)\right] = \Phi\left(\frac{20}{\sigma\{X\}}\right).$$

Значение $\sigma\{X\}$ определяется из решения трансцендентного уравнения

$$\Phi(20/\sigma\{X\}) = 0,8.$$

По [2, стр. 389] определим $20/\sigma\{X\} = 1,90$. Откуда $\sigma\{X\} = 10,5$.

Пример 25. Монтаж интегральных микросхем на многослойную печатную плату производится на установке пайки микросхем. Режим пайки определяется тремя независимыми параметрами: температурой паяльника X_1, временем пайки X_2 и усилием прижима интегральных микросхем X_3 . Рассеивание параметров подчиняется нормальному закону в пределах $a_1 \leq X_1 \leq a_2$; $b_1 \leq X_2 \leq b_2$; $c_1 \leq X_3 \leq c_2$ с центром рассеивания в точке $M\{X_1\}, M\{X_2\}, M\{X_3\}$ со средними квадратическими отклонениями $\sigma\{X_1\}, \sigma\{X_2\}, \sigma\{X_3\}$.

Определить вероятность режима, обеспечивающего качественную пайку интегральных схем.

Решение. Искомая вероятность равна объему параллелепипеда, ребра которого $a_1 a_2$; $b_1 b_2$; $c_1 c_2$. Так как параметры режима технологической операции независимы, то событие $P\{a_1 \le X_1 \le a_2\}$ не зависит от того, какие значения примут остальные параметры. Это справедливо и относительно двух других параметров. Тогда

$$P\{a_1 \le X_1 \le a_2;\ b_1 \le X_2 \le b_2;\ c_1 \le X_3 \le c_2\} = P\{a_1 \le X_1 \le a_2\} \cdot P\{b_1 \le X_2 \le b_2\} \cdot P\{c_1 \le X_3 \le c_2\},$$

$$P\{a_1 \le X_1 \le a_2\} = \frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{a_2 - M\{X_1\}}{\sigma\{X_1\}}\right) - \Phi\left(\frac{a_1 - M\{X_1\}}{\sigma\{X_1\}}\right)\right\}.$$

Аналогично определяются вероятности других параметров. Вероятность качественной пайки интегральных микросхем

$$P\{a_1 \le X_1 \le a_2;\ b_1 \le X_2 \le b_2;\ c_1 \le X_3 \le c_2\} = \frac{1}{8}\left\{\left[\Phi\left(\frac{a_2 - M\{X_1\}}{\sigma\{X_1\}}\right) - \Phi\left(\frac{a_1 - M\{X_1\}}{\sigma\{X_1\}}\right)\right] \times \left[\Phi\left(\frac{b_2 - M\{X_2\}}{\sigma\{X_2\}}\right) - \Phi\left(\frac{b_1 - M\{X_2\}}{\sigma\{X_2\}}\right)\right] \times \left[\Phi\left(\frac{c_2 - M\{X_3\}}{\sigma\{X_3\}}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - M\{X_3\}}{\sigma\{X_3\}}\right)\right]\right\}.$$

Пример 26. С помощью критерия χ^2 и критерия Колмогорова проверить гипотезу о том, что распределение примера 21 можно аппроксимировать нормальным законом; $\bar{X} = 1{,}97$ мкс; $s\{X\} = 0{,}31$ мкс.

Решение. По данным выборки вычисляем значение критерия χ^2 с помощью выражения (55). Подробные вычисления приведены в табл. 4.

Таблица 4

Границы интервалов	n_i	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1,4–1,6	8	0,084	6,13	1,87	3,5	0,57
1,6–1,7	11	0,075	5,47	5,53	30,6	5,6
1,7–1,8	9	0,099	7,21	1,79	3,2	0,44
1,8–1,9	11	0,122	8,90	2,10	4,4	0,50
1,9–2,0	12	0,286	20,9	–8,9	79,0	3,8
2,0–2,1	5	0,090	6,56	–1,56	2,4	0,4
2,1–2,2	5	0,112	8,16	–3,16	10,0	1,23
2,2–2,4	7	0,161	11,74	–4,74	22,5	1,97
2,4–2,6	5	0,071	5,11	–0,11	0,01	0,00
Σ	$n = 73$	1,00				$\chi^2 = 14{,}51$

Полученное значение $\chi^2 = 14,51$. По приложению 3 с $f = 9-2-1 = 6$ степенями свободы для 5%-ного уровня значимости (0,05) находим табличное значение $\chi_1^2 = 12,6$. Для данной выборки $\chi^2 > \chi_1^2$, т.е. гипотеза о нормальном законе распределения выходного параметра РПУ не согласуется с опытными данными. Вычисления критерия Колмогорова см. в табл. 5.

Таблица 5

Границы интервалов	$p_{iэ}$	$F_э(z)$	p_{iT}	$F_T(z)$	$F_T(z)-F_э(z)$
1,4–1,6	0,084	0,584	0,11	0,11	-0,474
1,6–1,7	0,075	0,575	0,15	0,26	-0,315
1,7–1,8	0,099	0,599	0,12	0,38	-0,219
1,8–1,9	0,122	0,622	0,15	0,53	-0,092
1,9–2,0	0,286	0,786	0,16	0,69	-0,096
2,0–2,1	0,090	0,590	0,07	0,76	-0,17
2,1–2,2	0,112	0,612	0,07	0,83	0,22
2,2–2,4	0,161	0,661	0,10	0,93	0,27
2,4–2,6	0,071	0,571	0,07	1,00	0,43

Здесь $F_э(z) = 0,5+0,5\,\Phi(z)$; $F_T(z)$ вычисляется как нарастающая сумма частностей $p_{iT} = n_i/n$. Максимальное по абсолютной величине значение D /см. формулу (56)/ равно 0,474;

$$D\sqrt{n} = 0,474\cdot 8,544 = 4,05.$$

Тогда по приложению 4 находим значение $P\{D\sqrt{n}\} = 0$, т.е. гипотезу о нормальности распределения следует отбросить.

Пример 27. Проверить с помощью критерия Колмогорова гипотезу о том, что выборка примера 21 извлечена из генеральной совокупности, равномерно распределенной на интервале (1,35...2,65).

Решение. Найденное по выборке значение $D\sqrt{n} = 4,05$ превосходит, например, значение даже 30%-ного уровня $\chi^2_{0,3} = 3,83$, т.е. гипотезу следует отбросить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979, 496 с.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.

3. Месяцев П.П. Применение теории вероятностей и математической статистики при конструировании и производстве радиоаппаратуры. – М.: Оборонгиз, 1958 262с.

4. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. – М.: Мир, 1969, 400с.

ОГЛАВЛЕНИЕ