

Цена 400 руб.

07731

48-94  
19032

98  
ДК  
21.396  
192

17936

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. В. НАЗАРОВ

АВТОМАТИЗАЦИЯ СХЕМОТЕХНИЧЕСКОГО  
ПРОЕКТИРОВАНИЯ



Москва

1994

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. В. НАЗАРОВ

Утверждено  
учебным управлением МЭИ  
в качестве учебного пособия  
для студентов

АВТОМАТИЗАЦИЯ СХЕМОТЕХНИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ  
по курсу

Основы САПР РЭА

Под редакцией Е. М. Старовойтовой

Москва

Издательство МЭИ

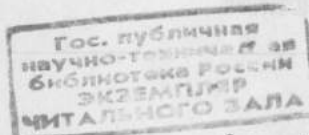
1994

УДК

621.396

Н192

УДК: 621.396.6.001.63-52(075.8)



005

Д8-94

19032

295-10443

**Автоматизация схемотехнического проектирования. А.В.Назаров**  
/ Под ред. Е.М.Старовойтовой. - М.: Изд-во МЭИ, 1994. - 92 с.

Рассмотрены методы получения математических моделей РЭУ и особенности их использования на схемотехническом этапе автоматизированного проектирования.

Предназначено для студентов радиотехнического факультета.

**Рецензенты:**

докт. техн. наук проф. В. А. Сорокопуд

канд. техн. наук доц. В.М.Богачев

© Московский энергетический институт, 1994 г.

**ВВЕДЕНИЕ**

Проектирование современной конкурентоспособной радио-электронной аппаратуры представляет собой сложную задачу, которую в подавляющем большинстве случаев невозможно решить без применения вычислительной техники. Усложнение аппаратуры и использование современной элементной базы привело к резкому росту стоимости макетирования. В результате разработчик все чаще вынужден отказываться от макетирования и заменять его математическим моделированием на ЭВМ. Кроме того, широкое использование средств автоматизации позволяет разрешить противоречие между жесткими сроками проектирования, обусловленными быстрым моральным старением аппаратуры, и качеством проектных решений.

В настоящее время в проектирование активно внедряются персональные ЭВМ (ПЭВМ), которые позволяют инженеру-проектировщику работать с машиной без посредников. К сожалению, их возможности используются далеко не полностью. И связано это не только с наличием психологического барьера или нехваткой аппаратных и программных средств, но и с недостатками специалистов, умеющих свободно применять эти средства, овладевших методиками автоматизированного проектирования. Грамотный специалист должен не только уметь реализовать нужные ему проектные процедуры с помощью системы автоматизированного проектирования (или ее подсистемы), но и представлять, как работает эта система, какие модели и методы в ней используются.

В данном учебном пособии приведено описание методов получения математических моделей радиоэлектронных устройств (РЭУ), используемых при автоматизированном схемотехническом проектировании, и методов их анализа.

Первая глава посвящена традиционным методам получения и анализа математических моделей. Рассматриваются математические модели - системы уравнений и методы их решения при проведении анализа по постоянному току, анализа линейных схем в частотной области и анализа переходных процессов. При этом основное внимание

уделено особенностям автоматизированного формирования моделей.

Многие задачи, решаемые на этапе схемотехнического проектирования РЭУ: параметрический синтез, оптимизация, статистические испытания - требуют для своего решения многовариантного анализа электронных схем. При использовании математических моделей, полученных традиционными методами, такой анализ достаточно трудоемок. Поэтому при проектировании оказываются полезными полиномиальные модели, экономичные по затратам машинной памяти и времени. Одним из путей получения полиномиальных моделей является применение методов математического планирования эксперимента. Во второй главе пособия изложены основные понятия теории планирования эксперимента, рассмотрены особенности ее применения при моделировании РЭУ и даны практические рекомендации по формированию их полиномиальных моделей.

## I. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

### I.1. Математические модели электронных схем

Электронная схема состоит из активных и пассивных элементов, соединенных в соответствии с ее функциональным назначением. Способ соединения элементов в схеме - ее структура, называется топологией. Поэтому математическая модель схемы (ММС) должна описывать как элементы, так и топологию.

**Компонентные уравнения - математические модели элементов схемы.** На этапе схемотехнического проектирования используются функциональные модели элементов, описывающие закономерности их функционирования, в отличие от структурных моделей, используемых на этапе конструкторского проектирования. Описание функционирования проводится на макроуровне, т.е. отражаются лишь те свойства элемента, которые характеризуют его взаимодействие с другими элементами устройства. Такие модели оперируют с сосредоточенными параметрами и устанавливают связь между напряжениями на элементах  $U(t)$  и токами  $i(t)$ , протекающими через них.

Основными элементами электронной схемы являются линейные не зависящие от времени сопротивления, емкости и индуктивности, активные приборы и независимые источники тока и напряжения. При моделировании активные приборы представляются схемами замещения, состоящими из сопротивлений, емкостей и управляемых напряжениями источников тока [1-3]. Математические модели элементов называются компонентными уравнениями. Для пассивных элементов компонентные уравнения имеют вид:

$$\text{сопротивление } R \text{ и проводимость } G \\ U(t) = R i(t) = i(t) / G; \quad (I.1a)$$

$$\text{емкость} \quad i(t) = C \frac{dU(t)}{dt}; \quad (I.1б)$$

$$\text{индуктивность} \quad U(t) = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (I.1в)$$

Компонентные уравнения для активных приборов приведены в [2,3].

В ряде случаев компонентные дифференциальные уравнения

удается преобразовать в алгебраические. Так, для линейных не зависящих от времени схем это можно осуществить с помощью преобразования Лапласа. Известно [4], что для функции-оригинала  $f(t)$ , имеющей не более, чем экспоненциальную степень роста при  $t > 0$  ( $f(t) \leq K e^{at}$ , где  $K > 0$ ,  $a > 0$ ), можно найти ее изображение  $F(p)$ , а по известному изображению восстановить оригинал, используя соответственно прямое и обратное преобразования Лапласа:

$$L\{f(t)\} = F(p); \quad L^{-1}\{F(p)\} = f(t).$$

Обозначив через  $I(p)$  изображение функции тока  $i(t)$ , а через  $V(p)$  - изображение напряжения  $U(t)$  и учитывая, что изображение производной

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0),$$

можно получить компонентные уравнения в таком виде:

$$V(p) = RI(p); \quad (I.1a)$$

$$I(p) = pCV(p) - CV_0; \quad (I.1б)$$

$$V(p) = pLI(p) - LI_0. \quad (I.1в)$$

где  $V_0 = U_C(0)$ ;  $I_0 = i_L(0)$  - начальные условия.

В случае нулевых начальных условий операторная проводимость (адмитанс) емкости  $Y_C = I/V = pC$ , а операторное сопротивление (импеданс) индуктивности  $Z_L = V/I = pL$  и компонентные уравнения в операторной форме приобретают вид

$$V(p) = R I(p) = I(p) / G, \quad (I.2a)$$

$$I(p) = pCV(p) = Y_C V(p), \quad (I.2б)$$

$$V(p) = pLI(p) = Z_L I(p). \quad (I.2в)$$

Для расчета установившегося режима линейных схем при гармоническом воздействии с частотой  $\omega$  используются следующие модели сигналов:

$$U(t) = \operatorname{Re} [U_m e^{j\omega t + \varphi}];$$

$$i(t) = \operatorname{Re} [I_m e^{j\omega t + \varphi}].$$

где  $U_m$  - амплитуда напряжения;

$I_m$  - амплитуда тока;

$\varphi$  - фаза сигнала.

Введя понятие комплексных амплитуд  $U = U_m e^{j\varphi}$  и  $I = I_m e^{j\varphi}$  и учитывая, что  $\frac{de^{-j\omega t}}{dt} = j\omega e^{j\omega t}$ , можно получить еще один вариант записи компонентных уравнений - для комплексных амплитуд:

$$U = RI = I / G, \quad (I.3a)$$

$$I = j\omega CU, \quad (I.3б)$$

$$U = j\omega LI. \quad (I.3в)$$

Таким образом с помощью компонентных уравнений можно описать любой из элементов схемы. Программы моделирования, реализуемые в системах автоматизированного проектирования, содержат встроенные библиотеки математических моделей разных уровней сложности для типовых компонентов (например, [3]).

**Математическая модель схемы.** Математическая модель схемы (ММС) формируется на основе компонентных уравнений и описывает совместное функционирование элементов, зависящее от конкретного способа их соединения - топологии схемы. Поэтому объединение компонентных уравнений в ММС осуществляется с помощью так называемых топологических уравнений, которые составляются на основе законов Кирхгофа:

$$\text{любой узел} \quad \sum_k i_k(t) = 0 \quad - \text{первый закон Кирхгофа};$$

$$\text{любой контур} \quad \sum_1 U_1(t) = 0 \quad - \text{второй закон Кирхгофа}.$$

Уравнения законов Кирхгофа инвариантны для сигналов, представленных функциями времени, изображениями по Лапласу или комплексными амплитудами.

Для формирования ММС используются несколько методов, различающихся составом независимых переменных и видом исходных топологических уравнений. Это табличный метод, метод узловых потенциалов, метод переменных состояния [1,2,4]. Однако наиболее широкое распространение в системах автоматизированного проектирования получил метод узловых потенциалов и его модификации.

Метод узловых потенциалов позволяет формировать ММС в виде системы уравнений, которые составляются на основе первого закона Кирхгофа для внутренних узлов схемы (не имеющих непосредственной связи с источником напряжения). В качестве независимых переменных

используются напряжения этих узлов, определяемые относительно некоторого опорного узла, потенциал которого принимается равным нулю.

### Пример I.I.

Сформировать математическую модель схемы, приведенной на рис. I.I, с помощью метода узловых потенциалов.

а) Выделим внутренние узлы схемы: "1" и "2", и опорный узел "0", соединенный с корпусом. В качестве независимых переменных в модели будут использованы напряжения внутренних узлов  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$ .

б) Зададим условно положительные направления токов через элементы схемы (см. рис. I.I).

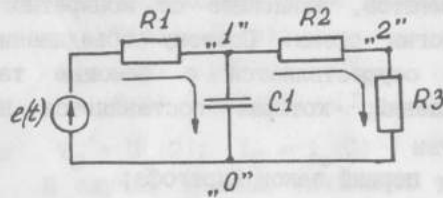


Рис. I.I

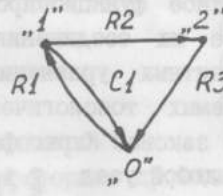


Рис. I.2

в) Составим топологические уравнения для внутренних узлов на основании первого закона Кирхгофа:

$$\begin{cases} -i_{R1}(t) + i_{R2}(t) + i_{C1}(t) = 0; \\ -i_{R2}(t) + i_{R3}(t) = 0. \end{cases} \quad (I.4)$$

г) Используя компонентные уравнения (I.I) и выразив напряжения на элементах через  $e(t)$ ,  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$ , получим ММС

$$\begin{cases} -\frac{e(t) - U_1(t)}{R_1} + \frac{U_1(t) - U_2(t)}{R_2} + C \frac{dU_1(t)}{dt} = 0; \\ -\frac{U_1(t) - U_2(t)}{R_2} + \frac{U_2(t)}{R_3} = 0. \end{cases} \quad (I.5)$$

Аналогично можно получить ММС для изображений узловых напряжений  $V_j(p)$ ,  $j=1+2$  и  $E(p)$ :

$$\begin{cases} -\frac{E(p) - V_1(p)}{R_1} + \frac{V_1(p) - V_2(p)}{R_2} + pCV_1(p) = 0; \\ -\frac{V_1(p) - V_2(p)}{R_2} + \frac{V_2(p)}{R_3} = 0 \end{cases} \quad (I.6)$$

и для комплексных амплитуд  $U_j$ ,  $j=1+2$ , и  $E$ :

$$\begin{cases} -\frac{E - U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_2} + j\omega CU_1 = 0; \\ -\frac{U_1 - U_2}{R_2} + \frac{U_2}{R_3} = 0. \end{cases} \quad (I.7)$$

Таким образом, метод узловых потенциалов позволил получить три различных ММС, каждая из которых представляет собой систему из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными (в примере  $n=2$ ). ММС (I.5) является системой дифференциально-алгебраических уравнений и может быть использована для нахождения узловых напряжений  $U_j(t)$ ,  $j=1-n$ , при любых видах воздействий  $e(t)$  и начальных условий, но часто ее применение требует значительных интеллектуальных и временных затрат.

ММС в виде (I.6) - система алгебраических уравнений. Она удобна при нулевых начальных условиях и для воздействий  $e(t)$ , имеющих несложные изображения  $E(p)$ . Решив систему (I.6) и найдя изображения узловых напряжений  $V_j(p)$ ,  $j=1-n$ , можно перейти к

функциям-оригиналам  $U_j(t)$ .

Самая простая ММС (I.7). Она справедлива для гармонического воздействия и установившегося режима. Решив систему (I.7) относительно  $U_j$ , легко перейти к  $U_j(t)$ .

**Топологическое описание схем.** В автоматизированных системах математическую модель схемы составляет ЭВМ. Поэтому она должна иметь информацию об элементах схемы и способе их соединения, т.е. о топологии схемы. Наиболее простым и наглядным описанием топологии является направленный граф, который строится по следующим правилам: вершины графа соответствуют узлам схемы, ребра - элементам, а направления ребер совпадают с условно положительными направлениями токов через соответствующие им элементы. На рис. I.2 изображен направленный граф, который соответствует схеме, приведенной на рис. I.1.

Однако ЭВМ не может оперировать непосредственно с графом. Поэтому его надо преобразовать в числовую форму - заменить матричным эквивалентом, в качестве которого можно использовать матрицы инциденций, контуров или сечений. Метод узловых потенциалов работает с матрицей инциденций [a], строки которой соответствуют вершинам графа (узлам схемы), а столбцы - ребрам (элементам схемы). Элементы матрицы  $a_{ij}$  определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} I, & \text{если } j\text{-е ребро инцидентно (связано) } i\text{-му узлу и} \\ & \text{направлено от него (вытекающий ток);} \\ -I, & \text{если } j\text{-е ребро инцидентно } i\text{-му узлу и направленно} \\ & \text{к нему (втекающий ток);} \\ 0, & \text{если } j\text{-е ребро не связано с } i\text{-м узлом.} \end{cases}$$

Матрица инциденций для графа, изображенного на рис. I.2, имеет вид

	R1	R2	C1	R3	
	I	0	-I	-I	узел 0
a =	-I	I	I	0	узел I
	0	-I	0	I	узел 2

Таким образом, схеме, содержащей  $(n+1)$  узлов и  $m$  ветвей, соответствует матрица инциденций размером  $(n+1)*m$ .

В реальных схемах каждый двухполюсный элемент подключен к

двум разным узлам. Поэтому, во-первых, направленный граф не будет содержать петель, и, во-вторых, в каждом столбце матрицы инциденций [a] будут обязательно присутствовать два ненулевых элемента, сумма

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} = 0. \quad (I.8)$$

Вследствие этого из матрицы инциденций [a] можно вычеркнуть любую строку без потери информации. Для восстановления вычеркнутой строки достаточно каждый столбец дополнить элементом, который обеспечит выполнение условия (I.8). Обычно вычеркивается строка, соответствующая нулевому узлу. Полученная матрица размером  $n * m$  называется редуцированной матрицей инциденций A. Для рассматриваемого примера она имеет вид

	R1	R2	C1	R3	
A =	-I	I	I	0	узел I
	0	-I	0	I	узел 2

Если представить токи, протекающие через элементы схемы на рис. I.1, в виде вектора - столбца  $\bar{I}$ , которому соответствует  $\bar{I}^T = \{i_{R1}, i_{R2}, i_{C1}, i_{R3}\}$ ; составить произведение  $A\bar{I}$  и раскрыть его в виде системы уравнений, то, согласно (I.4), она будет иметь вид

$$A\bar{I} = \begin{vmatrix} -I & I & I & 0 \\ 0 & -I & 0 & I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{C1} \\ i_{R3} \end{vmatrix} = \begin{cases} -i_{R1} + i_{R2} + i_{C1} = 0 \\ -i_{R2} + i_{R3} = 0 \end{cases}$$

А так как система (I.4) составлена на основе первого закона Кирхгофа, то формулировка этого закона в матричной форме приобретает вид

$$A\bar{I} = 0. \quad (I.9)$$

Следовательно, для формирования топологических уравнений любой схемы на основе первого закона Кирхгофа надо составить редуцированную матрицу инциденций A и столбец токов  $\bar{I}$ .

**Обобщенная форма описания двухполюсников.** При машинном формировании ММС и ее анализе оказывается удобным представлять все

ветви схемы - элементарные двухполюсники, в едином, обобщенном виде. В этом случае любая  $k$ -я ветвь, включенная между  $i$ -м и  $j$ -м узлами, замещается обобщенной ветвью, эквивалентная схема которой приведена на рис. I.3.

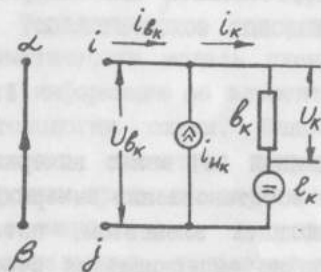


Рис. I.3

обобщенной ветви использованы следующие обозначения:

$i_{B_k}(t)$  - ток, текущий через  $k$ -ю ветвь;

$U_{B_k}(t)$  - напряжение на  $k$ -й ветви;

$i_k(t)$  - ток, текущий через элемент  $V_k$ ;

$U_k(t)$  - напряжений на элементе  $V_k$ .

Тогда при описании схемы, содержащей  $m$  ветвей, будут использоваться следующие векторы:

$$\begin{aligned} \vec{U}_B &= \begin{bmatrix} U_{B_1}(t) \\ U_{B_2}(t) \\ \dots \\ U_{B_m}(t) \end{bmatrix}; & \vec{U} &= \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_m(t) \end{bmatrix}; & \vec{e} &= \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \dots \\ e_m(t) \end{bmatrix}; \\ \vec{I}_B &= \begin{bmatrix} i_{B_1}(t) \\ i_{B_2}(t) \\ \dots \\ i_{B_m}(t) \end{bmatrix}; & \vec{I} &= \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \dots \\ i_m(t) \end{bmatrix}; & \vec{I}_I &= \begin{bmatrix} i_{I_1}(t) \\ i_{I_2}(t) \\ \dots \\ i_{I_m}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

На основе законов Кирхгофа для каждой ветви можно записать

$$i_{B_k}(t) = i_k(t) - i_{I_k}(t); \quad U_{B_k}(t) = U_k(t) - e_k(t),$$

а для схемы в целом

$$\vec{I}_B = \vec{I} - \vec{I}_I; \quad (I.10a)$$

$$\vec{U}_B = \vec{U} - \vec{e}. \quad (I.10b)$$

При этом формулировка первого закона Кирхгофа, на основе которого составляются топологические уравнения, приобретает вид

$$A \vec{I}_B = A(\vec{I} - \vec{I}_I) = 0.$$

$$A \vec{I} = A \vec{I}_I. \quad (I.11)$$

## I.2. Анализ линейных схем в частотной области

Среди различных задач анализа, решаемых в процессе схемотехнического проектирования РЭУ, анализ линейных схем в частотной области (по переменному току) является наиболее простым. Он проводится для схем, которые работают, как правило, в режиме малого сигнала и процессы в которых удовлетворяют принципам суперпозиции и пропорциональности.

Задача машинного анализа схемы заключается в формировании математической модели схемы в виде системы уравнений и ее решении. При этом ММС должна соответствовать поставленной задаче, т.е. использовать соответствующие модели элементов. Для анализа в частотной области используются малосигнальные линейные по параметрам модели активных приборов, а при описании обобщенной ветви схемы (см. рис. I.3) - вектора комплексных амплитуд токов и напряжений, (с ними удобно работать при гармонических воздействиях в установившемся режиме):

$\vec{I}_B$  - токов, текущих через ветви;

$\vec{U}_B$  - напряжений на ветвях;

$\vec{I}$  - токов, текущих через элементы;

$\vec{U}$  - напряжений на элементах;

$\vec{E}$  - независимых источников напряжений;

$\vec{J}$  - независимых источников тока.

В этом случае формулировка первого закона Кирхгофа приобретает следующий вид:



$$\bar{A}\bar{I} = A\bar{J} \quad (I.I)$$

Метод узловых потенциалов позволяет получить математическую модель схемы, которая в матричной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{m1} & Y_{m2} & \dots & Y_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_m \end{pmatrix}$$

или в векторной форме

$$Y_m \bar{V} = \bar{I}, \quad (I.II)$$

где  $Y_m$  - матрица проводимостей ветвей;

$m$  - число ветвей схемы.

Элементы матрицы проводимости ветвей  $Y_{kl}$  определяются как:

а) если  $V_k$  - импеданс (адмитанс), то

$$Y_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq k; \\ \text{адмитанс ветви } V_k, & \text{если } l = k; \end{cases}$$

б) если  $V_k$  - источник тока, управляемый напряжением

на  $q$ -й ветви (между узлами  $\alpha$  и  $\beta$ ), причем  $\bar{I}_k = g_{kq} \bar{V}_q$ , то

$$Y_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq q, \\ g_{kq}, & \text{если } l = q. \end{cases}$$

Используя соотношения (I.IIб) и (I.II) и выразив  $\bar{V}$  через  $\bar{V}_B$  (см. I.IOb), можно получить соотношение

$$AY_m (\bar{V}_B + \bar{E}) = A\bar{J},$$

которое затем тождественно преобразуется к виду

$$AY_m \bar{V}_B = A(\bar{J} - Y_m \bar{E}). \quad (I.III)$$

Метод узловых потенциалов использует понятие "напряжение узла", которое определяется как разность напряжений между  $j$ -м опорным узлами и имеет комплексную амплитуду  $\bar{V}_{nj}$ . Векторы напряжений узлов  $\bar{V}_n$  и напряжений на ветвях  $\bar{V}_B$  соотносятся следующим образом:

$$\bar{V}_B = A^T \bar{V}_n. \quad (I.IV)$$

го легко показать на примере схемы, представленной на рис.I.I. Для этой схемы

$$\bar{V}_B = \begin{pmatrix} \bar{V}_{a1} \\ \bar{V}_{a2} \\ \bar{V}_{a3} \\ \bar{V}_{a4} \end{pmatrix} = A^T \bar{V}_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{V}_{n1} \\ \bar{V}_{n2} \end{pmatrix}.$$

действительно,  $\bar{V}_{a1} = -\bar{V}_{n1}$ ,  $\bar{V}_{a2} = \bar{V}_{n1} - \bar{V}_{n2}$ ,  $\bar{V}_{a3} = \bar{V}_{n1}$ ,  $\bar{V}_{a4} = \bar{V}_{n2}$ .

Таким образом, переход от напряжений на ветвях  $\bar{V}_B$  к напряжениям узлов  $\bar{V}_n$  дает в результате

$$AY_m A^T \bar{V}_n = A(\bar{J} - Y_m \bar{E}). \quad (I.IV)$$

Вводятся обозначения:

$Y_n = AY_m A^T$  - матрица проводимостей узлов;

$\bar{J}_n = A(\bar{J} - Y_m \bar{E})$  - вектор комплексных амплитуд эквивалентных узловых источников тока.

Это позволяет соотношение (I.IV) представить в виде

$$Y_n \bar{V}_n = \bar{J}_n. \quad (I.IV)$$

Матрица проводимостей узлов имеет размерность  $n \times n$  (число узлов схемы равно  $n+1$ , один узел - опорный), а вектор  $\bar{J}_n$  имеет длину  $n$ . Поэтому выражение (I.IV) есть матричная форма представления системы  $n$  линейных уравнений, содержащих  $n$  неизвестных узловых напряжений  $\bar{V}_{nj}$ , т.е. ММС, полученной с помощью метода узловых потенциалов. В скалярном виде эта система выглядит как

$$\begin{cases} Y_{n11} \bar{V}_1 + Y_{n12} \bar{V}_2 + \dots + Y_{n1n} \bar{V}_n = \bar{J}_{n1} \\ Y_{n21} \bar{V}_1 + Y_{n22} \bar{V}_2 + \dots + Y_{n2n} \bar{V}_n = \bar{J}_{n2} \\ \vdots \\ Y_{nn1} \bar{V}_1 + Y_{nn2} \bar{V}_2 + \dots + Y_{nnn} \bar{V}_n = \bar{J}_{nn} \end{cases}.$$

Решив систему (I.I6), можно найти узловые напряжения  $\bar{V}_n$ , а затем определить напряжение на элементах  $\bar{V}_B$  и токи через них  $\bar{I}_B$ .

Для схемы, представленной на рис. I.I, редуцированная матрица инцидентий  $A$ , как показано выше, имеет вид

$$A = \begin{array}{cccc|c} R1 & R2 & C1 & R3 & \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & \text{узел I} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \text{узел 2} \end{array}$$

Так как все ветви носят характер импеданса, то матрица проводимостей ветвей

$$Y_m = \begin{array}{cccc|c} 1/R1 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1/R2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & j\omega C1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1/R3 & \end{array}$$

Матрица проводимостей узлов

$$Y_n = AY_m A^T = \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & \end{array} \cdot \begin{array}{cccc|c} 1/R1 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1/R2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & j\omega C1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1/R3 & \end{array} \cdot \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & \\ \hline 1 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} =$$

$$= \begin{array}{cccc|c} -1/R1 & 1/R2 & j\omega C1 & 0 & \\ \hline 0 & -1/R2 & 0 & 1/R3 & \end{array} \cdot \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & \\ \hline 1 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} =$$

$$= \begin{array}{ccc|c} -1/R1 + 1/R2 + j\omega C1 & & -1/R2 & \\ \hline -1/R2 & & 1/R2 + 1/R3 & \end{array}$$

Вектор эквивалентных узловых источников тока

$$\bar{J}_n = A(\bar{J} - Y_m \bar{E}) =$$

$$= \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & \end{array} \cdot \left( \begin{array}{c|c} 0 & 1/R1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 & 0 \quad 1/R2 \quad 0 \quad 0 \\ 0 & 0 \quad 0 \quad j\omega C1 \quad 0 \\ 0 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/R3 \end{array} \right) \cdot \begin{array}{c|c} E1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} =$$

$$= \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} -E1/R1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c|c} E1/R1 \\ \hline 0 \end{array},$$

Подставив выражения, полученные для  $Y_n$  и  $\bar{J}_n$ , в ММС (I.I6), получаем систему уравнений в матричной форме:

$$\begin{array}{cc|c} 1/R1 + 1/R2 + j\omega C1 & -1/R2 & \\ \hline -1/R2 & 1/R2 + 1/R3 & \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} \bar{V}_{n1} \\ \hline \bar{V}_{n2} \end{array} = \begin{array}{c|c} E1/R1 \\ \hline 0 \end{array}$$

или в скалярной:

$$\begin{cases} \left[ \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + j\omega C1 \right] \bar{V}_{n1} - \frac{1}{R2} \bar{V}_{n2} = \frac{E1}{R1} \\ -\frac{1}{R2} \bar{V}_{n1} + \left[ \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} \right] \bar{V}_{n2} = 0, \end{cases}$$

которая совпадает с полученной ранее ММС этой схемы (I.5).

Следовательно, при анализе линейных схем в частотной области для получения ММС достаточно сформировать матрицы  $A$  и  $Y_m$  и векторы  $\bar{E}$  и  $\bar{J}$ , а затем выполнить операции умножения матриц и сложения векторов. Все эти операции с успехом выполняет ЭВМ.

Однако рассмотренный способ отыскания матрицы  $Y_n$  и вектора  $\bar{J}_n$  путем перемножения матриц и векторов требует больших затрат машинной памяти и времени. Поэтому ЭВМ формирует  $Y_n$  и  $\bar{J}_n$  непосредственно, просматривая поочередно ветви схемы и размещая информацию о них по определенным правилам. Для формулировки этих правил надо проанализировать, куда помещается информация  $k$ -й

ветви, содержащей проводимость  $b_k$  и подключенной между 1-м и j узлами так, что ток протекает от 1-го к j-му узлу.

Матрица инцидентий  $A$  будет содержать "1" в позиции (1,k) и "-1" в позиции (j,k). Матрица  $Y_m$  содержит проводимость  $b_k$  в позиции (k,k). Схема процесса формирования матрицы  $Y_n$  и вектора  $\bar{J}_n$  представлена ниже:

$$Y_n = AY_m A^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} k \end{matrix} \\ \begin{matrix} k \\ \dots \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} k \\ \dots \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} k \\ \dots \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\bar{J}_n = A(\bar{J} - Y_m \bar{E}) =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \left( \begin{matrix} \begin{matrix} k \\ \dots \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \end{matrix} \right) =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \left( \begin{matrix} \begin{matrix} k \\ \dots \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \right) = \begin{matrix} & \begin{matrix} (J_k - b_k E_k) \\ \dots \\ -(J_k - b_k E_k) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Из приведенной схемы следует, что в случае, когда проводимость, информация о k-й ветви появляется в матрице  $Y_n$

в четырех позициях, причем в позициях (1,1) и (j,j) она фигурирует со своим знаком, а в позициях (1,j) и (j,1) - с противоположным. При формировании вектора  $\bar{J}_n$  в позицию (1) добавляется величина  $J_k - b_k E$ , а в позиции (j) эта величина вычитается.

Если же  $b_k$  - зависимый источник тока, управляемый напряжением на q-ой ветви подключенной между узлами  $\alpha$  и  $\beta$ , причем  $I_k = g_{kq} V_q$ , то формирование  $Y_n$  и  $\bar{J}_n$  можно представить следующей схемой:

$$Y_n = \begin{matrix} & \begin{matrix} k & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} q \end{matrix} \\ \begin{matrix} k \\ \dots \\ q \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \alpha & j & \beta \end{matrix} \\ \begin{matrix} k \\ \dots \\ q \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ | & & | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} q \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \alpha & j & \beta \end{matrix} \\ \begin{matrix} k \\ \dots \\ q \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ | & & | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \alpha & \beta \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} k & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \left( \begin{matrix} \begin{matrix} k \\ \dots \\ q \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \end{matrix} \right) =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} k & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \left( \begin{matrix} \begin{matrix} k \\ \dots \\ q \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix} \right) = \begin{matrix} & \begin{matrix} (Y_k - g E_q) \\ \dots \\ -(Y_k - g E_q) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} | & & | \\ \vdots & & \vdots \\ | & & | \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Таким образом, информация об управляемом напряжении источнике тока также помещается в четыре позиции матрицы  $Y_n$ . В

позициях (1а) и (jβ) добавляется величина  $g_j$ , а в позициях (1β) (jα) - вычитается. В позицию (1) вектора  $\bar{J}_n$  добавляется величина  $(J_k - g_k E_q)$ , а в позиции (j) - вычитается.

Работая по этим правилам, ЭВМ формирует матрицу  $Y_n$  и вектор  $\bar{J}_n$  и составляет ММС в виде системы линейных уравнений (I.16). Для решения применяются различные методы, из которых одним из наиболее эффективных является метод исключений Гаусса, состоящий из двух шагов. На первом шаге переменные последовательно, по одному, исключаются до тех пор, пока не останется одно уравнение с одним неизвестным. На втором шаге (шаг обратной подстановки) решается оставшееся уравнение, это решение подставляется в предыдущее уравнение (с двумя неизвестными, одно из которых уже найдено), которое также решается и т.д. Эта операция продолжается до тех пор, пока не будут найдены все неизвестные узловые напряжения  $\bar{V}_k$ .

Таким образом, для проведения анализа линейных схем в частотной области необходимо последовательно выполнить следующие процедуры. Сначала исходная принципиальная схема заменяется эквивалентной схемой по переменному току. Для этого активные приборы заменяются их малосигнальными схемами замещения, источники постоянного напряжения закорачиваются. Затем формируются комплексная матрица  $Y_n$  и комплексный вектор  $\bar{J}_n$ . При этом независимые источники тока представляются своими комплексными амплитудами (указываются амплитуда и фаза или мнимая действительная части), а проводимость пассивных элементов моделируется соотношениями:  $Y_R = 1/R$ ,  $Y_C = j\omega C$ ,  $Y_L = 1/j\omega L$ .

Следующий шаг - формирование ММС:  $Y_n \bar{V} = \bar{J}_n$  и решение системы уравнений - определение комплексных амплитуд узловых напряжений  $\bar{V}_k$  помощью одного из известных методов.

### I.3. Анализ схем по постоянному току

Параметры активных приборов и, следовательно, параметры схем замещения существенно зависят от режима по постоянному току. Поэтому анализу в частотной области должен предшествовать анализ схемы по постоянному току.

Основной отличительной чертой этого вида анализа является

использование нелинейных моделей активных приборов - их схемы замещения содержат ветви, имеющие нелинейные зависимости тока от напряжения [I-3]. Например, ток через полупроводниковый диод описывается следующим соотношением:

$$I_D = I_S [\exp(U_D/N\phi_T) - 1].$$

где  $I_S$ ,  $N$  - параметры диода;  
 $U_D$  - напряжение на диоде;  
 $\phi_T$  - температурный потенциал.

Предполагается, что схема состоит из обобщенных ветвей (рис. I.3), но, в отличие от предыдущего случая, ток через ветвь нелинейно зависит от напряжения:

$$i_k = g_k(V_k).$$

где  $V_k$  - напряжение на k-й ветви;  
 $g_k$  - некоторая нелинейная функция.

Для формирования ММС можно использовать метод узловых потенциалов. Так как, согласно (I.II),

$$\bar{A} \bar{G}(\bar{V}) = \bar{A} \bar{J},$$

$$\bar{V} = \bar{A}^T \bar{V}_n + \bar{E}, \quad \text{то}$$

$$\bar{A} \bar{G}(\bar{A}^T \bar{V}_n + \bar{E}) - \bar{A} \bar{J} = 0. \quad (I.I7)$$

В результате получена система нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\bar{F}(\bar{x}) = 0, \quad (I.I8)$$

$$[\bar{F}(\bar{x})]^T = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})).$$

Для решения таких систем используются итерационные численные методы, т.е. находится последовательность векторов  $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k+1}$ , сходящаяся к точному решению  $\bar{x}^*$ , при котором  $\bar{F}(\bar{x}^*) = 0$ . Вектор  $\bar{x}_0$  называется начальным приближением искомого решения, переход от  $\bar{x}_k$  к  $\bar{x}_{k+1}$  - итерацией, а способ перехода описывается итерационной формулой

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \Delta \bar{x}_k. \quad (I.I9)$$

Очевидно, что поисковая итерационная процедура должна обеспечивать последовательное приближение промежуточных решений  $\bar{x}$  к точному  $\bar{x}^*$ . Это возможно, если соответствующий вычислительный процесс - сходящийся, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \bar{x}^* .$$

В этом случае поиск заканчивается при выполнении условия

$$\| \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k \| < \varepsilon ,$$

где  $\varepsilon = 10^{-5} + 10^{-3}$  - малая заранее заданная величина, и качестве искомого решения принимается значение  $\bar{x}_{k+1}$ .

Если же вычислительный процесс не сходится, поиск прекращается, когда число итераций  $K$  достигает некоторого ограничения  $M$ :  $K \leq M$  (ограничение трудоемкости поиска).

Существуют несколько численных методов, используемых для решения системы (I.18) и работающих по описанной схеме. Они отличаются способом вычисления поправки  $\Delta \bar{x}_k$  в (I.19). Наиболее широкое применение получил метод Ньютона-Рафсона, в котором для вычисления поправки  $\Delta \bar{x}_k$  используется разложения  $\bar{f}(\bar{x}_{k+1})$  в ряд Тейлора в окрестностях точки  $\bar{x}_k$ :

$$f_1(\bar{x}_{k+1}) = f_1(\bar{x}_k) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} (x_{i(k+1)} - x_{ik}) + \dots$$

$$f_2(\bar{x}_{k+1}) = f_2(\bar{x}_k) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_i} (x_{i(k+1)} - x_{ik}) + \dots$$

⋮

$$f_n(\bar{x}_{k+1}) = f_n(\bar{x}_k) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial x_i} (x_{i(k+1)} - x_{ik}) + \dots$$

Если в разложениях пренебречь членами высоких порядков сформировать матрицу

$$M(\bar{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} .$$

которая называется матрицей Якоби, то можно получить следующее соотношение:

$$f(\bar{x}_{k+1}) = f(\bar{x}_k) + M(\bar{x}_k)(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) .$$

Для получения матрицы  $M(x)$  следует рассчитать производные

$$\frac{\partial f_1(\bar{x}_k)}{\partial x_1} \text{ в точке } \bar{x}_k .$$

Предположив, что приближение  $\bar{x}_{k+1}$  является достаточно хорошим, т.е.  $\bar{f}(\bar{x}_{k+1}) \approx 0$ , получаем

$$0 = \bar{f}(\bar{x}_k) + M(\bar{x}_k)(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) . \quad (I.20)$$

Решение этого уравнения относительно  $\bar{x}_{k+1}$  позволяет найти итерационную формулу, соответствующую методу Ньютона-Рафсона:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - M^{-1}(\bar{x}_k) \bar{f}(\bar{x}_k) . \quad (I.21)$$

Однако обращение матрицы Якоби требует значительных вычислительных затрат и используется лишь в частных случаях. На практике (I.20) преобразуется к итерационной формуле следующего вида:

$$M(\bar{x}_k) \bar{x}_{k+1} = M(\bar{x}_k) \bar{x}_k - \bar{f}(\bar{x}_k) , \quad (I.22)$$

что соответствует системе линейных уравнений относительно  $\bar{x}_{k+1}$ . Решение этой системы на каждой итерации дает последовательность

$\bar{x}_k$ , которая при правильном выборе начального приближения будет сходиться к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (I.20).

При формировании ММС с помощью метода узловых потенциалов была получена система нелинейных алгебраических уравнений (I.17). Если применить для ее решения итерационную формулу (I.22), то надо найти матрицу Якоби

$$M(\bar{V}_{nk}) = \frac{\partial}{\partial \bar{V}_n} \left[ A \cdot \bar{g}(A^T \bar{V}_n + E) - A\bar{J} \right] = \frac{\partial \bar{g}(\bar{V})}{\partial \bar{V}} \Big|_{\bar{V} = A^T \bar{V}_{nk} + E}$$

Обозначив матрицу дифференциальных проводимостей элементов на  $k$ -й итерации через  $Y_{Bk}$ , а вектор токов, протекающих через элементы,  $\bar{g}(\bar{V})$  через  $\bar{J}_{\alpha k}$ , можно записать итерационную формулу (I.22) в таком виде:

$$AY_{Bk} A^T \cdot \bar{V}_{n(k+1)} = AY_{Bk} A^T \bar{V}_{nk} - A\bar{J}_{\alpha k} + A\bar{J}$$

или

$$AY_{Bk} A^T \cdot \bar{V}_{n(k+1)} = A(Y_{Bk} A^T \bar{V}_{nk} - \bar{J}_{\alpha k} + \bar{J}) \quad (I.23)$$

Анализ системы уравнений (I.23) показывает, что в его левой части содержится матрица  $AY_{Bk} A^T$ , которая соответствует матрице проводимости узлов  $Y_{nk}$  и рекомендации по формированию которой даны в разделе I.2. В правой части уравнения произведение  $A^T \bar{V}_{nk}$  соответствует вектору напряжений на ветвях  $\bar{V}_{Bk}$ , а произведение  $Y_{Bk} \bar{V}_{Bk}$  дает вектор величин, которые можно трактовать как токи протекающие на  $k$ -м шаге через дифференциальные проводимости

$$\bar{J}_{dk} = Y_{Bk} A^T \bar{V}_{nk}$$

и уравнение (I.23) приобретает вид

$$Y_{nk} \bar{V}_{n(k+1)} = A(\bar{J}_{dk} - \bar{J}_{\alpha k} + \bar{J}) \quad (I.24)$$

Правая часть уравнения (I.24) соответствует вектору эквивалентных

источников тока  $\bar{J}_{nk} = A(\bar{J}_{dk} - \bar{J}_{\alpha k} + \bar{J})$ , рекомендации по формированию которого даны в разделе I.2. А итерационная формула приобретает окончательный вид системы нелинейных уравнений

$$Y_{nk} \bar{V}_{n(k+1)} = \bar{J}_{nk} \quad (I.25)$$

решение которой позволяет определять напряжения узлов схемы на каждой  $k$ -й итерации.

Таким образом, для проведения анализа схемы по постоянному току необходимо выполнить следующие действия:

- составить эквивалентную схему замещения по постоянному току, заменив активные элементы их нелинейными моделями;
- с помощью метода узловых потенциалов составить систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных напряжений узлов схемы;

решить систему методом Ньютона-Рафсона, выполняя итерации до тех пор, пока разница между двумя последовательными приближениями не окажется меньше некоторой заранее оговоренной величины;

полученные значения узловых напряжений использовать для определения токов через элементы и параметров малосигнальных схем замещения активных приборов, необходимых для проведения анализа схемы по переменному току.

#### I.4. Анализ переходных процессов

Анализ переходных процессов или анализ электронной схемы во временной области в общем случае включает в себя составление ММС в виде системы нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений и его численное решение. Поскольку выбор способа формирования этой системы обусловлен методами, которые будут использоваться при ее решении, целесообразно сначала рассмотреть основные методы численного решения дифференциальных уравнений или численного интегрирования.

**Численное интегрирование дифференциального уравнения.** Численное решение дифференциального уравнения

$$x' = f(x, t) \quad (I.26)$$

заключается в определении значений  $x(t)$  на интервале времени  $0 \dots T_{\text{инт}}$  при заданных начальных условиях  $x(0) = x_0$ , где  $T_{\text{инт}}$  - период интегрирования. При решении этой задачи на отрезке  $\{0, T_{\text{инт}}\}$  выделяется конечное число точек  $t_k$  - узлов интегрирования, в которых последовательно определяются значения  $x(t)$ :  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(T_{\text{инт}})$ . Интервал между двумя соседними узлами называется шагом интегрирования

$$h_k = t_{k+1} - t_k$$

В дальнейшем предполагается, что интегрирование проводится постоянным шагом, т.е.  $h_k = h$  при  $k = 1 \dots N$ .

Таким образом, процесс решения задачи сводится к нахождению для очередного момента времени  $t_{k+1}$  значения  $x_{k+1} = x(t_{k+1})$  по известным значениям  $x_{k+1-j}$  и  $x'_{k+1-j}$ , где  $j = 1 \dots p$  ( $p$  - количество предыдущих точек, информация о которых используется при интегрировании). Практическое применение в программах анализа САПР нашли линейные многошаговые методы интегрирования, которые позволяют найти  $x_{k+1}$  по следующему соотношению [5]

$$x_{k+1} = \sum_{j=1}^p a_j x_{k+1-j} + h \sum_{j=0}^p b_j x'_{k+1-j}$$

где  $h = \text{const}$  при  $j = 1 \dots p$ ;  $a_j, b_j$  - коэффициенты, значения которых определяются конкретным методом интегрирования. Особенности этих методов рассматриваются ниже для случая  $p=1$ , когда используется информация лишь об одной предыдущей точке:

$$x_{k+1} = a_1 x_k + h(b_0 x'_{k+1} + b_1 x'_k)$$

Методы численного интегрирования разделяются на явные и неявные. Явным методам соответствует условие  $b_0=0$ , при котором правых частях соотношений (1.28) или (1.29) будут только известные величины, относящиеся к предыдущим точкам. Поэтому  $x_{k+1}$  оказывается представленным в явном виде и может быть непосредственно вычислено. Для неявных методов  $b_0 \neq 0$ , неизвестные величины присутствуют в обеих частях рабочих соотношений, поэтому для нахождения  $x_{k+1}$  приходится решать уравнение (1.28) или (1.29).

**Явный или прямой метод Эйлера.** Решение уравнения (1.26) в общем случае имеет вид

$$x(t) = x(a) + \int_a^t f(x,t) dt$$

можно предположить, что известны начальные условия  $x(0) = x_0$  и что в течение времени шага  $h$  значение функции  $f(x,t)$  изменяется незначительно, на первом шаге значение  $x_1$  может быть найдено следующим образом

$$x(t_1=0+h_1) = x(0) + \int_0^h f(x,0) dt = x_0 + f(x_0,0) \cdot h$$

$$x_1 = x_0 + h x'_0$$

Поскольку  $x_0$  известно, а  $x'_0$  можно вычислить по (1.26), для нахождения  $x_1$  не нужно решать уравнение. Затем находят

$$x_{k+1} = x_k + h x'_k = x_k + h f(x_k, t_k), \tag{1.30}$$

которое называется прямой формулой Эйлера и может быть получено из (1.29) при условии  $a_1=b_1=1, b_0=0$ . На рис. 1.4 показано, что на каждом шаге интегрирования функция  $x(t)$  аппроксимируется отрезком прямой, совпадающим с касательной к  $x(t)$  в точке  $x_k$ . В результате ошибка вычисления возрастает при увеличении шага интегрирования  $h$ .

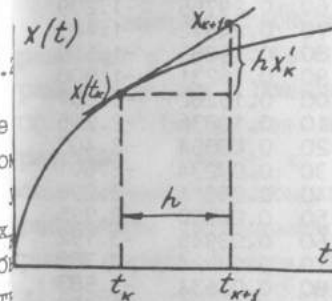


Рис. 1.4

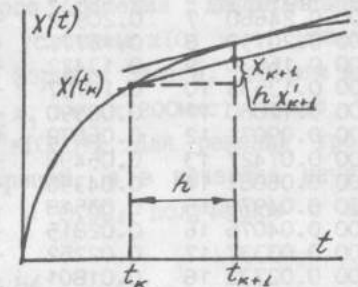


Рис. 1.5

**Пример I.2.**

Рассмотрим процесс численного решения дифференциального уравнения

$$x' = -1000x$$

с начальным условием  $x(0)=1$ . Такое уравнение описывает, например, процесс разряда конденсатора с емкостью 1 мкФ, заряженного напряжением 1 В, через резистор с сопротивлением 1 кОм. Решать уравнение будем с помощью прямой формулы Эйлера. Возьмем  $h=200$  мкс тогда

$$x(200 \text{ мкс}) = x_1 = 1 - 200 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 1 = 0.8$$

$$x(400 \text{ мкс}) = x_2 = 0.8 - 200 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 0.8 = 0.64$$
 и т.д.

Решение уравнения для различных значений шага интегрирования приведено в табл. I.1.

Таблица I.1

Результаты решения уравнения из примера I.2 с помощью прямой формулы Эйлера с шагом  $h = 200$  мкс и с шагом  $h = 20$  мкс.

T	$x_{\text{точное}}$	h=200 мкс			h = 20 мкс		
		номер шага	x	ошибка %	номер шага	x	ошибка %
0.200	0.81873	1	0.80000	-2.288	10	0.81707	-0.202
0.400	0.67032	2	0.64000	-4.523	20	0.66761	-0.405
0.600	0.54881	3	0.51200	-6.708	30	0.54548	-0.606
0.800	0.44933	4	0.40960	-8.842	40	0.44570	-0.808
1.000	0.36788	5	0.32768	-10.927	50	0.36417	-1.008
1.200	0.30119	6	0.26214	-12.965	60	0.29755	-1.209
1.400	0.24660	7	0.20972	-14.956	70	0.24312	-1.409
1.600	0.20190	8	0.16777	-16.902	80	0.19865	-1.608
1.800	0.16530	9	0.13422	-18.803	90	0.16231	-1.808
2.000	0.13534	10	0.10737	-20.661	100	0.13262	-2.007
2.200	0.11080	11	0.08590	-22.476	110	0.10836	-2.205
2.400	0.09072	12	0.06872	-24.249	120	0.08854	-2.403
2.600	0.07427	13	0.05498	-25.982	130	0.07234	-2.601
2.800	0.06081	14	0.04398	-27.676	140	0.05911	-2.798
3.000	0.04979	15	0.03518	-29.330	150	0.04830	-2.995
3.200	0.04076	16	0.02815	-30.947	160	0.03946	-3.192
3.400	0.03337	17	0.02252	-32.527	170	0.03224	-3.388
3.600	0.02732	18	0.01801	-34.071	180	0.02634	-3.583
3.800	0.02237	19	0.01441	-35.579	190	0.02153	-3.779
4.000	0.01832	20	0.01153	-37.053	200	0.01759	-3.974

**Неявный или обратный метод Эйлера.** Соотношение (1.29) условия  $b_0 = a_1 = 1, b_1 = 0$  дает обратную формулу Эйлера (рис. I.5)

$$x_{k+1} = x_k + hx'_k = x_k + hf(x_k, t_k). \quad (I.31)$$

которая представляет собой алгебраическое уравнение относительно известной  $x_{k+1}$ . На каждом шаге интегрирования приходится решать уравнение одним из известных итерационных методов. Например, пользуясь методом простой итерации с начальным приближением на  $(k+1)$ -ом шаге  $x_{k+1}^{(0)}$  и итерационной формулой (1.31), можно найти последовательность приближений:

$$x_{k+1}^{(1)} = x_k + hf(x_{k+1}^{(0)}, t_{k+1}); \quad x_{k+1}^{(2)} = x_k + hf(x_{k+1}^{(1)}, t_{k+1})$$

и так далее до тех пор, пока не выполнится условие

$$|x_{k+1}^{(n+1)} - x_{k+1}^{(n)}| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  - малая величина ( $\varepsilon = 10^{-5} + 10^{-3}$ ).

В качестве начального приближения  $x_{k+1}^{(0)}$  целесообразно использовать значение  $x_{k+1}$ , полученное по прямой формуле Эйлера.

Определение значений  $x(t)$  с помощью прямой, экстраполирующей формулы Эйлера называется прогнозом, а процесс их уточнения с помощью обратной формулы - коррекцией. Таким образом, явный метод Эйлера использует формулу прогноза, а неявный - формулу коррекции.

**Пример I.3.**

Рассмотрим процесс численного решения дифференциального уравнения  $x' = -1000x$  с начальным условием  $x(0) = 1$ . Решать это уравнение будем с помощью обратной формулы Эйлера. Возьмем шаг  $h = 200$  мкс. Тогда для нахождения  $x_1 = x(200 \text{ мкс})$  нужно решать уравнение  $x_1 = x_0 - 200 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot x_1$ . Для решения уравнения воспользуемся методом простых итераций, а в качестве начального приближения  $x_1^{(0)}$  возьмем  $x(200 \text{ мкс}) = 0.80$ , полученное с помощью прямой формулы Эйлера. Тогда

$$x_1^{(1)} = x_0 - 200 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 0.8 = 0.84;$$

$$x_1^{(2)} = 0.8320; \quad x_1^{(3)} = 0.83360; \quad x_1^{(4)} = 0.83328;$$

$$x_1^{(5)} = 0.83334.$$

Решение уравнения для различных значений шага интегрирования  $h$  приведены в табл. I.2.



Таблица I.2

Результаты решения уравнения из примера I.3 с помощью обратной формулы Эйлера с шагом  $h = 200$  мкс и с шагом  $h = 20$  мкс.

T	$x_{\text{точное}}$	h=200 мкс			h=20 мкс		
		номер шага	x	ошибка %	номер шага	x	ошибка %
0.200	0.81873	1	0.83328	1.777	10	0.82041	0.206
0.400	0.67032	2	0.69436	3.586	20	0.67308	0.412
0.600	0.54881	3	0.57859	5.426	30	0.55220	0.618
0.800	0.44933	4	0.48213	7.300	40	0.45304	0.825
1.000	0.36788	5	0.40175	9.207	50	0.37168	1.032
1.200	0.30119	6	0.33477	11.147	60	0.30493	1.240
1.400	0.24660	7	0.27896	13.123	70	0.25017	1.448
1.600	0.20190	8	0.23245	15.133	80	0.20524	1.657
1.800	0.16530	9	0.19370	17.179	90	0.16838	1.866
2.000	0.13534	10	0.16140	19.261	100	0.13814	2.075
2.200	0.11080	11	0.13449	21.380	110	0.11333	2.285
2.400	0.09072	12	0.11207	23.537	120	0.09298	2.495
2.600	0.07427	13	0.09339	25.733	130	0.07628	2.706
2.800	0.06081	14	0.07782	27.967	140	0.06258	2.917
3.000	0.04979	15	0.06484	30.241	150	0.05134	3.128
3.200	0.04076	16	0.05403	32.555	160	0.04212	3.340
3.400	0.03337	17	0.04502	34.911	170	0.03456	3.553
3.600	0.02732	18	0.03752	37.308	180	0.02835	3.765
3.800	0.02237	19	0.03126	39.748	190	0.02326	3.979
4.000	0.01832	20	0.02605	42.232	200	0.01908	4.192

**Метод трапеций.** Если в (I.29) положить  $a_1=I$  и  $b_0=b_1=0$  то будет получена так называемая формула трапеций

$$x_{k+1} = x_k + 0,5h(x'_{k+1} + x'_k)$$

Ее анализ показывает, что она является формулой корректной т.к. на каждом шаге для определения  $x_{k+1}$  приходится решать уравнение.

**Пример I.4.**

Рассмотрим процесс численного решения дифференциального уравнения  $x' = -1000x$  с начальным условием  $x(0) = 1$ . Решать уравнение будем с помощью формулы трапеций. Возьмем шаг  $h = 200$  мкс. Тогда для нахождения  $x_1 = x(200 \text{ мкс})$  нужно решить уравнение  $x_1 = x_0 - 0,5 * 200 * 10^{-6} * 1000 * (x_1 + x_0)$ . Для решения уравнения воспользуемся методом простых итераций, а в качестве начального приближения  $x_1^{(0)}$  возьмем  $x(200 \text{ мкс}) = 0,80$ , полученное

с помощью прямой формулы Эйлера. Тогда

$$x_1^{(1)} = 1 - 1/2 * 200 * 10^{-6} * 1000 * (1 + 0,8) = 0,82;$$

$$x_1^{(2)} = 0,8180; \quad x_1^{(3)} = 0,81820; \quad x_1^{(4)} = 0,81818.$$

Результаты решения уравнения для различных значений шага интегрирования  $h$  приведены в табл. I.3.

Таблица I.3

Результаты решения уравнения из примера I.4 с помощью формулы трапеций с шагом  $h = 200$  мкс и с шагом  $h = 20$  мкс.

$x_{\text{точное}}$	номер шага	h=200 мкс			номер шага	x	ошибка %
		x	ошибка %	номер шага			
0.81873	1	0.81820	-0.065	10	0.81873	-0.001	
0.67032	2	0.66945	-0.130	20	0.67031	-0.001	
0.54881	3	0.54774	-0.194	30	0.54880	-0.002	
0.44933	4	0.44816	-0.259	40	0.44932	-0.002	
0.36788	5	0.36669	-0.324	50	0.36787	-0.003	
0.30119	6	0.30002	-0.388	60	0.30118	-0.003	
0.24660	7	0.24548	-0.453	70	0.24659	-0.003	
0.20190	8	0.20085	-0.517	80	0.20189	-0.004	
0.16530	9	0.16434	-0.582	90	0.16529	-0.004	
0.13534	10	0.13446	-0.646	100	0.13533	-0.004	
0.11080	11	0.11002	-0.711	110	0.11080	-0.005	
0.09072	12	0.09001	-0.775	120	0.09071	-0.005	
0.07427	13	0.07365	-0.840	130	0.07427	-0.006	
0.06081	14	0.06026	-0.904	140	0.06081	-0.006	
0.04979	15	0.04931	-0.968	150	0.04978	-0.007	
0.04076	16	0.04034	-1.032	160	0.04076	-0.007	
0.03337	17	0.03301	-1.096	170	0.03337	-0.007	
0.02732	18	0.02701	-1.161	180	0.02732	-0.008	
0.02237	19	0.02210	-1.225	190	0.02237	-0.009	
0.01832	20	0.01808	-1.289	200	0.01831	-0.009	

**Сравнение методов численного интегрирования.** Основные

характеристики методов интегрирования, от которых зависит их эффективность, - точность и устойчивость методов, а также связанная с ними стратегия выбора величины шага интегрирования.

Точность интегрирования оценивается полной ошибкой (погрешностью)  $\epsilon_{\text{ПК}}$  на каждом шаге. Полная ошибка интегрирования  $k$ -м шаге содержит три основных составляющих [5]:

ошибку аппроксимации  $\epsilon_{\text{ак}}$ , связанную с заменой производных конечно-разностными выражениями;

ошибку вычислений  $\epsilon_{\text{вк}}$ , связанную с ошибками округления чисел в ЭВМ и заменой неарифметических операций и функций арифметическими при вычислении  $x_{k+1}$ ;

ошибку накопления  $\epsilon_{\text{нк}}$ , равную полной ошибке на предыдущем

шаге  $\epsilon_{n(k+1)}$ .

Практика показывает, что ошибка вычисления, как правило, и ею можно пренебречь. Накопленная ошибка  $\epsilon_{нк}$  не может быть оценена, так как неизвестно точное решение уравнения. Мы говорим только о характере поведения  $\epsilon_{нк}$ . Такая оценка связана с оценкой устойчивости методов интегрирования и будет рассмотрена ниже.

Ошибка аппроксимации равна разности между точным решением  $x(t_{k+1})$  и численным решением  $x_{k+1}$ , полученным по формуле интегрирования

$$\epsilon_{ак} = x(t_{k+1}) - x_{k+1}.$$

Таким образом, при сравнении различных методов численного интегрирования по точности возможно учесть только погрешность аппроксимации (I.33). Точное решение  $x(t_{k+1})$  при малом шаге интегрирования можно определить, разлагая  $x(t)$  в ряде Тейлора в окрестностях точки  $t_k$ :

$$x(t_{k+1}) = x_k + \frac{h}{1!} x'_k + \frac{h^2}{2!} x''_k + \frac{h^3}{3!} x'''_k + \dots$$

А формулы численного интегрирования аппроксимируют этот ряд, отсекая его. Поэтому при оценке методов используется понятие порядка точности. Порядком точности  $p$  метода интегрирования называется порядок производной в том члене ряда Тейлора, которого формула интегрирования аппроксимирует ряд.

Для явного метода Эйлера, согласно (I.30),

$$x_{k+1} = x_k + hx'_k \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ак} &= x_k + hx'_k + \frac{h^2}{2!} x''_k + \frac{h^3}{3!} x'''_k + \dots - x_k - hx'_k = \\ &= \frac{h^2}{2!} x''_k + \frac{h^3}{3!} x'''_k + \dots \approx 0,5h^2 x''_k, \end{aligned}$$

т.е. при наличии у искомой функции  $x(t)$  второй производной, отличной от нуля, применение прямой формулы Эйлера дает ошибку пропорциональную  $0,5h^2$ . Эта формула безошибочно восстанавливает полином первой степени, а для других функций дает ошибку пропорциональную квадрату шага. Следовательно, явный метод Эйлера

имеет первый порядок точности ( $p=1$ ) и ошибку усечения, пропорциональную  $0,5h^2$ .

Для неявного метода Эйлера  $x_{k+1} = x_k + hx'_{k+1}$ . Учитывая,

$$x'(t_{k+1}) = x'_k + hx''_k + \frac{h^2}{2!} x'''_k + \frac{h^3}{3!} x''''_k + \dots, \text{ можно}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ак} &= hx'_{k+1} + \frac{h^2}{2!} x''_{k+1} + \frac{h^3}{3!} x'''_{k+1} + \dots - \\ &= hx'_k + h^2 x''_k + \frac{h^3}{3!} x'''_k + \dots - \\ &= 0,5h^2 x''_k - \frac{h^3}{3!} x'''_k - \dots \approx 0,5h^2 x''_k. \end{aligned} \quad (I.35)$$

Обратная формула Эйлера также имеет порядок точности  $p=1$  и ошибку усечения, пропорциональную  $(-0,5h^2)$ .

И, наконец, для метода трапеций

$$x_{k+1} = x_k + 0,5h(x'_k + x'_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ак} &= x_k + hx'_k + \frac{h^2}{2!} x''_k + \frac{h^3}{3!} x'''_k + \dots - \\ &= x_k + \frac{h}{2} x'_k + \frac{h}{2} x'_k + \frac{h^2}{2} x''_k - \frac{h^3}{4} x'''_k - \dots \approx \\ &= \frac{h^3}{12} x'''_k. \end{aligned} \quad (I.36)$$

Формула трапеций имеет второй порядок точности и ошибку усечения, пропорциональную  $(-\frac{1}{12}h^3)$ . Полученные оценки точности хорошо согласуются с результатами примеров I.2-I.4.

**Устойчивость методов численного интегрирования.** Устойчивость методов численного интегрирования связана с характером изменения накопленной погрешности  $\epsilon_{нк}$ : если она в процессе интегрирования не возрастает, то используемый метод численно устойчив; если даже в небольших ошибках аппроксимации или вычислений  $\epsilon_{нк}$  растет от

шага к шагу, то метод будет неустойчивым при данных величинах шагов, а результаты вычислений окажутся бесполезными, так как будут сильно искажены.

Устойчивость связана также с характером решаемой задачи. В частности, с обусловленностью системы дифференциальных уравнений математической модели схемы. В теоретическом плане устойчивость исследуется на линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\bar{V}' = A\bar{V}, \quad \bar{V}_0 \neq 0,$$

где  $A$  - постоянная действительная матрица размером  $n \times n$ .

Если метод интегрирования будет неустойчив для системы (I.37), то он, как правило, окажется неустойчивым и для системы

$$\bar{V}' = F(\bar{V}, t).$$

Учитывая, что матрицу Якоби, соответствующую вектор-функции  $F(\bar{V})$ , в пределах шага интегрирования можно считать квазипостоянной, т.е.  $M_k = \left[ \frac{\partial F}{\partial \bar{V}} \right]_{t=t_k} \approx A$ , допускается распространить результаты исследования устойчивости, полученные для (I.37), и на большинство нелинейных систем.

Аналитическое решение системы (I.37) представляет собой фундаментальных решений

$$V(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \bar{x}_i,$$

где  $C_i$  - постоянные коэффициенты;

$\lambda_i$  - собственные значения матрицы  $A$ , т.е. корни характеристического уравнения  $\det(A - \lambda I) = 0$ ;

$I$  - единичная матрица.

В общем случае  $\lambda_i$  - комплексные величины, т.е.

$$\lambda_i = \text{Re}(\lambda_i) + j\text{Im}(\lambda_i).$$

Каждое фундаментальное решение характеризует отклик системы на внешнее воздействие. Если  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  для  $i=1, \dots, n$ , то фундаментальные решения будут иметь затухающий характер. Если хотя бы одно  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ , то  $i$ -ая компонента для каждой переменной в (I.38) будет неограниченно возрастать и решение системы

будет неустойчивым. Если  $\text{Im}(\lambda_i) = 0$  для всех  $i$ , то переходные процессы носят апериодический характер. Если  $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$ , то каждая переменная  $V_i(t)$  в (I.38) будет содержать экспоненциально затухающую синусоидальную компоненту  $C_i \sin(\text{Im}(\lambda_i) * t + \varphi_i) \exp(\text{Re}(\lambda_i) * t)$ .

Таким образом, собственные значения матрицы  $A$  или  $M$  характеризуют переходные процессы моделируемого объекта: устойчивость, наличие осцилляций, в то же время они определяют и математические свойства модели. Считают, что система обыкновенных дифференциальных уравнений плохо обусловлена (или жесткая), если

$$g = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|} \gg 1, \quad (I.39)$$

$g$  - число обусловленности матрицы  $A$ .

Численно систему считают жесткой, если  $g > 10^5$ .

В частном случае, когда  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  для  $i=1, \dots, n$ , фундаментальные решения затухают при увеличении  $t$  со скоростью, пропорциональной

$$\tau_i = -1 / \text{Re}(\lambda_i), \quad (I.40)$$

называемой постоянной времени системы.

При исследовании устойчивости метода решения системы (I.37) используют известное преобразование подобия  $A = T \text{diag}(\lambda_i)$ , где  $T$  - некоторая преобразующая матрица,  $\text{diag}(\lambda_i)$  - диагональная матрица с значениями  $\lambda_i$  на диагонали. Это позволяет преобразовать (I.37) в набор несвязанных линейных уравнений вида  $x' = \lambda_i x_i$ ,  $i=1, \dots, n$  и исследовать устойчивость методов численного интегрирования на тестовом уравнении

$$x' = \lambda x, \quad (I.41)$$

решение которого имеет вид

$$x(t) = x(0) e^{\lambda t}. \quad (I.42)$$

Явный метод Эйлера предлагает для численного интегрирования (I.41) прямую формулу (I.30), согласно которой

$$x_{k+1} = x_k + h x'_k = x_k + h \lambda x_k = x_k (1 + h \lambda).$$

где на первом шаге  $x_1 = x_0 (1 + h \lambda)$ ,

на втором шаге  $x_2 = x_1 (1 + h \lambda) = x_0 (1 + h \lambda)^2$ ,

на k-м шаге  $x_k = x_0(1 + h\lambda)^k$ .

Метод будет устойчивым, если при увеличении k результат будет ограничен. А для этого необходимо выполнение условия

$$|1 + h\lambda| \leq 1$$

Так как  $\lambda$  - комплексное число, а  $h$  - действительное,  $h\lambda = U + jV$  и

$$|1 + U + jV| \leq 1$$

или  $(1 + U)^2 + V^2 \leq 1$ .

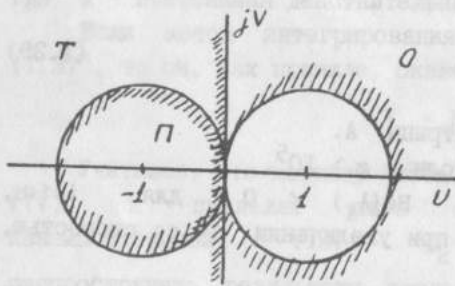


Рис. I.6

Соотношение (I.47) описывает область устойчивости, которая лежит вне круга единичного радиуса с центром в точке (-1, 0). Область П на рис. I.6. Поэтому при  $Re(\lambda) < 0$   $h$  следует выбирать так, чтобы точка  $h\lambda = U + jV$  попадала внутрь круга.

при больших  $|\lambda|$  накладывает жесткое ограничение на величину шага. В том случае, когда  $\lambda$  действительное отрицательное, условие устойчивости будет иметь вид  $h < 2\tau$ . Для системы дифференциальных уравнений это условие сводится к виду

$$h \leq 2\tau_{min} \quad (I.48)$$

где  $\tau_{min}$  - минимальная постоянная времени системы.

Ограничение шага интегрирования, обусловленное устойчивостью, является серьезным недостатком. Так как период интегрирования  $T_{инт}$  является аperiodического переходного процесса определяет максимальную постоянную времени системы и равно приблизительно  $(2+3)\tau_{max}$ , то число шагов интегрирования

$$N \geq \frac{(2+3)\tau_{max}}{2\tau_{min}} = (I.49)$$

становится слишком большим для плохо обусловленных систем. Поэтому практически явные методы для расчета таких систем не применяются.

Неявный метод Эйлера предполагает использование для численного интегрирования обратной формулы (I.31)

$$x_{k+1} = x_k + hx'_{k+1} = x_k + h\lambda x_{k+1}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{1 - h\lambda}$$

где на первом шаге  $x_1 = \frac{x_0}{1 - h\lambda}$  ;

на втором шаге  $x_2 = \frac{x_1}{1 - h\lambda} = \frac{x_0}{(1 - h\lambda)^2}$  ;

на k-м шаге  $x_k = \frac{x_0}{(1 - h\lambda)^k}$  . (I.47)

Для обеспечения ограниченности решения (I.47) при любых k

требуется, чтобы  $\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| \leq 1$  или, с учетом комплексного

характера  $\lambda$   $\left| \frac{1}{1 - U - jV} \right| \leq 1$ , т.е.

$$(1 - U)^2 + V^2 \geq 1. \quad (I.48)$$

Соотношению (I.48) соответствует область вне круга единичного радиуса с центром в точке (1, 0) (область О на рис. I.6). Анализ условия (I.48) показывает, что для любых устойчивых дифференциальных уравнений ( $Re(\lambda) < 0$ ) обратная формула Эйлера дает устойчивое (ограниченное) решение и величина шага интегрирования ограничивается только требуемой точностью интегрирования. Однако в общем случае получение ограниченного решения не гарантирует сходимости истинного решения, так как существует значительная область  $Re(\lambda) > 0$ , в которой обратная формула Эйлера дает ограниченное решение.

Наконец, для метода трапеций  $x_{k+1} = x_k + 0,5h\lambda(x_k + x_{k+1})$

$$x_{k+1} = \left( \frac{I + 0,5h\lambda}{I - 0,5h\lambda} \right) x_k.$$

Для первого шага  $x_1 = \frac{I + 0,5h\lambda}{I - 0,5h\lambda} x_0$ ;

для второго шага  $x_2 = \frac{I + 0,5h\lambda}{I - 0,5h\lambda} x_1 = \left( \frac{I + 0,5h\lambda}{I - 0,5h\lambda} \right)^2 x_0$ ;

для k-го шага  $x_k = \left( \frac{I + 0,5h\lambda}{I - 0,5h\lambda} \right)^k x_0$ .

Условие ограниченности решения (I.49) имеет вид

$$\left| \frac{I + 0,5h\lambda}{I - 0,5h\lambda} \right| \leq I$$

или

$$\left| \frac{2 + U + jV}{2 - U + jV} \right| \leq I.$$

Преобразуя это выражение

$$(2 + U)^2 + V^2 \leq (2 - U)^2 + V^2;$$

$$4 + 2U + U^2 + V^2 - 4 + 2U - U^2 - V^2 \leq 0,$$

можно получить условие устойчивости

$$4U \leq 0,$$

которое описывает левую полуплоскость (область T) на рис. I. Следовательно, метод трапеций дает сходящееся решение для устойчивых дифференциальных уравнений и расходящееся для неустойчивых.

### Пример I.5.

Рассмотрим процесс численного решения дифференциального уравнения  $x' = -1000x$  с начальным условием  $x(0) = 1$ . Решать уравнение будем с шагом, превышающим устойчивый для прямой форму-

лы Эйлера. Решение уравнения для шага интегрирования  $h = 2100$  мкс и шага  $h = 3000$  мкс приведены в табл. I.4 и табл. I.5. В таблицах приняты следующие обозначения:  $x_{пр}$  - решение дифференциального уравнения, полученное с помощью прямой формулы Эйлера;  $x_{обр}$  - решение, полученное с помощью обратной формулы Эйлера;  $x_{тр}$  - решение, полученное с помощью формулы трапеций.

Таблица I.4

Результаты решения уравнения из примера I.5  
с шагом  $h = 2100$  мкс

N шага	T	$x_{\text{точное}}$	$x_{\text{пр}}$	$x_{\text{обр}}$	$x_{\text{тр}}$
1	2.100	0.12246	-1.10000	0.32258	-.02439
2	4.200	0.01500	1.21000	0.10406	0.00059
3	6.300	0.00184	-1.33100	0.03357	-.00001
4	8.400	0.00022	1.46410	0.01083	0.00000
5	10.500	0.00003	-1.61051	0.00349	-.00000
6	12.600	0.00000	1.77156	0.00113	0.00000
7	14.700	0.00000	-1.94872	0.00036	-.00000
8	16.800	0.00000	2.14359	0.00012	0.00000
9	18.900	0.00000	-2.35795	0.00004	-.00000
10	21.000	0.00000	2.59374	0.00001	0.00000

Таблица I.5

Результаты решения уравнения из примера I.5  
с шагом  $h = 3000$  мкс

N шага	T	$x_{\text{точное}}$	$x_{\text{пр}}$	$x_{\text{обр}}$	$x_{\text{тр}}$
1	3.000	0.04979	-2.00000	0.25000	-.20000
2	6.000	0.00248	4.00000	0.06250	0.04000
3	9.000	0.00012	-8.00000	0.01563	-.00800
4	12.000	0.00001	16.00000	0.00391	0.00160
5	15.000	0.00000	-32.00000	0.00098	-.00032
6	18.000	0.00000	64.00000	0.00024	0.00006
7	21.000	0.00000	-128.00000	0.00006	-.00001
8	24.000	0.00000	256.00000	0.00002	0.00000
9	27.000	0.00000	-512.00000	0.00000	-.00000
10	30.000	0.00000	1024.00000	0.00000	0.00000

### Особенности автоматизированного анализа переходных процессов.

На практике получение математической модели схемы в виде  $\bar{x}' = f(\bar{x}, t)$  - весьма трудоемкий процесс, соизмеримый по затратам времени с процессом ее анализа. В то же время для линейных схем ММС может быть легко получена в форме

$$G\bar{x} + C\bar{x}' = w,$$

где  $G$  и  $C$  – квадратные матрицы коэффициентов;  
 $w$  – вектор токов и напряжений независимых источников.

Для ее анализа применяются рассмотренные выше методы численного интегрирования, которые в векторном виде выглядят так:

прямая формула Эйлера  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h\bar{x}'_k$ ;

обратная формула Эйлера  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h\bar{x}'_{k+1}$ ;

формула трапеций  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + 0,5h(\bar{x}'_k + \bar{x}'_{k+1})$ .

Применение прямой формулы Эйлера выгодно, если система дифференциальных уравнений представлена в явном виде. Затраты времени при определении  $\bar{x}_{k+1}$  на каждом шаге малы. Рассматриваемая система имеет неявный вид, поэтому на каждом шаге придется решать систему линейных уравнений. Использование прямой формулы не дает выигрыша по затратам времени на каждом шаге, может дать проигрыш по числу шагов, так как на величину шага наложены жесткие ограничения (I.44) или (I.45). Следовательно, применение этой формулы при анализе (I.51) не имеет смысла.

Если умножить обратную формулу Эйлера на матрицу  $C$

$$C\bar{x}_{k+1} = C\bar{x}_k + hC\bar{x}'_{k+1}$$

и подставить в нее преобразованную ММС (I.51)

$$C\bar{x}' = w - G\bar{x},$$

то

$$(C + hG)\bar{x}_{k+1} = C\bar{x}_k + h w_{k+1}, \quad (I.52)$$

Аналогично для формулы трапеций

$$(C + 0,5hG)\bar{x}_{k+1} = (C - 0,5hG)\bar{x}_k + 0,5h(w_{k+1} + w_k) \quad (I.53)$$

(I.52) и (I.53) представляют собой системы линейных алгебраических уравнений относительно  $\bar{x}_{k+1}$ . решив которые, можно получить искомые напряжения узлов и токи ветвей.

Далее рассматривается процедура получения ММС в виде (I.51). Используется самый простой для понимания, хотя и самый громоздкий табличный метод. Согласно этому методу в ММС включаются уравнения Кирхгофа для токов, компонентные уравнения и уравнения

связывающие напряжения на ветвях с узловыми напряжениями. Предполагается, что электронная схема содержит  $b$  ветвей и  $(n+1)$  узлов и ей соответствует матрица инцидентий  $A$ . Систему уравнений можно составлять для изображений токов и напряжений  $I(p)$  и  $U(p)$ . Переход от такой системы к системе дифференциально-алгебраических уравнений весьма прост: достаточно заменить изображения их переменными функциями, а переменную  $p$  – оператором  $d/dt$ .

Составляющие ММС уравнения представляются в следующем виде: уравнения Кирхгофа для токов  $A I_B = 0$ ,

$I_B$  – вектор изображений токов ветвей;

уравнения, связывающие напряжения ветвей с узловыми напряжениями  $V_B - A^t V_n = 0$ ,

$V_B$  – вектор изображений напряжений ветвей,

$V_n$  – вектор изображений напряжений узлов;

компонентные уравнения в общем случае  $Y_B V_B + z_B I_B = W_B$ .

В таблице I.6 приведены компонентные уравнения и значения  $z_B$  и  $w_B$  для некоторых элементов.

Таблица I.6

Элемент	Компонентное уравнение	$Y_B$	$z_B$	$w_B$
Сопротивление	$V_B - R_B I_B = 0$	1	$-R_B$	0
Проводимость	$G_B V_B - I_B = 0$	$G_B$	-1	0
Емкость	$p C_B V_B - I_B = 0$	$p C_B$	-1	0
Индуктивность	$V_B - p L_B I_B = 0$	1	$-p L_B$	0
Источник напряжения	$V_B = E_B$	1	0	$E_B$
Источник тока	$I_B = J_B$	0	1	$J_B$

Таким образом, ММС формируется в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_B - \mathbf{A}^t \mathbf{V}_n = 0 \\ \mathbf{Y}_B \mathbf{V}_B + \mathbf{z}_B \mathbf{I}_B = \mathbf{W}_B \\ \mathbf{A} \mathbf{I}_B = 0 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{array}{c|ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{m} \\ \xrightarrow{m} \\ \xrightarrow{n} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{m} \\ \xrightarrow{m} \\ \xrightarrow{n} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{n} \\ \xrightarrow{m} \\ \xrightarrow{n} \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ m \\ n \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -\mathbf{A}^t \\ \mathbf{Y}_B & \mathbf{z}_B & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & 0 \end{array} & \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_B \\ \mathbf{I}_B \\ \mathbf{V}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W}_B \\ 0 \end{bmatrix} & (I.55) \end{array}$$

Можно показать, что ММС (I.54)-(I.55) эквивалентна (I.51). Для этого надо ввести вектор  $\bar{x}$ , содержащий изображения напряжений и токов ветвей и напряжений узлов

$$\bar{x}^t = \left\{ \mathbf{V}_B^t, \mathbf{I}_B^t, \mathbf{V}_n^t \right\},$$

и с его помощью преобразовать (I.55) к виду

$$\mathbf{T} \bar{x} = \bar{W}_B.$$

Учитывая, что часть элементов матрицы  $\mathbf{T}$  умножается на  $\frac{d}{dt}$ , можно представить (I.56) так

$$(\mathbf{G} + p\mathbf{C}) \bar{x} = \bar{W}_B.$$

а затем от изображений токов и напряжений перейти к функциям во времени, получить вектор  $\bar{x}^t(t) = \left\{ \mathbf{U}_B^t(t), \mathbf{I}_B^t(t), \mathbf{U}_n^t(t) \right\}$  и

$$\left[ \mathbf{G} + \mathbf{C} \frac{d}{dt} \right] \bar{x} = \bar{W}_B$$

или

$$\mathbf{G} \bar{x} + \mathbf{C} \dot{\bar{x}} = \bar{W}_B.$$

Таким образом, ММС вида (I.54)-(I.55) тождественна ММС (I.51) и может быть быстро сформирована.

## 2. ПОЛУЧЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РЭУ С ПОМОЩЬЮ АКТИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

### 2.1. Постановка задачи

Задачи параметрического синтеза РЭУ решаются, как правило, с помощью многократного анализа математической модели устройства. Поэтому важное значение приобретает не только адекватность и универсальность используемой модели, но и ее экономичность, то есть затраты вычислительных ресурсов. Именно экономичность часто является решающим фактором при выборе модели. Одним из возможных вариантов "экономичной" модели является полином.

На практике широко используется степенной полином следующего вида:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=1}^n \beta_{il} x_i x_l + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 + \dots \quad (2.1)$$

Разложение функции  $y=f(\bar{x})$  в такой степенной ряд эквивалентно представлению ее рядом Тейлора в окрестностях точки  $\bar{x}_0$ :

$$\beta_0 = f(\bar{x}_0); \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}; \quad \beta_{il} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l}; \quad \beta_{ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{и т.д.}$$

Полиномиальная модель вида (2.1) обладает рядом особенностей. Наиболее полезные из них, с точки зрения инженера-разработчика, следующие. Во-первых, свойство аддитивности полинома позволяет повышать точность модели, добавляя к ней новые члены, как степенные (повышение степени полинома), так и содержащие новые переменные. Это невозможно сделать при использовании моделей других видов. Во-вторых, по полиному достаточно легко определить степень влияния любого из первичных параметров на выходной. В-третьих, можно формировать полиномиальную модель для некоторой, специально выделенной совокупности параметров, представляющих наибольший интерес для разработчика РЭУ. Например, для параметров, управляющих работой РЭУ и находящихся в различных блоках устройства. И, наконец, полиномиальная модель экономична. Она требует существенно меньших вычислительных затрат по сравнению с другими моделями. Так, при анализе режимов работы электронных схем по математическим моделям, полученным традиционными методами, решается система из  $m$

уравнений, где  $(m+1)$  - число узлов схемы. Для решения таких систем используется метод Гаусса, который без учета разреженности матрицы требует  $N_{\Gamma} = 2(m^3/3 + 2m)$  операций. Применение табличного метода Гаусса, учитывающего разреженность матрицы проводимости и минимизирующего появление вторичных ненулевых элементов, позволяет сократить число операций до  $N_{\Gamma\Gamma} = m(2q^2 + 5q)$ , где  $q$  - среднее количество ненулевых элементов в строках итоговой оптимально переупорядоченной матрицы справа от диагонали. В случае же использования полиномиальной модели количество операций требуемых для вычисления значения выходного параметра РЭУ  $N = dn + 1 + n!/(2(n-2)!)$ , где  $d$  - степень полинома,  $n$  - число первичных параметров, оказывающих существенное влияние на выходной. В реальных РЭУ их число, как правило, не превышает (10-20)% от общего числа элементов схемы.

Например, для усилителя записи кассетного магнитофона эквивалентная схема которого содержит 27 узлов и 72 ветви, число операций при анализе одного варианта  $N_{\Gamma} = 13230$  и  $N_{\Gamma\Gamma} = 900$ . Количество параметров, существенно влияющих на коэффициенты передачи и включенных в полиномиальную модель, оказалось равно (менее 10%), а число операций  $N_{\Pi} = 64$  для полинома шестой степени. Очевидно, что применение полиномиальной модели в этом случае дает значительный выигрыш.

Задача формирования полиномиальной модели РЭУ заключается в выборе вида полинома и определении его коэффициентов.

Для получения полиномиальных моделей в виде степенных рядов используют эксперимент, в ходе которого изменяют значения первичных параметров объекта  $\bar{x}_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и определяют соответствующие значения выходного параметра  $y_{\alpha j}$ ,  $j = \overline{1, N}$ , где  $N$  - число опытов, которым соответствуют различные состояния объекта. Затем обрабатывают результаты эксперимента и находят величины  $B_0, B_1, B_{11}, \dots$  и т.д., которые являются экспериментальными оценками теоретических коэффициентов полинома (2.1):  $\beta_0, \beta_1, \beta_{11}, \dots$ . Они позволяют сформировать модель

$$y_{\Pi} = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=i+1}^n B_{il} x_i x_l + \sum_{i=1}^n B_{ii}^2 x_i^2 + \dots, \quad (2)$$

где  $y_{\Pi}$  - значение выходного параметра, вычисленное

полиномиальной модели. Существует много разнообразных методов обработки результатов эксперимента. Каждый из них позволяет в той или иной степени уменьшить разности между значениями выходного параметра, найденными в эксперименте  $y_{\alpha j}$  и вычисленными по полиному  $y_{\Pi j}$ . Такая разность называется невязкой

$$\xi_j = y_{\alpha j} - y_{\Pi j}.$$

Можно минимизировать модуль максимальной невязки по всему множеству экспериментальных точек:

$$\min \max_j |\xi_j|$$

или сумму модулей невязок

$$\min \sum_{j=1}^m |\xi_j|.$$

Также используются методы наименьших кубов

$$\min \sum_{j=1}^m |\xi_j^3|,$$

наименьших квадратов

$$\min \sum_{j=1}^m \xi_j^2$$

и ряд других.

Наиболее широкое применение нашел метод наименьших квадратов (МНК), разработанный Лежандром и Гауссом. При рассмотрении его целесообразно несколько упростить систему обозначений:

обозначить экспериментальные значения выходного параметра через  $y_j$ , ввести фиктивную переменную  $x_0 = 1$  и заменить члены второго более высоких порядков линейными, положив

$$x_{n+1} = x_1^2; \quad x_{n+2} = x_2^2; \quad \dots \quad x_{2n} = x_n^2; \quad x_{2n+1} = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k = x_{n-1} \cdot x_n.$$

Тогда  $\bar{x}^T = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$  - вектор фиктивных переменных. В этой системе обозначений полином степени  $d$  будет иметь вид однородного линейного уравнения

$$y_{\Pi} = B_0 x_0 + B_1 x_1 + \dots + B_k x_k = \sum_{i=0}^k B_i x_i = B^T \cdot \bar{x},$$

где  $B^T = \{B_0, B_1, B_2, \dots, B_k\}$  - вектор неизвестных коэффициентов.



где  $\sigma^2$  - оценка дисперсии ошибок наблюдений.

Из соотношения (2.5) следует, что, во-первых, в общем случае процедура вычисления полиномиальных коэффициентов достаточно трудоемка, так как требует обращения матриц, и, во-вторых, коэффициенты не могут быть определены независимо друг от друга. Это затрудняет их физическую интерпретацию, так как полученный полином можно рассматривать только как интерполяционную формулу.

Оба перечисленных недостатка можно устранить, выбирая координаты экспериментальных точек так, чтобы для всех переменных было выполнено условие их ортогональности

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} x_{lj} = 0, \quad i \neq l. \quad (2.6)$$

При этом матрица  $\mathbf{M}$  становится диагональной:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n x_{0j}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^n x_{1j}^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sum_{j=1}^n x_{kj}^2 \end{vmatrix},$$

а система нормальных уравнений распадается на  $(k+1)$  независимых уравнений вида

$$b_i \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n x_{ij} y_j, \quad i = \overline{0-k}.$$

В результате отпадает необходимость в решении системы, а коэффициенты полинома определяются достаточно просто. Они независимы друг от друга и имеют четко выраженный физический смысл

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2}, \quad i = \overline{0-k}. \quad (2.7)$$

Следовательно, для получения математической модели РЭУ в виде степенного полинома (2.2) целесообразно проводить не произвольный, а специальным образом организованный эксперимент. Это можно сделать с помощью теории планирования эксперимента.

### Пример 2.1.

Определение коэффициентов полинома.

Для получения математической модели РЭУ в виде полинома

$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$   
проведен эксперимент, состоящий из 4 опытов, которым соответствуют следующие значения выходного параметра:

$$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Требуется составить систему нормальных уравнений и найти коэффициенты полинома.

Введем фиктивную переменную  $x_0 = 1$  и составим выражение для  $\varphi(\bar{B})$ :

$$\varphi(\bar{B}) = \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 x_{0j} - b_1 x_{1j} - b_2 x_{2j})^2.$$

Найдем условия минимума функции  $\varphi(\bar{B})$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial b_0} = -2 \left[ \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 x_{0j} - b_1 x_{1j} - b_2 x_{2j}) \cdot x_{0j} \right] = 0; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} = -2 \left[ \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 x_{0j} - b_1 x_{1j} - b_2 x_{2j}) \cdot x_{1j} \right] = 0; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b_2} = -2 \left[ \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 x_{0j} - b_1 x_{1j} - b_2 x_{2j}) \cdot x_{2j} \right] = 0. \end{cases}$$

Перейдем к системе нормальных уравнений, перенеся в правую часть члены, содержащие значения  $y_j$ , и упорядочив последовательность слагаемых в левой части:

$$\begin{cases} b_0 \cdot \sum_{j=1}^n x_{0j} x_{0j} + b_1 \cdot \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{0j} + b_2 \cdot \sum_{j=1}^n x_{2j} x_{0j} = \sum_{j=1}^n y_j x_{0j}; \\ b_0 \cdot \sum_{j=1}^n x_{0j} x_{1j} + b_1 \cdot \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{1j} + b_2 \cdot \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{2j} = \sum_{j=1}^n y_j x_{1j}; \\ b_0 \cdot \sum_{j=1}^n x_{0j} x_{2j} + b_1 \cdot \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{2j} + b_2 \cdot \sum_{j=1}^n x_{2j} x_{2j} = \sum_{j=1}^n y_j x_{2j}. \end{cases}$$

Для представления системы нормальных уравнений в матричной форме составим матрицу независимых переменных  $\mathbf{X}$ , транспонированную матрицу  $\mathbf{X}^T$  и вектор-столбец значений выходного параметра  $\bar{Y}$ :

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} \\ x_{03} & x_{13} & x_{23} \\ x_{04} & x_{14} & x_{24} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{X}^T = \begin{vmatrix} x_{01} & x_{02} & x_{03} & x_{04} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{vmatrix}; \quad \bar{Y} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{vmatrix}.$$

Найдем информационную матрицу Фишера  $M$  и вектор  $\Sigma^T Y$ :

$$M = \Sigma^T \Sigma = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n x_{0j}^2 & \sum_{j=1}^n x_{0j} x_{1j} & \sum_{j=1}^n x_{0j} x_{2j} \\ \sum_{j=1}^n x_{0j} x_{1j} & \sum_{j=1}^n x_{1j}^2 & \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{2j} \\ \sum_{j=1}^n x_{0j} x_{2j} & \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{2j} & \sum_{j=1}^n x_{2j}^2 \end{vmatrix}; \quad \Sigma^T Y = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n x_{0j} y_j \\ \sum_{j=1}^n x_{1j} y_j \\ \sum_{j=1}^n x_{2j} y_j \end{vmatrix}.$$

В общем случае коэффициенты полинома могут быть найдены по соотношению

$$\bar{B} = M^{-1} \Sigma^T Y.$$

Предположим, что эксперимент проводился в следующих точках:

$$\Sigma = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 \end{vmatrix}, \text{ тогда } \Sigma^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \end{vmatrix}; \quad M = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Как видим, в этом случае соблюдается условие ортогональности плана и коэффициенты могут быть определены по формулам:

$$B_0 = \frac{1}{4} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4);$$

$$B_1 = \frac{1}{4} (-y_1 + y_2 - y_3 + y_4);$$

$$B_2 = \frac{1}{4} (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4).$$

Или в более общем виде

$$B_i = 0,25 \cdot \sum_{j=1}^4 x_{ij} y_j, \quad i = \overline{0-2}.$$

## 2.2. Основные понятия теории планирования эксперимента

Теория планирования эксперимента [6,7] применима как к физическому эксперименту, который может проводиться непосредственно на РЭУ или на его макете, так и к вычислительному, для которого объектом служит математическая модель устройства.

**Эксперимент.** Эксперимент представляет собой группу из  $N$  опытов, отличающихся условиями проведения — значениями первичных параметров  $\bar{x}_j, j=\overline{1,n}$ . Он может быть пассивным и активным. Пассивный эксперимент подразумевает наблюдение за изменяющимся объектом или процессом и определение текущих значений первичных и выходных параметров в удобные для этого моменты времени. Например, контроль параметров технологического процесса. В отличие от пассивного, активный эксперимент является управляемым. Он заранее планируется в соответствии с поставленной целью, а затем проводится в строгом соответствии с планом, который устанавливает условия проведения каждого опыта. В дальнейшем речь будет идти только об активном эксперименте.

**Процедура планирования и план эксперимента.** Планирование эксперимента — это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи. При этом существенно следующее [7]:

- стремление к минимизации затрат как на проведение эксперимента ( $N, \min$ ), так и на обработку его результатов;
- варьирование переменных по специальным алгоритмам;
- использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;

выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждого эксперимента.

Результатом планирования служит план эксперимента. Он выбирается из некоторого множества планов, разработанных на основе теоретических предпосылок и требований практики и оптимальных по определенным критериям.

**Факторы.** Первичный параметр, участвующий в активном эксперименте, называется фактором. В число первичных параметров РЭУ могут входить параметры сигналов и электрорадиоэлементов, характеристики цепей питания и внешних воздействий, конструктивные параметры. Их общее количество велико даже для несложных устройств. Если все их ввести в эксперимент, его объем окажется недопустимо большим. Однако в этом нет необходимости, так как все первичные параметры РЭУ можно разделить на существенные и несущественные. Существенные (управляющие) оказывают сильное влияние на выходной параметр и с их помощью можно изменять его

Найдем информационную матрицу Фишера  $M$  и вектор  $\mathbf{X}^T \bar{Y}$ :

$$M = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n x_{0j}^2 & \sum_{j=1}^n x_{0j} x_{1j} & \sum_{j=1}^n x_{0j} x_{2j} \\ \sum_{j=1}^n x_{0j} x_{1j} & \sum_{j=1}^n x_{1j}^2 & \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{2j} \\ \sum_{j=1}^n x_{0j} x_{2j} & \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{2j} & \sum_{j=1}^n x_{2j}^2 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{X}^T \bar{Y} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n x_{0j} y_j \\ \sum_{j=1}^n x_{1j} y_j \\ \sum_{j=1}^n x_{2j} y_j \end{vmatrix}.$$

В общем случае коэффициенты полинома могут быть найдены по соотношению

$$\bar{B} = M^{-1} \mathbf{X}^T \bar{Y}.$$

Предположим, что эксперимент проводился в следующих точках:

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 \end{vmatrix}, \quad \text{тогда} \quad \mathbf{X}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \end{vmatrix}; \quad M = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Как видим, в этом случае соблюдается условие ортогональности плана и коэффициенты могут быть определены по формулам:

$$B_0 = \frac{1}{4} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4);$$

$$B_1 = \frac{1}{4} (-y_1 + y_2 - y_3 + y_4);$$

$$B_2 = \frac{1}{4} (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4).$$

Или в более общем виде

$$B_i = 0,25 \cdot \sum_{j=1}^4 x_{ij} y_j, \quad i = \overline{0-2}.$$

## 2.2. Основные понятия теории планирования эксперимента

Теория планирования эксперимента [6,7] применима как к физическому эксперименту, который может проводиться непосредственно на РЭУ или на его макете, так и к вычислительному, для которого объектом служит математическая модель устройства.

**Эксперимент.** Эксперимент представляет собой группу из  $N$  опытов, отличающихся условиями проведения - значениями первичных параметров  $\bar{x}_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Он может быть пассивным и активным. Пассивный эксперимент подразумевает наблюдение за изменяющимся объектом или процессом и определение текущих значений первичных и выходных параметров в удобные для этого моменты времени. Например, контроль параметров технологического процесса. В отличие от пассивного, активный эксперимент является управляемым. Он заранее планируется в соответствии с поставленной целью, а затем проводится в строгом соответствии с планом, который устанавливает условия проведения каждого опыта. В дальнейшем речь будет идти только об активном эксперименте.

**Процедура планирования и план эксперимента.** Планирование эксперимента - это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи. При этом существенно следующее [7]:

стремление к минимизации затрат как на проведение эксперимента ( $N$ ,  $\min$ ), так и на обработку его результатов;

варьирование переменных по специальным алгоритмам;

использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;

выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждого эксперимента.

Результатом планирования служит план эксперимента. Он выбирается из некоторого множества планов, разработанных на основе теоретических предпосылок и требований практики и оптимальных по определенным критериям.

**Факторы.** Первичный параметр, участвующий в активном эксперименте, называется фактором. В число первичных параметров РЭУ могут входить параметры сигналов и электрорадиоэлементов, характеристики цепей питания и внешних воздействий, конструктивные параметры. Их общее количество велико даже для несложных устройств. Если все их ввести в эксперимент, его объем окажется недопустимо большим. Однако в этом нет необходимости, так как все первичные параметры РЭУ можно разделить на существенные и несущественные. Существенные (управляющие) оказывают сильное влияние на выходной параметр и с их помощью можно изменять его

значение. Причем, как правило, существенных параметров значительно меньше, чем несущественных. Следовательно, в качестве факторов целесообразно использовать только существенные первичные параметры. Кроме того, сам активный эксперимент предъявляет к факторам ряд требований, обеспечивающих возможность его реализации. Фактор должен быть управляемым, операционально определенным и измеряться (или устанавливаться) с высокой точностью. Используемая совокупность факторов должна быть совместима, а ее члены независимы.

Рассмотрим содержание этих требований. Если фактор управляем, то можно установить его значение, предусмотренное планом, и поддерживать это значение постоянным в течение всего опыта. Управляемость факторов - необходимое условие планирования эксперимента.

Для установления определенных значений факторов используются различные способы. Так, например, нужное значение сопротивления может быть получено с помощью переменного резистора или специально подобранного постоянного резистора. Последовательность операций, с помощью которых в эксперименте устанавливаются требуемые значения фактора, называется его операциональным определением.

Точность измерения факторов должна быть возможно более высокой.

Совместимость совокупности факторов означает, что предусмотренные планом их комбинации осуществимы и безопасны. В ходе эксперимента РЭУ должно находиться в пределах области работоспособности, т.е. не должны возникать опасные режимы, вызывающие отказ устройства.

При планировании эксперимента важна независимость факторов, возможность установить каждый фактор на любом требуемом уровне вне зависимости от состояния других факторов. Если это условие не выполнено, невозможно планировать эксперимент.

**Уровни варьирования факторов.** В ходе активного эксперимента устанавливаются значения факторов, предусмотренные планом. Эти значения называются уровнями варьирования факторов и определяются соотношением

$$x_i = x_{i0} \pm \alpha \lambda_i, \quad (2.8)$$

где  $x_i$  - значение  $i$ -го фактора в опыте;  
 $x_{i0}$  - значение  $i$ -го фактора в центральной точке, вокруг которой планируется эксперимент;  
 $\lambda_i$  - шаг варьирования  $i$ -го параметра (обычно  $\lambda_i = (0.1-0.3)x_{i0}$ );  
 $\alpha$  - коэффициент, значение которого определяется конкретным планом (возможные случаи:  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $\alpha > 1$ ).

При анализе и синтезе планов, а также при описании условий эксперимента пользуются нормированными значениями факторов

$$X_i = \frac{x_i - x_{i0}}{\lambda_i}. \quad (2.9)$$

**Матрица планирования.** Условия эксперимента вместе с результатами сводятся в таблицу, которая называется матрицей планирования (см. табл. 2.1).

Таблица 2.1

Матрица планирования

N опыта	$X_1$	$X_2$	...	$X_n$	$y$	$X_0$	$X_1 X_2$	...	$X_1 X_n$
1	-I	-I		-I	$y_1$	I	I		I
2	I	-I		-I	$y_2$	I	-I		-I
⋮									
N	I	I		I	$y_n$	I	I		I

Строки таблицы соответствуют отдельным опытам, входящим в состав эксперимента, а столбцы - факторам и выходному параметру. При заполнении таблицы используются нормированные значения факторов.

Иногда матрица планирования дополняется столбцами, которые нужны только при обработке результатов эксперимента и содержат нормированные значения, например, фиктивной переменной  $X_0$  или взаимодействия факторов  $X_1 X_2$  и т.п.

**Многофакторный и однофакторный эксперименты.** В ходе активного эксперимента значения факторов можно изменять поочередно, по одному - это однофакторный эксперимент, а можно одновременно для

нескольких факторов - многофакторный эксперимент. Теория планирования рассматривает в основном многофакторный эксперимент, используя однофакторный для решения вспомогательных задач.

**Критерии оптимальности планов.** Построение плана эксперимента можно интерпретировать как выбор строк матрицы  $X$  (см. разд. 2.1), их числа и последовательности реализации, т.е. условий проведения каждого опыта, общего числа опытов и алгоритмов изменения каждого фактора в ходе эксперимента. При выборе пользуются различными критериями, которых достаточно много и которые оценивают планы с разных позиций [7]. Проведенный анализ критериев оптимальности планов показал, что наиболее предпочтительными являются критерии ортогональности, насыщенности и композиционности, обеспечивающие сокращение затрат времени на проведение эксперимента и обработку его результатов, а также критерии D- и G-оптимальности, обеспечивающие хорошие статистические свойства модели. Рассмотрим эти критерии.

1) Ортогональность плана, во-первых, обеспечивает независимую оценку коэффициентов полинома, что позволяет дать им физическую интерпретацию - связать с коэффициентами влияния соответствующих факторов, и, во-вторых, облегчает обработку результатов эксперимента, так как система нормальных уравнений для ортогональных планов распадается на  $(k+1)$  независимых уравнений с одним неизвестным, где  $(k+1)$  - число искоемых коэффициентов полинома.

В разделе 2.1 была дана формулировка свойства ортогональности плана (2.6) и было показано, что ортогональному плану соответствует диагональная матрица  $M$ , что облегчает обработку результатов эксперимента.

2) Насыщенность плана оценивается отношением числа искоемых коэффициентов полинома  $(k+1)$  к числу опытов  $N$ . Для получения полиномиальных моделей используются ненасыщенные  $((k+1)/N < 1)$  и насыщенные  $((k+1)/N = 1)$  планы. Естественно желание экспериментатора повысить степень насыщенности плана, т.е. уменьшить число опытов. Однако сокращение объема эксперимента, как правило, приводит к ухудшению качества модели: могут появиться смешанные оценки полиномиальных коэффициентов, возрастает дисперсия оценок.

Поэтому при использовании критерия насыщенности надо обязательно учитывать возможные последствия.

3) Свойство композиционности плана позволяет разделить эксперимент на части и последовательно реализовать одну часть за другой без потери информации. Это свойство дает возможность постепенно повышать порядок искомой полиномиальной модели и добавлять новые переменные, добиваясь требуемой точности описания объекта.

4) Критерий D-оптимальности связан с оценкой интерполяционных свойств полинома. Он требует минимизации обобщенной дисперсии, т.е. дисперсии вектора коэффициентов, что обеспечивает хорошие предсказательные свойства модели внутри области планирования. Это достигается при минимизации определителя корреляционной матрицы

$$\min \det M^{-1}.$$

5) Критерий G-оптимальности минимизирует максимальную дисперсию выходного параметра. Это гарантирует отсутствие в области планирования точек, в которых точность предсказания значений  $y$  окажется недопустимо низкой. Во многих случаях D- и G-критерии эквивалентны.

**Выделение факторов. Отсеивающий эксперимент.** Как отмечено выше, в качестве факторов используются только существенные первичные параметры, которые оказывают значительное влияние на выходной параметр РЭУ. Остальные так называемые несущественные параметры во время эксперимента фиксируются на уровнях, как правило, соответствующих их номинальным значениям, и определяют условия эксперимента.

Разбиение первичных параметров на два класса - существенных и несущественных - нельзя проводить произвольно. Если хотя бы один из первичных параметров, оказывающих сильное влияние на выходной, не включить в эксперимент, результаты его будут обесценены. А введение в эксперимент несущественных параметров резко увеличивает его объем, не принося полезной информации. Поэтому перед разбиением на классы все множество первичных параметров необходимо проранжировать по степени их влияния на выходной параметр. Операция ранжирования параметров предполагает их упорядочивание: первичные параметры выстраиваются в ранжировочный ряд в соответствии с изменением (убыванием или возрастанием) их влияния

на выходной параметр. А затем часть ряда, соответствующая слабым влияниям отсекается - отсеивается.

Таким образом, активному эксперименту, ориентированному на получение полиномиальной модели, должен предшествовать этап выделения факторов или отсеивания несущественных параметров. Для отсеивания используют: априорные сведения о работе устройства; серию однофакторных опытов, позволяющих оценить коэффициенты влияния параметров; эксперименты, проводимые по специальным экономичным сверхнасыщенным планам [6]. Так как операция отсеивания вспомогательная, стремятся минимизировать затраты на ее выполнение.

### 2.3. Получение математических моделей РЭУ в виде линейных и неполных квадратичных полиномов

При планировании эксперимента число уровней варьирования факторов  $C$  зависит от степени искомого полинома  $d$  и выбирается из условия

$$C \geq d + 1 \quad (2.10)$$

Поэтому математические модели в виде линейных

$$V = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i \quad (2.11)$$

и неполных квадратичных полиномов

$$V = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=i+1}^n b_{il} x_i x_l, \quad (2.12)$$

то есть полиномов первого порядка ( $d=1$ ), могут быть получены с помощью двухуровневых ( $C = 2$ ) полных и дробных факторных экспериментов.

**Полный факторный эксперимент.** Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней варьирования факторов, называется полным факторным экспериментом, или сокращенно ПФЭ. Его объем (общее число опытов) равен  $N = C^n$ , где  $n$  - число факторов.

Широко используется двухуровневый ПФЭ типа  $2^n$ , в котором факторы варьируются на двух уровнях: нижнем  $x_{iH} = x_{i0} - \lambda_i$  и верхнем  $x_{iB} = x_{i0} + \lambda_i$ . Нормированные значения этих уровней:

$$x_{iH} = -1 \quad \text{и} \quad x_{iB} = +1 \quad (\text{рис.2.1}).$$

При составлении матрицы планирования соблюдаются следующие правила:

в целях упрощения записи вместо нормированных значений факторов "-1" и "+1" в таблицу записываются только знаки "-" и "+";

используется правило чередования уровней факторов с интервалом  $I_i = 2^{i-1}$ , где  $i$  - номер фактора.

При большом числе факторов процедура неупорядоченного перебора всех возможных сочетаний уровней варьирования факторов становится громоздкой и трудноконтролируемой. Правило чередования уровней систематизирует перебор и придает матрицам планирования форму, удобную для работы.

### Пример 2.2.

Составить матрицу планирования ПФЭ  $2^n$  для трех факторов ( $2^3$ ). Определим размер матрицы планирования. Число строк, каждая из которых описывает условия проведения и результат одного опыта, определяется объемом эксперимента  $N = 2^3 = 8$ . В число столбцов войдут  $(n+1)$  столбец экспериментальной части: по одному на каждый фактор и на выходной параметр, и  $(1 + C_n^2)$  столбцов, используемых только при обработке результатов эксперимента и соответствующих  $x_0$  и парным взаимодействиям, количество которых равно числу сочетаний из  $n$  по 2:  $C_n^2 = n(n-1)/2$ . Общее количество столбцов равно  $n + 1 + 1 + C_n^2 = 3 + 2 + 3 = 8$ . Следовательно, матрица планирования будет иметь размер  $8 \times 8$ .

Алгоритм изменения факторов в ходе эксперимента задан правилом чередования уровней, согласно которому  $I_1 = 2^0 = 1$ ,  $I_2 = 2^1 = 2$ ,  $I_3 = 2^2 = 4$ . Фиктивная переменная  $x_0$  имеет постоянный уровень "+1", а значения произведений вида  $x_i x_l$  в каждой строке матрицы определяются путем перемножения соответствующих нормированных значений факторов  $x_i$  и  $x_l$ .

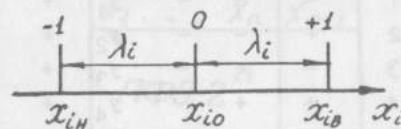


Рис.2.1

Искомая матрица имеет вид

N	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub> x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub> x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub> x <sub>3</sub>
1	-	-	-	y <sub>1</sub>	+	+	+	+
2	+	-	-	y <sub>2</sub>	+	-	-	+
3	-	+	-	y <sub>3</sub>	+	-	+	-
4	+	+	-	y <sub>4</sub>	+	+	-	-
5	-	-	+	y <sub>5</sub>	+	+	-	-
6	+	-	+	y <sub>6</sub>	+	-	+	-
7	-	+	+	y <sub>7</sub>	+	-	-	+
8	+	+	+	y <sub>8</sub>	+	+	+	+

эксперимент
обработка

Левая часть матрицы планирования описывает условия и результаты эксперимента, а правая требуется только при обработке результатов.

План полного факторного эксперимента обладает следующими свойствами:

ортогональность матрицы планирования

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}x_{1j} = 0;$$

симметричность относительно центра эксперимента (рис.2.2)

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 0;$$

выполнение условия нормировки

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^2 = N;$$

аддитивность плана, т.е. возможность его наращивания за счет введения новых факторов с использованием полученных ранее результатов (рис.2.3).

Свойство ортогональности резко упрощает обработку результатов эксперимента с помощью метода наименьших квадратов и позволяет получить независимые оценки коэффициентов полинома. Условие нормировки упрощает соотношение (2.7) для вычисления коэффициентов

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m x_{ij}y_i. \quad (2.13)$$

Свойство аддитивности плана делает стратегию планирования более гибкой и расширяет возможности экспериментатора.

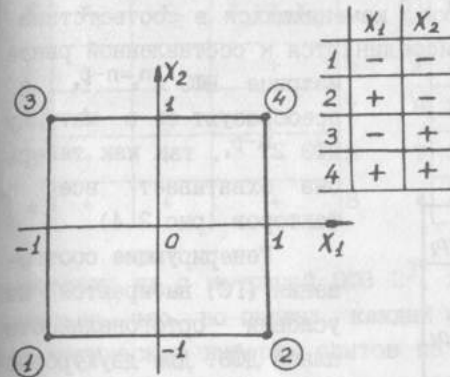


Рис.2.2

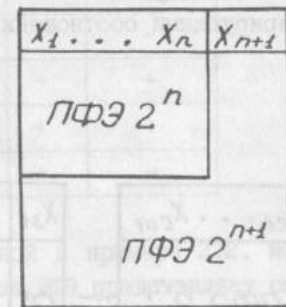


Рис.2.3

Как следует из перечисленного, план ПФЭ обладает большими достоинствами. Однако ему присущ и крупный недостаток – большой объем эксперимента. Уже при 8-10 факторах эксперимент становится трудно осуществимым. Для сокращения объема эксперимента используется дробный факторный эксперимент.

**Дробный факторный эксперимент.** Дробный факторный эксперимент или дробная реплика (сокращенно ДФЭ) представляет собой систематическую выборку из полного факторного эксперимента. Его объем равен  $N = c^{n-p_1}$ , где  $p_1$  – степень дробности плана (реплики).

Двухуровневый план ДФЭ типа  $2^{n-p_1}$  обладает всеми перечисленными выше свойствами ПФЭ  $2^n$ .

Кроме того, он позволяет сократить объем эксперимента в  $2^{p_1}$  раз, что является значительным выигрышем.

Планы ДФЭ формируются с помощью генерирующих соотношений, которые задают для части факторов законы их изменения в ходе эксперимента.

Алгоритм построения матрицы планирования ДФЭ  $2^{n-p_1}$ :

а) факторы делятся на две группы:  $n_1 = n - p_1$  свободных и  $p_1$  зависимых. Состав групп произволен;

б) для свободных факторов составляется матрица планирования ПФЭ  $2^{n_1} = 2^{n-p_1}$ ;

в) для каждого зависимого фактора выбирается генерирующее

соотношение, которое определяет порядок его варьирования;

г) столбцы зависимых факторов, изменяющихся в соответствии с генерирующими соотношениями, присоединяются к составленной ранее

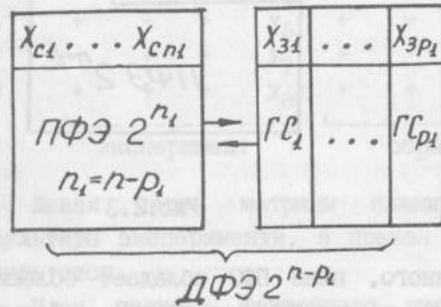


Рис.2.4

### ПРИМЕР 2.3.

Составить матрицу планирования ДФЭ  $2^{3-1}$ .

Определяем размер матрицы планирования. Число строк  $N=2^{3-1}=4$ . Составим только экспериментальную часть матрицы, поэтому число столбцов равно  $n+1=4$ . Размер матрицы  $4 \times 4$ .

В соответствии с приведенным выше алгоритмом выделим группу свободных факторов, численностью  $n_1 = n - p_1 = 2$ :  $x_1$  и  $x_2$ , и  $x_3$  - зависимый фактор. Для зависимого фактора  $x_3$  надо выбрать генерирующее соотношение в виде взаимодействия свободных факторов  $x_1$  и  $x_2$ . Возможны два варианта: а)  $x_3 = x_1 x_2$  и б)  $x_3 = -x_1 x_2$ . Составляется матрица планирования ПФЭ  $2^2$  для свободных факторов  $x_1$  и  $x_2$  и дополняется столбцом зависимого фактора  $x_3$ , который варьируется в соответствии с выбранным генерирующим соотношением. Используем оба возможных варианта ГС и получим две матрицы планирования:

матрице ПФЭ  $2^{n_1 = n - p_1}$  и преобразуют ее в матрицу ДФЭ  $2^{n-p_1}$ , так как теперь она охватывает все  $n$  факторов (рис.2.4).

Генерирующие соотношения (ГС) выбираются из условия ортогональности плана ДФЭ. Для двухуровневых планов этому условию удовлетворяют ГС в виде взаимодействия свободных факторов

$$x_3 = x_{c1} x_{c2} \dots x_{ck}$$

где  $x_3$  - зависимый фактор;  
 $x_{c1} \dots x_{ck}$  - свободные факторы.

а)				б)			
№	$x_1$	$x_2$	$x_3 = x_1 x_2$	№	$x_1$	$x_2$	$x_3 = -x_1 x_2$
1	-	-	+	5	1	-	-
2	+	-	-	6	2	+	+
3	-	+	-	7	3	-	+
4	+	+	+	8	4	+	-

Сопоставив их с матрицей ПФЭ  $2^3$ , полученной в примере 2.2, можно убедиться, что, во-первых, каждый из планов ДФЭ представляет собой систематическую выборку опытов из ПФЭ (номера опытов ПФЭ указаны рядом с таблицами), и, во-вторых, объединив две матрицы ДФЭ, получим матрицу ПФЭ  $2^3$ . Каждый план ДФЭ  $2^{n-1}$  содержит половину опытов из плана ПФЭ  $2^n$  и называется полурепликой.

Таким образом, с помощью дробного факторного эксперимента  $2^{n-p_1}$  можно как и при использовании ПФЭ  $2^n$  получить модель в виде линейного или неполного квадратичного полинома. При этом объем эксперимента существенно уменьшается, что является несомненным достоинством. Однако с точки зрения разработчика РЭУ, ДФЭ имеет крупный недостаток: получаемые оценки полиномиальных коэффициентов оказываются смешанными и теряют физический смысл, модель превращается в интерполяционную формулу. Этот недостаток - следствие используемой структуры генерирующих соотношений. Она, с одной стороны, обеспечивает полезное свойство ортогональности плана, но с другой стороны, задает одинаковые законы изменения в ходе эксперимента для зависимых факторов и взаимодействий свободных факторов (например,  $x_3 = x_1 x_2$ ). В результате при обработке нельзя разделить их влияние, появляются смешанные оценки.

Система смешивания оценок зависит от выбранных генерирующих соотношений. Для формализации поиска этой системы используются так называемые определяющие контрасты. Определяющим контрастом (ОК) называется соотношение, задающее элемент столбца матрицы планирования для фиктивной переменной  $x_0 = I$ . ОК может быть получен из генерирующего соотношения путем умножения обеих его частей на зависимую переменную:

$$\begin{aligned} \text{ГС: } x_3 &= x_{c1} x_{c2} \dots x_{ck} \\ \text{ОК } I &= x_{c1} x_{c2} \dots x_{ck} x_3 \end{aligned}$$



Пользуясь ОК, можно найти, какие эффекты будет содержать оценка любого полиномиального коэффициента  $v_i$  или  $v_{ij}$ . Для этого обе части ОК надо умножить на соответствующую переменную. Например, умножив обе части приведенного выше ОК на  $x_{c1}$ , получаем

$$x_{c1} = x_{c2}x_{c3} \dots x_{ck}x_{c3}$$

Это означает, что столбцы матрицы планирования, соответствующие  $x_{c1}$  и  $x_{c2}x_{c3} \dots x_{ck}x_{c3}$ , одинаковые, а оценки  $\beta_{c1}$  и  $\beta_{c2} \dots ck3$  нельзя разделить, т.е.

$$v_{c1} = \beta_{c1} + \beta_{c2} \dots ck3$$

Очевидно, что чем больше факторов в правой части определяющего контраста, тем выше порядок эффекта взаимодействия, с которым окажется смешанным искомым коэффициент полинома  $\beta_i$  или  $\beta_{ij}$ , тем выше разрешающая способность ДФЭ. А чем выше порядок эффекта взаимодействия факторов, тем он, как правило, слабее и при определенных условиях им можно пренебречь. Разрешающая способность ДФЭ определяется числом факторов в правой части ОК.

#### Пример 2.4.

а) Определить систему смешивания оценок коэффициентов полинома для ДФЭ  $2^{3-1}$  при использовании генерирующего соотношения  $x_3 = x_1x_2$  (пример 2.3, вариант а).

Предположим, что ищется модель в виде линейного полинома  $y = v_0 + v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3$ .

Составим определяющий контраст, умножив обе части ГС на  $x_3$ :  $I = x_1x_2x_3$ .

Определим систему смешивания оценок, учитывая, что  $x_1^2 = I$ :

$$x_0 = x_1x_2x_3, \quad v_0 = \beta_0 + \beta_{123}; \quad x_1 = x_1^2x_2x_3 = x_2x_3, \quad v_1 = \beta_1 + \beta_{23}; \\ x_2 = x_1x_3, \quad v_2 = \beta_2 + \beta_{13}; \quad x_3 = x_1x_2, \quad v_3 = \beta_3 + \beta_{12}.$$

б) Составить матрицу планирования ДФЭ  $2^{4-1}$  и определить систему смешивания оценок коэффициентов полинома.

Предположим, что надо найти модель в виде неполного квадратичного полинома. Так как количество искомым коэффициентов полинома  $k+1$  не должно превышать числа опытов  $N=2^{4-1}=8$ , то в модель можно включить постоянный член  $v_0$ , четыре линейных члена  $v_ix_i$  и только три парных взаимодействия  $v_{ij}x_ix_j$  из шести возможных ( $C_4^2 = 6$ ).

Например,

$$y = v_0 + \sum_{i=1}^n v_ix_i + v_{12}x_1x_2 + v_{13}x_1x_3 + v_{34}x_3x_4.$$

Составим матрицу планирования, включающую как экспериментальную, так и расчетную части. Ее размер  $8 \times 8$ , т.к. число столбцов в этом случае равно числу искомым коэффициентов модели.

Пусть  $x_4$  - зависимая переменная, а  $x_1, x_2, x_3$  - свободные. Выбираем ГС  $x_4 = x_1x_2x_3$  и заполняем матрицу планирования.

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4 = x_1x_2x_3$	$x_0$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_3x_4$
1	-	-	-	-	+	+	+	+
2	+	-	-	+	+	-	-	-
3	-	+	-	+	+	-	+	-
4	+	+	-	-	+	+	-	+
5	-	-	+	+	+	+	-	+
6	+	-	+	-	+	-	+	-
7	-	+	+	-	+	-	-	-
8	+	+	+	+	+	+	+	+

Анализируя матрицу планирования, можно сделать вывод о том, что окажутся смешанными между собой оценки коэффициентов  $v_{12}$  и  $v_{34}$ , а также  $v_4$  и  $v_{123}$ , так как столбцы взаимодействий  $x_1x_2$  и  $x_3x_4$  одинаковы, а  $x_4$  и  $x_1x_2x_3$  представлены единым столбцом в соответствии с ГС. Оценки остальных коэффициентов смешаны с коэффициентами, не представленными в таблице, поэтому для отыскания системы смешивания составим определяющий контраст  $I = x_1x_2x_3x_4$  и получим следующий результат:

$$x_0 = x_1x_2x_3x_4, \quad v_0 = \beta_0 + \beta_{1234}; \\ x_1 = x_2x_3x_4, \quad v_1 = \beta_1 + \beta_{234}; \\ x_2 = x_1x_3x_4, \quad v_2 = \beta_2 + \beta_{134}; \\ x_3 = x_1x_2x_4, \quad v_3 = \beta_3 + \beta_{124}; \\ x_4 = x_1x_2x_3, \quad v_4 = \beta_4 + \beta_{123}; \\ x_1x_2 = x_3x_4, \quad v_{12} = \beta_{12} + \beta_{34}; \\ x_1x_3 = x_2x_4, \quad v_{13} = \beta_{13} + \beta_{24}; \\ x_1x_4 = x_2x_3, \quad v_{14} = \beta_{14} + \beta_{23};$$

Если степень дробности  $p_1 > 1$  и при формировании плана используются несколько ГС, то система смешивания оценок усложняется. Для ее отыскания используется обобщенный определяющий контраст (ООК), состоящий из простых ОК, каждый из которых соответствует одному ГС, и определяющих контрастов, получаемых из простых ОК путем их перемножения по два, по три и т.д.

### Пример 2.5.

Определить систему смешивания оценок коэффициентов полинома для ДФЭ  $2^{5-2}$  при использовании следующих генерирующих соотношений:

$$x_4 = x_1 x_2 x_3, \quad x_5 = x_1 x_2.$$

Составим систему определяющих контрастов:

$$OK_1: I = x_1 x_2 x_3 x_4;$$

$$OK_2: I = x_1 x_2 x_5;$$

$$OK_3: I = x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 x_5 = x_3 x_4 x_5;$$

$$ООК: I = x_1 x_2 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_5 = x_3 x_4 x_5.$$

Определяющий контраст  $OK_3$  находим путем почленного перемножения простых контрастов  $OK_1$  и  $OK_2$ . Каждый определяющий контраст добавляет к основному эффекту еще один. Поэтому при наличии трех ОК результирующие оценки коэффициентов будут содержать по три дополнительных эффекта:

$$\begin{aligned} V_0 &= \beta_0 + \beta_{1234} + \beta_{125} + \beta_{345}; & V_4 &= \beta_4 + \beta_{123} + \beta_{1245} + \beta_{35}; \\ V_1 &= \beta_1 + \beta_{234} + \beta_{25} + \beta_{1345}; & V_5 &= \beta_5 + \beta_{12345} + \beta_{12} + \beta_{34}; \\ V_2 &= \beta_2 + \beta_{134} + \beta_{15} + \beta_{2345}; & V_{14} &= \beta_{14} + \beta_{23} + \beta_{245} + \beta_{135}; \\ V_3 &= \beta_3 + \beta_{124} + \beta_{1235} + \beta_{45}; & V_{13} &= \beta_{13} + \beta_{24} + \beta_{235} + \beta_{145}. \end{aligned}$$

Сокращение объема эксперимента делает использование ДФЭ весьма желательным, но полиномиальные модели со смешанными оценками не пригодны для проектных задач. Для смягчения этого противоречия использована одна из характерных особенностей РЭУ как объектов активного эксперимента. Она заключается в наличии сильных эффектов парных взаимодействий  $\beta_{il}$  между первичными параметрами при практически незначимых эффектах взаимодействий третьего и более высоких порядков ( $\beta_{ilk} \approx 0$ ,  $\beta_{ilkm} \approx 0$  и т.д.). Это свойство позволяет считать оценки полиномиальных коэффициентов, смешанные с оценками эффектов взаимодействия третьего и более высоких

порядков, практически несмешанными, т.е.

$$V_i = \beta_i + \beta_{klm} + \beta_{klmn} \approx \beta_i.$$

Неполный квадратичный полином с практически несмешанными оценками может быть получен, если степень дробности плана  $p_1$  не превышает граничного значения  $p_{ГР}$ :

$$p_1 \leq p_{ГР} = \frac{n}{3} - 1. \quad (2.14)$$

где  $p_{ГР}$  вычисляется с округлением до ближайшего целого.

### Пример 2.6.

Для ДФЭ  $2^{8-2}$  выбрать генерирующие соотношения, обеспечивающие получение практически несмешанных оценок коэффициентов полинома.

Пусть  $x_7$  и  $x_8$  - зависимые переменные.

Выбираем  $p_1=2$  генерирующих соотношения:

$$x_7 = x_1 x_2 x_3 x_4, \quad x_8 = x_1 x_2 x_5 x_6.$$

Покажем, что они обеспечивают получение практически несмешанных оценок коэффициентов, определив систему смешивания оценок.

Обобщенный определяющий контраст

$$I = x_1 x_2 x_3 x_4 x_7 = x_1 x_2 x_5 x_6 x_8 = x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8.$$

Система смешивания оценок:

$$\begin{aligned} V_0 &= \beta_0 + \beta_{12347} + \beta_{12568} + \beta_{345678} \approx \beta_0; \\ V_1 &= \beta_1 + \beta_{2347} + \beta_{2568} + \beta_{1345678} \approx \beta_1; \\ &\vdots \\ V_{12} &= \beta_{12} + \beta_{347} + \beta_{568} + \beta_{12345678} \approx \beta_{12}; \\ &\vdots \\ V_{78} &= \beta_{78} + \beta_{12348} + \beta_{12567} + \beta_{3456} \approx \beta_{78}. \end{aligned}$$

## 2.4. Получение математических моделей РЭУ в виде степенных полиномов

Одной из характерных особенностей РЭУ как объектов активного эксперимента является наличие сравнительно сильных эффектов парных взаимодействий факторов при слабых взаимодействиях более высоких порядков. Поэтому полиномиальные модели, помимо степенных членов, должны обязательно содержать парные взаимодействия

$$y = B_0 + \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n B_i^{(k)} x_i^k + \sum_{i=1}^{C^2} B_{i1} x_i x_1, \quad (2.15)$$

где  $d$  - степень полинома;  $n$  - число факторов.

Модели такого вида можно получить с помощью ПФЭ  $C^n$ , где  $C = d + 1$  - число уровней варьирования факторов. Так как формируемые планы предназначаются не только для вычислительного, но и для физического эксперимента, уровни варьирования факторов выбираются исходя из условий D-оптимальности планов (табл.2.2).

Таблица 2.2

Степень полинома $d$	Число уровней $C$	Номер уровня						
		1	2	3	4	5	6	7
1	2	-1	1					
2	3	-1	0	1				
3	4	-1	-0,477	-0,477	1			
4	5	-1	-0,655	0	0,655	1		
5	6	-1	-0,765	-0,285	0,285	0,765	1	
6	7	-1	-0,830	-0,460	0	0,460	0,830	1

Таким образом, планы ПФЭ  $C^n$  ортогональны и D-оптимальны, т.е. пригодны для вычислительного и физического эксперимента. Однако их объем недопустимо велик. Например, если число факторов  $n=5$ , то для получения квадратичного полинома ( $d=2$ ) надо провести  $N_2 = 3^5 = 243$  опыта, а для полинома четвертой степени  $N_4 = 5^5 = 3125$  и т.д.

Для сокращения объема эксперимента используют многоуровневый дробный факторный эксперимент  $C^{n-p_2}$ , а также композиционные планы, которые позволяют уменьшить объем эксперимента за счет увеличения числа уровней варьирования факторов ( $C > d + 1$ ).

**Многоуровневый дробный факторный эксперимент.** Подход к формированию плана дробного факторного эксперимента остается прежним. Факторы делятся на две группы:  $n_1$  независимых и  $n_2$  зависимых. Факторы первой группы варьируются по законам ПФЭ  $C^{n_1}$ , а

для определения правил варьирования факторов из второй группы необходимы генерирующие соотношения. Основное требование, которое предъявляется при выборе генерирующих соотношений, - обеспечить ортогональность планов хотя бы относительно линейных эффектов. Если это удастся сделать, то остальные столбцы матрицы планирования, нужные при обработке результатов эксперимента, можно ортогонализировать путем замены переменных.

Генерирующие соотношения той структуры, которая применялась при формировании двухуровневых дробных реплик, не дают нужного эффекта - получаемые планы неортогональны. Поэтому предложено использовать в качестве генерирующих соотношений комбинаторные схемы - латинские квадраты. Планы, построенные с помощью латинских квадратов, ортогональны и D-оптимальны.

Латинским квадратом размером  $a \times a$  называется квадратная таблица, составленная из  $a$  элементов-букв или чисел таким образом, что каждый элемент встречается по одному разу в каждой строке и в каждом столбце.

Например, из трех элементов A, B, C образуется латинский квадрат  $3 \times 3$ , а из четырех элементов 1, 2, 3, 4 - квадрат  $4 \times 4$ :

A B C	1 2 3 4
B C A	2 4 1 3
C A B	3 1 4 2
	4 3 2 1

На размер квадрата не накладывается принципиальных ограничений. На практике используются латинские квадраты размером не более  $12 \times 12$ .

К латинским квадратам применимо понятие ортогональности. Два латинских квадрата ортогональны, если при их взаимном наложении (комбинации) каждая образующаяся пара элементов встречается только один раз. При этом учитывается не только состав пары, но и порядок элементов в паре. Например, два квадрата размером  $3 \times 3$

1. A B C	2. A B C
B C A	и C A B
C A B	B C A

ортогональны, так как при их наложении каждая образующаяся пара элементов встречается только один раз:



Государственная публичная научно-техническая библиотека России

AA	BB	CC
BC	CA	AB
CB	AC	BA

Для данного размера  $a$  ( $a < 10$ ) ортогональные квадраты существуют тогда, когда  $a$  есть целая положительная степень простого числа. Так, ортогональные квадраты существуют для следующих величин:  $3=3^1$ ,  $4=2^2$ ,  $5=5^1$ ,  $7=7^1$ ,  $8=2^3$ ,  $9=3^2$ . Число 6 нельзя представить в такой форме, и поэтому не существует пары ортогональных квадратов размером  $6 \times 6$ .

Если для данного размера  $a$  ортогональные квадраты существуют, то их число не превосходит  $(a-1)$  и все они взаимноортогональны, т.е. каждый квадрат ортогонален ко всем другим. Полные ряды ортогональных квадратов для  $a \leq 7$  приведены в Приложении (табл.П.1).

Для того чтобы использовать латинские квадраты в качестве генерирующих соотношений, надо установить связь между характеристиками квадратов и параметрами плана. В качестве характеристик квадратов рассматриваются их размер и число ортогональных квадратов данного размера, а в качестве параметров плана - число уровней варьирования факторов  $C$ , значения уровней и степень дробности плана  $p_2$ .

Каждому элементу квадрата ставится в соответствие один из уровней варьирования факторов. Следовательно, число элементов  $a$  должно равняться числу уровней  $C$ , которое зависит от степени искомого полинома  $d$ :  $a = C = d + 1$ . Таким образом для получения полинома степени  $d$  с помощью ДФЭ  $2^{n-p_2}$  в качестве генерирующих соотношений надо использовать латинские квадраты размером  $C \times C$ .

Например, требуется получить квадратичный полином:  $d=2$ . Для этого нужно каждый фактор варьировать на  $C=d+1=3$  уровнях. Поэтому в качестве генерирующего соотношения можно взять латинский квадрат размером  $3 \times 3$  (см. выше). Его элементам  $A, B, C$  ставятся в соответствие уровни варьирования фактора (см. табл.2.2):  $A=-1$ ,  $B=0$ ,  $C=1$ . Закон варьирования фактора определяется путем последовательного считывания квадрата по строкам или столбцам:

№ опыта	I	2	3	4	5	6	7	8	9
элементы ЛК	A	B	C	B	C	A	C	A	B
уровни $x_i$	-1	0	1	0	1	-1	1	-1	0

Такой квадрат определяет изменение фактора в  $C^2 = 9$  опытах. Следующая проблема связана с выбором степени дробности плана  $p_2$ . При двухуровневом планировании (ДФЭ  $2^{n-p_1}$ ) степень дробности  $p_1$  определяется условием отсутствия реально смешанных оценок коэффициентов искомой модели (2.14). В случае же многоуровневого планирования величина  $p_2$  обусловлена структурой формируемого плана (рис.2.5). Использование в качестве генерирующих соотношений для  $p_2$  факторов латинских квадратов позволяет, развернув их, получить  $C^2$  строк-опытов. Для того, чтобы эту часть плана можно было стыковать с другой, в которой  $n_1$  факторов варьируются по законам ДФЭ  $C^{n_1}$ , вторая часть также должна содержать  $C^2$  строк. Поэтому во

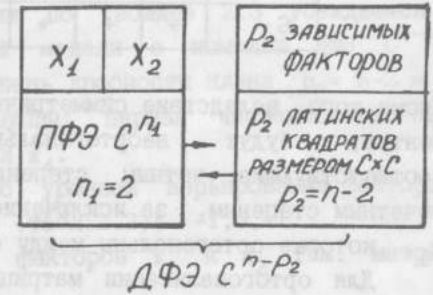


Рис.2.5

всех случаях  $n_1$  - число факторов в независимой группе равно двум и  $p_2 = n - 2$ . Но, с другой стороны, т.к. степень дробности определяет число используемых генерирующих соотношений, она не может быть больше числа существующих ортогональных латинских квадратов требуемого размера:  $p_2 \leq C - 1 = d$ . Объединение обоих полученных условий для  $p_2$  даст следующие соотношения:

$$p_2 = n - 2 \leq d ; \tag{2.16a}$$

$$n \leq d + 2 . \tag{2.16b}$$

Следовательно, применение ортогональных латинских квадратов хотя и позволяет решить задачу построения ортогональных многоуровневых дробных реплик, но при этом накладывает жесткое ограничение на степень полинома  $d$ , который можно построить для заданного числа факторов. Допустимые сочетания  $n$  и  $d$  приведены в табл.2.3.

Если для ДФЭ  $2^{n-p_2}$  составить полную матрицу планирования, содержащую экспериментальную и расчетную части, и проанализировать ее, можно убедиться, что столбцы  $x_i^k$ , соответствующие степеням факторов, оказываются неортогональными по отношению к столбцу  $x_0$ .

Таблица 2.3.

d	n	3	4	5	6	7	8
2		+	+				
3		+	+	+			
4		+	+	+	+		
5		+					
6		+	+	+	+	+	+

Кроме того, вследствие симметричности точек плана относительно его центра, будут неортогональными между собой столбцы, соответствующие четным степеням, и столбцы, соответствующие нечетным степеням, за исключением столбцов линейных эффектов  $x_i$ ,  $x_1$ , которые ортогональны между собой.

Для ортогонализации матрицы планирования проводится замена переменных следующего вида:

$$z_i^2 = x_i^2 - a_{0i}; \quad z_i^3 = x_i^3 - c_{0i}x_i; \quad z_i^4 = x_i^4 - a_{1i}x_i^2 - a_{2i};$$

$$z_i^5 = x_i^5 - c_{1i}x_i^3 - c_{2i}x_i; \quad z_i^6 = x_i^6 - a_{3i}x_i^3 - a_{4i}x_i^2 - a_{5i}$$

и т.д., где  $a_0 - a_5$  и  $c_0 - c_2$  - неизвестные коэффициенты замены переменных;  $i$  - номер переменной.

Коэффициенты должны быть выбраны так, чтобы обеспечить равенство нулю всех недиагональных элементов информационной матрицы Фишера. Исходя из этого условия, составляется система уравнений, которая позволяет найти искомые коэффициенты замены  $a_i$  и  $c_i$ . Пример такой системы для полинома третьей степени приведен ниже:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (x_{ij}^2 - a_{0i}) = 0, & i = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n (x_{ij}^3 - c_{0i}x_{ij}) = 0, & i = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n (x_{ij}^2 - a_{0i})(x_{kj}^2 - a_{0k}) = 0, & i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{i+1, n}; \\ \sum_{j=1}^n (x_{ij}^3 - c_{0i}x_{ij})(x_{kj}^3 - c_{0k}x_{kj}) = 0, & i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{i+1, n}. \end{cases}$$

Решение этой системы выглядит следующим образом:

$$a_{0i} = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2}{N}; \quad c_{0i} = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}^3}{\sum_{j=1}^n x_{ij}}.$$

### Пример 2.8.

Составить план дробного факторного эксперимента  $S^{n-p_2}$ , с помощью которого можно для четырех факторов ( $n=4$ ) получить модель в виде квадратичного полинома ( $d=2$ ).

По соотношению (2.165) или по таблице 2.3 убеждаемся в возможности получения требуемой модели с помощью ДФЭ  $S^{4-p_2}$ :  $n = 4 = d+2 = 4$ . Определяем степень дробности плана  $p_2 = n-2 = 2$ .

Делим факторы на две группы: первая численностью  $n_1=2$  содержит  $x_1$  и  $x_2$ , а вторая -  $x_3$  и  $x_4$ .

Определяем необходимое число уровней варьирования факторов:  $S = d+1 = 3$  и значения уровней (табл.2.2):  $-1, 0, +1$ .

Строим план ПФЭ  $3^2$  для факторов  $x_1$  и  $x_2$  (см. матрицу планирования).

Для второй группы факторов в качестве генерирующих соотношений используем два ортогональных латинских квадрата, размером  $S \times S$ , т.е.  $3 \times 3$ , (см. табл.П.1) первый для  $x_3$ , а второй для  $x_4$ .

Устанавливаем соответствие между элементами квадратов и уровнями варьирования факторов: 1 уровень  $= -1$ ; 2 уровень  $= 0$ ; 3 уровень  $= +1$ .

Считывая квадраты построчно, определяем законы изменения факторов  $x_3$  и  $x_4$  в ходе эксперимента и заполняем матрицу планирования:

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1	-	-	-(1)	-(1)
2	0	-	0(2)	0(2)
3	+	-	+(3)	+(3)
4	-	0	0(2)	+(3)
5	0	0	+(3)	-(1)
6	+	0	-(1)	0(2)
7	-	+	+(3)	0(2)
8	0	+	-(1)	+(3)
9	+	+	0(2)	-(1)

По составленному плану можно провести активный эксперимент и построить модель в виде квадратичного полинома

$$y = B_0 + \sum_{i=1}^4 B_i x_i + \sum_{i=1}^4 B_{ii} x_i^2.$$

Многоуровневый дробный факторный эксперимент позволяет получать модели только в виде степенных полиномов, не содержащих эффектов взаимодействия факторов

$$y = B_0 + \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n B_i^{(k)} x_i^k, \quad (2.17)$$

т.е. не решает поставленную задачу. Для ее решения используют свойство аддитивности полинома, в соответствии с которым модель можно формировать по частям. Такой подход реализуется с помощью комбинированных планов, которые состояются из двух дробных реплик: многоуровневой  $C^{n-P_2}$  и двухуровневой  $2^{n-P_1}$ . Многоуровневый ДФЭ предназначен для получения части искомого полинома в виде (2.17), а двухуровневый - для оценки эффектов парных взаимодействий  $\sum_{i \neq 1}^n B_{ii} x_i x_1$ . Объединение этих частей дает искомую модель (2.15).

Например, при построении модели в виде квадратичного полинома для четырех факторов (см. пример 2.8) комбинированный план будет состоять из плана ДФЭ  $3^{4-2}$ , который приведен в примере, и двухуровневого плана, степень дробности которого выбирается из условия  $P_1 \leq P_{гр}$ . Для  $n=4$   $P_{гр} = \frac{n}{3} - 1 = 0$  и в качестве двухуровневого плана придется использовать ПФЭ  $2^4$ .

Таким образом, комбинированный план будет иметь следующую структуру

$$3^{4-2} + 2^4,$$

а обработка результатов эксперимента, проведенного по такому плану, позволит получить модель вида

$$y = B_0 + \sum_{i=1}^4 B_i x_i + \sum_{i \neq 1}^4 B_{ii} x_i x_1 + \sum_{i=1}^4 B_{ii} x_i^2.$$

Объем эксперимента при этом равен  $N = 9 + 16 = 25$  опытов.

### Пример 2.9.

Определить структуру и объем комбинированного плана, с

помощью которого для  $n=6$  факторов можно получить модель в виде полинома четвертой степени ( $d=4$ ).

Комбинированный план будет состоять из двух дробных реплик  $C^{6-P_2}$  и  $2^{6-P_1}$ .

Найдем параметры многоуровневого плана. Число уровней варьирования факторов  $C=d+1=5$ . Степень дробности  $P_2=n-2=6-2=4$ . Следовательно, будет использован ДФЭ  $5^{6-4}$ . Генерирующие соотношения - четыре ортогональных латинских квадрата размером  $5 \times 5$  (табл. П.1).

Степень дробности двухуровневого плана  $P_1 \leq P_{гр} = \frac{6}{3} - 1 = 1$ . Поэтому эта часть комбинированного плана имеет вид ДФЭ  $2^{6-1}$ , а структура всего плана такова:

$$5^{6-4} + 2^{6-1}.$$

Объем комбинированного плана  $N = 25 + 32 = 57$  опытов.

Комбинированные планы оказываются полезными для компенсации и другого недостатка многоуровневых ДФЭ, связанного с ограничением на число факторов  $n$  при построении полинома степени  $d$ :  $n \leq d+2$ . Если число факторов оказалось большим, чем установлено этим условием, то предлагается разбить множество  $n$  на  $k$  подмножеств, для каждого из которых это условие удовлетворено. Затем составляются многоуровневые планы для каждого подмножества:  $C^{n_i - P_{2i}}$ ,  $i=1+k$ . Двухуровневый план составляется для всего множества факторов, так как он предназначен для оценки их взаимодействий. Если проводить двухуровневые эксперименты для каждого подмножества отдельно, то можно оценить эффекты взаимодействия факторов внутри подмножества, а перекрестные взаимодействия между факторами разных подмножеств будут потеряны. Следовательно, в рассмотренном случае комбинированные планы должны иметь структуру

$$\sum_{i=1}^k C^{n_i - P_{2i}} + 2^{n - P_{гр}}, \quad (2.18)$$

### Пример 2.10.

Определить структуру и объем комбинированного плана, с помощью которого для  $n=8$  факторов можно получить модель в виде полинома третьей степени ( $d=3$ ).

Проверим условие (2.166) и убедимся в том, что оно не выполняется:  $n = 8 > d+2 = 5$ . Поэтому надо разбить факторы на группы. Анализ показывает, что достаточно двух групп, при определении численности которых по условию (2.166) или по табл.2.3 возможны два варианта: а)  $n_1=n_2=4$  и б)  $n_1=5, n_2=3$ .

Число уровней варьирования факторов  $C=d+1=4$ . Следовательно, в качестве генерирующих соотношений будут использованы ортогональные латинские квадраты размером  $4 \times 4$ .

Определяем структуру многоуровневого блока в каждом из вариантов:

а) степень дробности каждого плана  $p_{21} = p_{22} = 4-2 = 2$  и структура многоуровневого блока  $4^{4-2} + 4^{4-2}$ ;

б) степень дробности планов  $p_{21} = 5-2 = 3, p_{22} = 3-2 = 1$ , структура многоуровневого блока  $4^{5-3} + 4^{3-1}$ .

В общем случае эти варианты эквивалентны и можно выбирать любой из них.

Определяем степень дробности двухуровневого плана

$$p_{гр1} = \frac{8}{3} - 1 \approx 2 \text{ и его вид: ДФЭ } 2^{8-2}$$

Таким образом, комбинированный план будет иметь следующую структуру:

$$4^{4-2} + 4^{4-2} + 2^{8-2} \text{ или } 4^{5-3} + 4^{3-1} + 2^{8-2},$$

причем при проведении эксперимента блоки реализуются и обрабатываются последовательно.

Объем комбинированного плана  $N = 4^2 + 4^2 + 2^6 = 96$  опытов.

Различия между вариантами а) и б) многоуровневого блока возникнут в том случае, когда РЭУ состоит, например, из двух слабо влияющих друг на друга каскадов. Целесообразно так разбить факторы, чтобы каждая группа относилась к одному каскаду. Тогда можно ожидать, что взаимодействия между факторами разных групп окажутся пренебрежимо малыми. Поэтому двухуровневый эксперимент тоже можно проводить по частям, что обеспечит значительное сокращение его объема. Так, объем двухуровневого блока:

а)  $2^4 + 2^4 = 32$ , б)  $2^{5-1} + 2^3 = 24$ , а общий объем эксперимента: а)  $4^2 + 4^2 + 32 = 64$  опыта, б)  $4^2 + 4^2 + 24 = 56$  опытов вместо 96 опытов в общем случае.

**ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ПЛАНЫ.** Ортогональные центральные композиционные планы (ОЦКП) используются для получения полиномиальных моделей второй, третьей и четвертой степени. Геометрической интерпретацией таких планов может служить набор точек, лежащих на концентрических гиперсферах (сферы размерности  $n$ ) центры которых совпадают с центром области планирования. Основой плана служат  $(d-1)$  ядер, в качестве которых используются полные факторные эксперименты  $2^n$  с различающимися уровнями варьирования факторов. К ядрам добавляется центральная точка с нормированными координатами  $(0,0,\dots,0)$  — сфера нулевого радиуса и так называемые звездные точки с координатами  $(0,0,\dots,\pm a,\dots,0)$ , лежащие на звездной сфере радиусом  $a$ . Объем эксперимента

$$N = N_{я1} + \dots + N_{я(d-1)} + N_a + N_0 = 2^n(d-1) + 2n + 1, \quad (2.19)$$

где  $N_{яi}$  — объем  $i$ -го ядра;

$N_a = 2n$  — число звездных точек (по две на каждый фактор);

$N_0 = 1$  — число центральных точек.

Наиболее широко ОЦКП используется для получения моделей в виде полных квадратичных полиномов

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i \neq j}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2. \quad (2.20)$$

План имеет одно ядро, которым служит ПФЭ  $2^n$  или ДФЭ  $2^{n-p}$ , с нормированными уровнями варьирования факторов  $x_i = \pm 1$ . В табл.2.4 приводится соответствующая матрица планирования, содержащая экспериментальную и расчетную части.

Анализ матрицы планирования показывает, что, хотя экспериментальная часть матрицы ортогональна, пары столбцов вида  $x_i^2$  и  $x_0$ , а также  $x_i^2$  и  $x_1^2$  оказываются неортогональными ( $\sum_{j=1}^n x_{ij}^2 x_{0j} = N_{я} + 2a^2, \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 x_{1j}^2 = N_{я}$ ). Для их ортогонализации проводится замена переменных

$$z_i^2 = x_i^2 - a_i.$$

Таблица 2.4

	№	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$y$	$x_0$	$x_1^2$	...	$x_n^2$
$N_{Я} = 2^n$ ИЛИ $N_{Я} = 2^{n-p_1}$	1	-	-	...	-	$y_1$	+	+	...	+
	2	+	-	...	-	$y_2$	+	+	...	+
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮
	$N_{Я}$	+	+	...	+	$y_{N_{Я}}$	+	+	...	+
$N_a = 2n$	$N_{Я}+1$	$a$	0	...	0	⋮	+	$a^2$	...	0
	$N_{Я}+2$	$-a$	0	...	0	⋮	+	$a^2$	...	0
	$N_{Я}+3$	0	$a$	...	0	⋮	+	0	...	0
	$N_{Я}+4$	0	$-a$	...	0	⋮	+	0	...	0
	⋮	0	0	...	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮
	⋮	0	0	...	$a$	⋮	+	0	...	$a^2$
	$N_{Я}+2n$	0	0	...	$-a$	⋮	+	0	...	$a^2$
$N_0$	$N$	0	0	...	0	$y_N$	+	0	...	0

При этом в правой части матрицы планирования столбцы  $x_i^2$  заменяются на столбцы  $z_i^2$ . Исходя из требований ортогональности плана ( $\sum_{j=1}^m z_{ij}^2 \cdot x_{0j} = 0$  и  $\sum_{j=1}^m z_{ij}^2 \cdot z_{lj}^2 = 0$ ), составляется система уравнений;

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m (x_{ij}^2 - a_i) = 0 ; & i = \overline{1, n} ; \\ \sum_{j=1}^m (x_{ij}^2 - a_i) \cdot (x_{lj}^2 - a_l) = 0 ; & i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1+1, n} . \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^m x_{ij}^2}{N} = \bar{x}_i^2 = \frac{1}{N} (N_{Я} + 2a^2),$$

т.е. значение  $a_i$  не зависит от номера переменной  $i$ , следовательно, индекс  $i$  можно опустить ( $a_i = a$ ). Подстановка  $a = \frac{1}{N} (N_{Я} + 2a^2)$  во второе уравнение дает

$$\sum_{j=1}^m (x_{ij}^2 - a) \cdot (x_{lj}^2 - a) = 0, \quad \text{ИЛИ}$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^2 \cdot x_{lj}^2 - a \cdot \sum_{j=1}^m (x_{ij}^2 + x_{lj}^2) + \sum_{j=1}^m a^2 = 0.$$

Так как  $\sum_{j=1}^m x_{ij}^2 \cdot x_{lj}^2 = N_{Я} \cdot \sum_{j=1}^m (x_{ij}^2 + x_{lj}^2) = 2(N_{Я} + 2a^2)$ , то

$$N_{Я} - \frac{1}{N} (N_{Я} + 2a^2) \cdot 2(N_{Я} + 2a^2) + \frac{N}{N^2} (N_{Я} + 2a^2) = 0.$$

Таким образом, получено биквадратное уравнение относительно радиуса звездной сферы  $a$ :

$$4a^4 + 4N_{Я}a^2 - N_{Я}(N_{Я} + N_0) = 0.$$

Его решение

$$a = \sqrt{0,5 (\sqrt{N_{Я}N - N_{Я}})} . \quad (2.21)$$

Следовательно, координаты звездных точек зависят от числа факторов  $n$  и используемого ядра плана: ПФЭ  $2^n$  или ДФЭ  $2^{n-p_1}$ . Значения  $a$  для различных  $n$  в случаях  $p_1=0$  (ПФЭ) и  $p_1=1$  (ДФЭ) приведены в таблице 2.5.

Таблица 2.5

$n$	2	3	4	5	6	7	
$a$	$p=0$	1	1,225	1,414	1,610	1,760	1,870
	$p=1$	-	1,158	1,355	1,550	1,730	1,870

Обработка результатов эксперимента проводится по общим правилам. Получаемая модель содержит переменные  $\tilde{x}_i^2$ . Для перехода к искомому полиному (2.20) необходимо выполнить соответствующие преобразования:



$$y = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i x_i + \sum_{i \neq j}^n B_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n B_{ii} (x_i^2 - \bar{x}_i^2) =$$

$$= B_0^* + \sum_{i=1}^n B_i x_i + \sum_{i \neq j}^n B_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n B_{ii} x_i^2,$$

где  $B_0^* = B_0 - \sum_{i=1}^n B_{ii} \bar{x}_i^2$ .

План обладает свойством композиционности, т.е. позволяет наращивать результаты. Получив по результатам ПФЭ  $2^n$  или ДФЭ  $2^{n-p}$ , модель в виде неполного квадратичного полинома и убедившись, что она не удовлетворяет предъявляемым требованиям, можно нарастить план блоками звездных и центральных точек и повысить порядок модели.

### Пример 2.11.

Составить матрицу планирования ОЦП, позволяющего получить модель в виде квадратичного полинома для  $n=3$  факторов. Матрица должна содержать экспериментальную и расчетную части.

Предположим, что в качестве ядра плана будет использован полный факторный эксперимент  $2^3$ . Определим размер матрицы планирования. Число строк равно числу опытов  $N = N_{\text{я}} + N_{\text{а}} + N_0 = 2^3 + 2 \cdot 3 + 1 = 15$ . Число столбцов равно числу коэффициентов модели  $k+1 = 1 + n + C_n^2 + n = 1 + 3 + 3 + 3 = 10$ .

По табл. 2.5 найдем длину звездного плеча  $a=1,225$ . Вычислим значения вводимых переменных  $z_{ij}^2 = x_{ij}^2 - a$ :

$$a = \frac{1}{N} (N_{\text{я}} + 2a^2) = \frac{1}{15} (8 + 2 \cdot 1,225^2) = 0,735.$$

При  $x_{ij} = \begin{cases} \pm 1, & z_{ij}^2 = 0,265; \\ 0, & z_{ij}^2 = -0,735; \\ \pm a, & z_{ij}^2 = 0,765. \end{cases}$

Составим искомую матрицу планирования.

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$z_1^2$	$z_2^2$	$z_3^2$
I	-	-	-	$y_1$	+	+	+	0,265	0,265	0,265
2	+	-	-	$y_2$	-	-	+	0,265	0,265	0,265
3	-	+	-	$y_3$	-	+	-	0,265	0,265	0,265
4	+	+	-	$y_4$	+	-	-	0,265	0,265	0,265
5	-	-	+	$y_5$	+	-	-	0,265	0,265	0,265
6	+	-	+	$y_6$	-	+	-	0,265	0,265	0,265
7	-	+	+	$y_7$	-	-	+	0,265	0,265	0,265
8	+	+	+	$y_8$	+	+	+	0,265	0,265	0,265
9	1,225	0	0	$y_9$	0	0	0	0,765	-0,735	-0,735
10	-1,225	0	0	$y_{10}$	0	0	0	0,765	-0,735	-0,735
11	0	1,225	0	$y_{11}$	0	0	0	-0,735	0,765	-0,735
12	0	-1,225	0	$y_{12}$	0	0	0	-0,735	0,765	-0,735
13	0	0	1,225	$y_{13}$	0	0	0	-0,735	-0,735	0,765
14	0	0	-1,225	$y_{14}$	0	0	0	-0,735	-0,735	0,765
15	0	0	0	$y_{15}$	0	0	0	-0,735	-0,735	-0,735

Ортогональный центральный композиционный план третьего порядка позволяет получить модель в виде кубического полинома. Он содержит два ядра, в качестве которого используются два ПФЭ с различными уровнями варьирования факторов:  $x_i^{(1)} = \pm a$  и  $x_i^{(2)} = \pm c$ ,  $2n$  звездных точек и центральную точку. Общий объем эксперимента  $N = 2 \cdot 2^n + 2n + 1$ . Как и в предыдущем случае, для ортогонализации матрицы планирования проводится замена переменных и выбор длины звездного плеча  $a$ .

Ортогональность столбцов  $x_i^2$  и  $x_0$  достигается введением переменных  $z_i^2 = x_i^2 - \bar{x}_i^2$ . Столбцы новых переменных  $z_i^2$  и  $z_0^2$  оказываются ортогональными, если величина  $a$  определяется уравнением

$$[2^{n-1} (a^2 + c^2) + a^2]^2 = 2^{n-2} \cdot n (a^4 + c^4).$$

Для ортогонализации столбцов  $x_i$  и  $x_i^3$  вводятся переменные

$$z_i^3 = x_i(x_i^2 - \eta), \quad \text{где} \quad \eta = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}^4}{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2}.$$

Значения  $\bar{x}_i^2$ ,  $a$  и  $\eta$ , обеспечивающие ортогональную матрицу планирования ОЦКП, могут быть найдены при решении следующей системы:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_i^2 &= [2^n(a^4 + c^4) / N]^{0,5} \\ [a^2 + 2^{n-1}(a^2 + c^2)]^2 &= 2^{n-2} \cdot N(a^4 + c^4) \\ \eta &= \frac{1}{N \bar{x}_i^2} [2a^4 + 2^n(a^4 + c^4)] \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Уровни варьирования факторов  $\pm a$  и  $\pm c$  выбираются из условия по возможности равномерного распределения экспериментальных точек в факторном пространстве.

Значения параметров ОЦКП третьего порядка приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7

n	N	a	c	a	$z_i^2$	$\eta$
2	13	1	2	2,198	2,287	3,636
3	23	1	2	2,822	2,430	3,581
4	41	1,4	2	3,060	2,784	4,301
5	75	1,6	2	3,3716	3,388	4,438

## 2.5. Обработка результатов физического эксперимента

Физический активный эксперимент проводится на физической модели РЭУ — его макете. В ходе такого эксперимента факторы изменяются в соответствии с планом и устанавливаются на определяемых планом уровнях. При этом значения факторов должны

измеряться с пренебрежимо малой ошибкой, что позволяет считать их детерминированными величинами. Значения же выходных параметров  $y_j$ ,  $j=1-N$ , измеряемые в каждом опыте, суть случайные величины, разброс которых характеризуется дисперсией шума опыта  $\sigma^2$ . Искомые коэффициенты полиномиальной модели являются функциями выходного параметра, поэтому они также будут случайными величинами с математическим ожиданием  $m\{B_i\}$  и дисперсией  $\sigma^2\{B_i\}$ . И полиномиальная модель для ортогональных планов ( $\text{cov}\{B_i, B_l\} = 0$ ) в целом будет представлена так:

$$\left\{ \begin{aligned} m\{y\} &= \sum_{k=0}^d \sum_{i=1}^n m\{B_i^{(k)}\} x_i^k + \sum_{i \neq l}^n m\{B_{il}\} x_i x_l, \\ \sigma^2\{y\} &= \sum_{k=0}^d \sum_{i=1}^n x_i^{2k} \sigma^2\{B_i^{(k)}\} + \sum_{i \neq l}^n x_i^2 x_l^2 \sigma^2\{B_{il}\}. \end{aligned} \right. \quad (2.23)$$

Математические ожидания коэффициентов  $m\{B_i\}$  определяются с помощью метода наименьших квадратов по приведенным ранее формулам и в дальнейшем обозначаются просто  $B_i$ .

Кроме того, возникает необходимость в анализе статистических свойств, во-первых, объекта эксперимента, во-вторых, вычисляемых коэффициентов модели и, в-третьих, модели в целом. Поэтому проводится статистический анализ, который включает в себя проверку воспроизводимости эксперимента, оценку значимости коэффициентов модели и проверку адекватности модели результатами эксперимента.

**Проверка воспроизводимости эксперимента.** Эксперимент считается воспроизводимым, если при его повторении через некоторый конечный промежуток времени значения выходного параметра  $y_j$ , соответствующие каждому опыту, будут различаться лишь в пределах, ограниченных дисперсией шума опыта  $\sigma^2$ . Это означает, что объект активного эксперимента стационарен, его параметры не подвержены неконтролируемому изменению, чему соответствует постоянство построчной дисперсии

$$\sigma^2\{y_j\} = \text{const}, \quad j=1-N.$$

Для проверки этого условия в каждой строке матрицы планирования проводится по  $\gamma=4+6$  параллельных опытов и вычисляются статистические оценки построчных дисперсий значений выходного

параметра

$$s_j^2 = \frac{1}{\gamma - 1} \sum_{l=1}^{\gamma} (y_{jl} - \bar{y}_j)^2,$$

где  $\gamma$  - число параллельных опытов;  $l$  - номер параллельного опыта;  $\bar{y}_j$  - среднее значение выходного параметра в  $j$ -м опыте.

Однородность полученных дисперсий, т.е. принадлежность всех построчных выборок  $y_j$  к одной генеральной совокупности, оценивается с помощью критерия Кохрена. Критерий Кохрена  $G$  формируется как отношение максимальной построчной дисперсии  $s_{j\max}^2$  к сумме всех дисперсий

$$G = s_{j\max}^2 / \sum_{j=1}^n s_j^2.$$

Найденное значение  $G$  сравнивается с табличным  $G_{\text{табл}}$  (см. табл. П.2). Для определения нужного значения  $G_{\text{табл}}$  следует выбрать уровень значимости (вероятность ошибки)  $q$ , который для технических задач берется в пределах от 0,05 до 0,2, и найти число степеней свободы  $f_1 = \gamma - 1$  и  $f_2 = N$ .

В статистике под числом степеней свободы понимают разность между количеством проведенных опытов и числом наложенных связей - вычисленных по результатам этих опытов величин или налагаемых условий. Число степеней свободы  $f_1$  связано с построчной дисперсией, которая вычисляется по результатам  $\gamma$  параллельных опытов. Величина  $f_2$  оценивает весь массив сопоставляемых построчных дисперсий. Допускается, в целях сокращения времени, проводить параллельные опыты не для всех  $N$  строк матрицы планирования, а только для  $k$  случайно выбранных строк. В этом случае  $f_2 = k$ .

Если при сравнении оказалось, что  $G < G_{\text{табл}}$ , то может быть принята гипотеза об однородности дисперсий, что свидетельствует о воспроизводимости эксперимента. При этом все построчные дисперсии  $s_j^2$  заменяются некоторой усредненной  $s_y^2$  - статистической оценкой дисперсии шума опыта

$$s_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n s_j^2.$$

которой соответствует  $f_3 = N(\gamma - 1)$  степеней свободы.

Если же проверка на воспроизводимость дала отрицательный результат:  $G \geq G_{\text{табл}}$ , то необходимо увеличить число параллельных опытов, чтобы уточнить оценки  $s_j^2$ , или стабилизировать условия проведения эксперимента.

### Пример 2.12.

Проверить воспроизводимость полного факторного эксперимента  $2^3$ , результаты которого представлены матрицей планирования:

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$				$\bar{y}_j$	$s_j^2$
				1	2	3	4		
1	-	-	-	10,7	11,5	11,2	11,0	11,1	0,111
2	+	-	-	14,0	13,2	13,8	13,4	13,6	0,133
3	-	+	-	12,8	12,9	13,1	13,2	13,0	0,033
4	+	+	-	16,6	16,9	16,8	16,5	16,7	0,033
5	-	-	+	8,3	8,1	8,2	8,6	8,3	0,047
6	+	-	+	9,0	9,0	9,3	9,1	9,1	0,020
7	-	+	+	8,4	8,5	8,9	9,0	8,7	0,087
8	+	+	+	11,0	11,3	10,9	11,2	11,1	0,033

Находим  $\sum_{j=1}^8 s_j^2 = 0,497$ ,  $s_{j\max}^2 = 0,133$ ,

$$G = s_{j\max}^2 / \sum_{j=1}^8 s_j^2 = 0,133 / 0,497 = 0,267,$$

$$f_1 = \gamma - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \text{и} \quad f_2 = N = 8.$$

Выбираем уровень значимости  $q=0,05$  и по таблице П.2 определяем  $G_{\text{табл}} = 0,4377$ . Сравнивая  $G$  с  $G_{\text{табл}}$ , убеждаемся, что  $G=0,267 < G_{\text{табл}}=0,4377$ , т.е. эксперимент воспроизводим и ему соответствует дисперсия шума опыта  $s_j^2 = 0,497 / 8 = 0,062$ .

**Оценка значимости коэффициентов модели.** Оценка значимости коэффициентов модели на фоне шума опыта проводится с помощью критерия Стьюдента. В общем случае для каждого коэффициента

вычисляется отношение  $t_i = |b_i| / S(b_i)$ , где  $S(b_i)$  - среднее квадратичное отклонение, а соответствующая дисперсия коэффициента  $S^2(b_i)$  для ортогональных планов определяется так:

$$S^2(b_i) = S_y^2 / \sum_{j=1}^m x_{ij}^2.$$

Полученные значения  $t_i$  сравниваются с табличными, найденными для выбранного уровня значимости  $q$  и числа степеней свободы  $f_3 = N(\gamma-1)$ , соответствующей дисперсии шума опыта  $S_y^2$ . При  $t_i > t_{\text{табл}}$  коэффициент  $b_i$  признается значимым. В искомую модель РЭУ включаются только те члены, которым соответствуют значимые коэффициенты.

При использовании двухуровневых планов ПФЭ  $2^n$  и ДФЭ  $2^{n-p}$ , дисперсии всех коэффициентов равны между собой:

$$S^2(b_i) = \frac{1}{N} S_y^2, \quad i=1-m,$$

где  $m$  - число искомых коэффициентов модели.

Поэтому коэффициенты можно сравнивать с уровнем шума опыта, соответствующим доверительному интервалу нуля:  $0 \pm t_{\text{табл}} S(b_i)$ . Если коэффициент превосходит уровень шума  $|b_i| > t_{\text{табл}} S(b_i)$ , то он значим, а если потонул в шуме - незначим.

### Пример 2.13.

При обработке результатов ПФЭ  $2^3$ , приведенных в примере 2.12, получены следующие значения математических ожиданий коэффициентов модели:

$$\begin{aligned} b_0 &= 11,450; & b_1 &= 1,175; & b_2 &= 0,925; & b_3 &= -2,150; \\ b_{12} &= 0,350; & b_{13} &= -0,375; & b_{23} &= -0,325; & b_{123} &= 0,050. \end{aligned}$$

Оценить значимость коэффициентов и найти оценку дисперсии модели  $S^2(y)$ .

Учитывая, что все коэффициенты модели имеют одинаковую дисперсию  $S^2(b_i) = \frac{1}{N} S_y^2$ , и используя результаты примера 2.12,

$$\text{найдем } S^2(b_1) = \frac{1}{8} \cdot 0,062 = 0,0077 \quad \text{и} \quad S(b_1) = 0,088.$$

Выберем уровень значимости  $q = 0,05$ , вычислим  $f_3 = N(\gamma-1) = 8(4-1) = 24$  и определим  $t_{\text{табл}} = 2,06$  (табл.П.3). Уровень

шума опыта при этом  $t_{\text{табл}} = S(b_1) = 2,06 \cdot 0,088 = 0,181$ . Сравнивая с ним  $|b_i|$ , убеждаемся, что все коэффициенты, кроме  $b_{123}$ , значимые и будут включены в формируемую модель.

Далее найдем оценку дисперсии модели  $S^2(y)$ , учитывая, что для плана двухуровневого ПФЭ дисперсии коэффициентов одинаковы и равны  $S_y^2 / N$ :

$$S^2(y) = \frac{1}{N} S_y^2 \left[ x_0^2 + \sum_{i=1}^3 x_i^2 + \sum_{i \neq 1}^3 x_i^2 x_1^2 \right] = 0,0078 \left[ x_0^2 + \sum_{i=1}^3 x_i^2 + \sum_{i \neq 1}^3 x_i^2 x_1^2 \right].$$

Число значимых коэффициентов  $a=7$ , а  $x_1^2=1$ , поэтому в точках плана  $S^2(y) = a S_{b_i}^2 = 7 \cdot 0,0078 = 0,054$ .

**Проверка адекватности модели.** При осуществлении этой проверки в соответствие объекту - РЭУ ставятся две выборки равного объема  $N$ : одна, состоящая из значений выходного параметра  $y_{jP}$ , вычисленных по модели в точках, которые соответствуют проведенным опытам, и вторая, содержащая экспериментальные значения  $y_{jЭ}$ . Первая выборка характеризуется так называемой дисперсией адекватности

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{1}{(N-a)} \sum_{j=1}^N (y_{jЭ} - y_{jP})^2,$$

где  $a$  - число значимых коэффициентов модели;

$S_{\text{ад}}^2$  соответствует число степеней свободы  $f_4 = N-a$ . Вторая выборка имеет дисперсию  $S_y^2$  с числом степеней свободы  $f_3 = N(\gamma-1)$ . Сопоставляя эти дисперсии, можно проверить, относятся ли обе выборки к одной генеральной совокупности (объекту), т.е. проверить адекватность модели результатам эксперимента. Проверка проводится по критерию Фишера, который формируется как отношение дисперсии адекватности к дисперсии шума опыта:  $F = S_{\text{ад}}^2 / S_y^2$ . Получаемое значение  $F$  сравнивается с табличным  $F_{\text{табл}}$ , которое определяется для выбранного уровня значимости  $q$  и чисел степеней свободы  $f_3$  и  $f_4$ . При  $F < F_{\text{табл}}$  модель адекватна результатам эксперимента, а при  $F > F_{\text{табл}}$  - неадекватна.

Критерий адекватности часто применяется при оценке пригодности модели для дальнейшего использования. Однако при работе с радиоэлектронными устройствами прежде, чем отказываться от неадекватной модели, следует проанализировать причины неадекватности. Таких причин может быть две. Первая - слишком

большая дисперсия адекватности, вызванная большими отклонениями расчетных значений выходного параметра  $y_{jр}$  от экспериментальных  $y_{jэ}$ , т.е. - низкой точностью модели. Такая модель действительно не годится для использования и надо принять меры по повышению ее точности, изменив порядок полинома или состав факторов. Вторая причина неадекватности - малая дисперсия шума опыта  $S_y^2$ , что характерно для РЭУ, свидетельствует о стабильности объекта и является его достоинством, а не недостатком. В этом случае надо оценить точность модели, и если она приемлема, то модель признается пригодной для дальнейшего использования, а в качестве критерия пригодности выступает критерий точности.

### Пример 2.14.

Проверить адекватность модели, полученной в примере 2.12.

Рассчитываем значения выходного параметра в точках плана:

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_j$	11,15	13,55	12,95	16,75	8,25	9,15	8,75	11,05

Определяем дисперсию адекватности, учитывая, что число значимых коэффициентов модели  $a=7$ :

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{8-7} [(11,15 - 11,1)^2 + (13,55 - 13,6)^2 + (12,95 - 13)^2 + (16,75 - 16,7)^2 + (8,25 - 8,3)^2 + (9,15 - 9,1)^2 + (8,75 - 8,7)^2 + (11,05 - 11,1)^2] = 0,02$$

Так как  $S_y^2 = 0,062$  (см. пример 2.12), то критерий Фишера  $F = S_{ад}^2 / S_y^2 = 0,02 / 0,062 = 0,32$ .

Задаем уровень значимости  $q = 0,05$ , находим число степеней свободы  $f_3 = N(\gamma-1) = 8(4-1) = 24$ ,  $f_4 = N-a = 8-7 = 1$  и определяем  $F_{табл} = 4,3$ . Сравниваем полученное значение  $F$  с  $F_{табл}$ :  $F = 0,32 < F_{табл} = 4,3$  и убеждаемся, что модель оказалась адекватной результатам эксперимента.

Полные ряды ортогональных латинских квадратов

3 x 3

1	2	3	1	2	3
2	3	1	3	1	2
3	1	2	2	3	1

4 x 4

1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	3	4	1	2
3	4	1	2	4	1	2	3
4	1	2	3	2	3	4	1

5 x 5

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	5	1	2	3	4
4	5	1	2	3	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	4	5	1	2	3

7 x 7

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1	3	4	5	6	7	1	2
3	4	5	6	7	1	2	5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3	7	1	2	3	4	5	6
5	6	7	1	2	3	4	2	3	4	5	6	7	1
6	7	1	2	3	4	5	4	5	6	7	1	2	3
7	1	2	3	4	5	6	6	7	1	2	3	4	5

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
5	6	7	1	2	3	4	6	7	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	1	4	5	6	7	1	2	3
6	7	1	2	3	4	5	2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2	7	1	2	3	4	5	6
7	1	2	3	4	5	6	5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3	3	4	5	6	7	1	2

Таблица П.2

Критерий Кохрена,  $q = 0,05$ 

$f_2$	$f_1$						
	1	2	3	4	5	6	7
2	9985	9700	9392	9057	8584	8534	8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2299
15	4709	3340	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	3434	2354	1907	1656	1593	1474	1286
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	1737	1132	0895	0765	0682	0623	0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

В таблице приведены лишь десятичные знаки, следующие после запятой, перед которой при пользовании таблицей следует ставить ноль.

Таблица П.3

t-распределение Стьюдента

$f_3$	Уровни значимости $q$						
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	4,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	2,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	2,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	2,06	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	2,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,15	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	3,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15	3,85
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,65
40	1,30	1,66	2,02	2,42	2,70	2,97	3,55
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

## F-распределение Фишера

f <sub>4</sub>	Уровень значимости 0,05								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,5	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	3,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,1	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1988. 560 с.
2. Системы автоматизированного проектирования в радиоэлектронике. Справочник / Под ред. И.П. Норенкова. М.: Радио и связь, 1986. 368 с.
3. Разевиг В.Д. Применение программ P-CAD и PSpice для схмотехнического моделирования на ПЭВМ: в 4 выпусках. Вып. 2: Модели компонентов аналоговых устройств. М.: Радио и связь, 1992. 64 с.
4. Баскаков С.И. Лекции по теории цепей. М.: Изд-во МЭИ, 1991. 224 с.
5. Системы автоматизированного проектирования: В 9-ти кн. Кн 5. Автоматизация функционального проектирования: Учебн. пособие для вузов / П.К. Кузьмик, В.Б. Маничев / Под ред. И.П. Норенкова. М.: Высш. шк., 1986. 144 с.
6. Сахаров Ю.С. Применение методов планирования эксперимента при исследовании радиоэлектронных устройств. М.: МЭИ, 1980. 84 с.
7. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976. 278 с.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение.....	3
I. Автоматизированный анализ электронных схем	
I.1. Математические модели электронных схем.....	5
I.2. Анализ линейных схем в частотной области.....	13
I.3. Анализ схем по постоянному току.....	20
I.4. Анализ переходных процессов.....	25
2. Получение полиномиальных математических моделей РЭУ с помощью активного эксперимента	
2.1. Постановка задачи.....	43
2.2. Основные понятия теории планирования эксперимента...50	
2.3. Получение математических моделей РЭУ в виде линей- ных и неполных квадратичных полиномов.....	56
2.4. Получение математических моделей РЭУ в виде сте- пенных полиномов.....	65
2.5. Обработка результатов физического эксперимента.....	80
Приложения.....	87
Литература.....	91

Андрей Вячеславович Назаров

### АВТОМАТИЗАЦИЯ СХЕМОТЕХНИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Учебное пособие по курсу

"Основы САПР РЭА"

(Кафедра конструирования и производства радиоаппаратуры)

Редактор издательства Е.А.Улановская

Технический редактор В.З.Комарова

Корректор Е.Н. Касьянова

Темплан издания МЭИ 1993 г. (II), учебн.

Формат 60x84/16 Подписано к печати 26.06.94 г.

Физ. печ. л. 5,75 Уч.-изд. л. 4,6.

Тираж 300 Изд. № 148 Заказ 620

Типография Издательства МЭИ. Красноказарменная, 13