

Приложение 1
Показатели оценки качества работы СМО

Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/с

№	Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/с
1	Загрузка обслуживающего аппарата СМО (ρ) и загрузка СМО (φ) $\rho = \frac{\varphi}{c} = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \quad \text{где } \rho < 1 \qquad \varphi = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{где } \varphi < c$
2	Вероятность простоя СМО $P_0 = \left[\sum_{i=0}^c \frac{\varphi^i}{i!} + \frac{\varphi^{c+1}}{c! \cdot (c - \varphi)} \right]^{-1}$
3	Вероятность, что в СМО i - заявок, где $i < c$ $P_i = (\varphi^i / i!) P_0$
4	Вероятность, что заняты все «с» ОА и i заявок в очереди $P_{c+i} = \frac{\varphi^{(c+i)}}{c^i \cdot c!} \cdot P_0$
5	Вероятность ожидания заявкой начала обслуживания $P_W = 1 - \sum_{i=0}^{c-1} P_i = \frac{\varphi^c}{(c-1)! \cdot (c - \varphi)} \cdot P_0$
6	Среднее число заявок в очереди СМО (Q) и в СМО (L) $Q = \sum_{i=c}^{\infty} (i-c) \cdot P_i = \frac{\varphi^{c+1} \cdot c \cdot P_0}{c! \cdot (c - \varphi)^2} \qquad L = Q + c \cdot \rho$
7	Дисперсия числа заявок в очереди СМО (D_Q) и в СМО (D_L) $D_Q = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)^2 \cdot P_i - Q^2 \qquad D_L = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot P_i - L^2$
8	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО (W) и в СМО (T) $W = \frac{Q}{\lambda} \qquad T = \frac{L}{\lambda} = W + \frac{1}{\mu}$
9	Дисперсия времени нахождения заявок в очереди СМО (D_W) и пребывания в СМО (D_T) $D_W = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot P_i \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 - W^2 \qquad D_T = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^2 \cdot P_i \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 - T^2$
10	Вероятность, что время ожидания заявки в очереди меньше (t) $P(t_{ож} < t) = 1 - \rho \cdot e^{-(c\mu - \lambda) \cdot t}$
11	Вероятность, что время пребывания заявки в СМО меньше (t)

$$P(t_{np\bar{b}} < t) = 1 - e^{-(c\mu - \lambda) \cdot t}$$

Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/с/0

№	Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/с/0
1	Загрузка СМО и ОА СМО $\varphi = \frac{\lambda}{\mu}$ $\rho = \frac{\varphi}{c} = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$
2	Вероятность простоя СМО $P_0 = [1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2!} + \dots + \frac{\varphi^c}{c!}]^{-1} = [\sum_{i=0}^c \frac{\varphi^i}{i!}]^{-1}$
3	Вероятность, что в СМО, i - заявок $P_i = \frac{\varphi^i}{i!} P_0$, $0 \leq i \leq c$
4	Вероятность отказа заявок в обслуживании $P_{отк} = P_c = \frac{\varphi^c}{c!} P_0$
5	Интенсивность потока заявок, поступающих в СМО на обслуживание $\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda$
6	Коэффициент использования ОА СМО $U = \lambda_c / (c \cdot \mu) = (1 - P_{отк}) \cdot \rho$
7	Среднее число занятых ОА в составе СМО $k_{зан} = U \cdot c = (1 - P_{отк}) \cdot \varphi$
8	Среднее число заявок в очереди на обслуживание и в СМО . $Q = 0$ $L = Q + c \cdot U = c \cdot U$
9	Среднее время пребывания заявок в очереди СМО и в СМО . $W = 0$ $T = 1/\mu = t_0$
10	Относительная и абсолютная пропускная способность СМО $q = (1 - P_{отк})$ $A = q \cdot \lambda$

Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/С/м:

№	Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/С/м
1	Загрузка СМО и ОА СМО $\varphi = \frac{\lambda}{\mu}$ $\rho = \frac{\varphi}{c} = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$
2	Вероятность простоя СМО $P_0 = \left[\sum_{i=0}^{c-1} \frac{\varphi^i}{i!} + \frac{\varphi^c (1 - \rho^{m+1})}{c! \cdot (1 - \rho)} \right]^{-1}$
3	Вероятность, что в СМО, i - заявок $P_i = \frac{\varphi^i}{i!} P_0 \quad \text{где } 1 \leq i \leq c$ $P_i = \frac{\varphi^i}{c! \cdot c^{i-c}} P_0 \quad \text{где } c \leq i \leq (c + m)$
4	Вероятность отказа заявкам в обслуживании $P_{отк} = P_{m+c} = \frac{\varphi^{c+m}}{c! \cdot c^m} P_0$
5	Интенсивность потока заявок, поступающих в СМО на обслуживание $\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda$
6	Коэффициент использования ОА СМО $U = \lambda_c / (c \cdot \mu) = (1 - P_{отк}) \cdot \rho$
7	Среднее число заявок в очереди на обслуживание $Q = \sum_{i=c+1}^{c+m} (i - c) \cdot P_i = \frac{\varphi^{c+m}}{c! \cdot c} \left[\frac{1 - \rho^m [(m+1) - m\rho]}{(1 - \rho)^2} \right] P_0$
8	Среднее число заявок в СМО, в очереди и на обслуживании $L = \sum_{i=1}^{c+m} i \cdot P_i = Q + c \cdot U$
9	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО $W = \frac{Q}{\lambda_c} = \frac{\varphi^c}{c! \cdot c \cdot \mu} \left[\frac{1 - \rho^m [(m+1) - m\rho]}{(1 - \rho)^2} \right] P_0$
10	Среднее время пребывания заявок в СМО $T = L / \lambda_c$
11	Относительная пропускная способность СМО $q = (1 - P_{отк})$
12	Абсолютная пропускная способность СМО $A = q \cdot \lambda$

Немарковские системы массового обслуживания с ожиданием

Согласно метода инвариантов отношения, имеем следующую связь для числа заявок, находящихся в очередях СМО.

$$\frac{Q_{G/G/c}}{Q_{G/G/1}} = \frac{Q_{M/M/c}}{Q_{M/M/1}} \quad \text{Тогда} \quad Q_{G/G/c} = Q_{G/G/1} \frac{Q_{M/M/c}}{Q_{M/M/1}}$$

$$Q_{M/M/c} = \frac{c\rho^{c+1}}{(1-\rho^c)} \quad Q_{M/M/1} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} \quad Q_{G/G/1} = \frac{\rho^2(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2)}{2(1-\rho)}$$

$$Q_{G/G/c} = \frac{c\rho^{c+1}(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2)}{2(1-\rho^c)} \quad L_{G/G/c} = Q_{G/G/c} + c\rho = \frac{c\rho^{c+1}(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2 - 2) + 2c\rho}{2(1-\rho^c)}$$

$$W_{G/G/c} = \frac{Q_{G/G/c}}{\lambda} = \frac{Q_{G/G/c}}{\rho \cdot \mu \cdot c} = \frac{\rho^c(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2)}{2(1-\rho^c) \cdot \mu}$$

$$T_{G/G/c} = \frac{L_{G/G/c}}{\lambda} = \frac{L_{G/G/c}}{\rho \cdot \mu \cdot c} = \frac{\rho^c(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2 - 2) + 2}{2(1-\rho^c) \cdot \mu}$$

Погрешность аналитической модели по сравнению с имитационной.

Сравнение результатов аналитического и имитационного моделирования СМО М/М/с

Загрузка канала ρ	Значения $\Delta_L = \frac{L_{\text{им}} - L_{\text{ан}}}{L_{\text{им}}} \cdot 100\%$ при $v_{\text{вх}}^2 = v_0^2 = 1$			
	Количество каналов обслуживания			
	$c=1$	$c=4$	$c=7$	$c=10$
$\rho=0,3$	- 0,23	- 0,5	0,02	- 0,003
$\rho=0,5$	0,2	- 1,84	- 1,4	- 0,7
$\rho=0,7$	0,05	- 3,13	- 4,64	- 4,25
$\rho=0,9$	0,08	-2,28	- 5,75	- 7,8

Сравнение результатов аналитического и имитационного моделирования СМО G/G/c.

ρ	$v_{\text{вх}}^2$	Значения $\Delta_L = \frac{L_{\text{им}} - L_{\text{ан}}}{L_{\text{им}}} \cdot 100\%$							
		$c=1$		$c=4$		$c=7$		$c=10$	
		$v_0^2=0,5$	$v_0^2=2$	$v_0^2=0,5$	$v_0^2=2$	$v_0^2=0,5$	$v_0^2=2$	$v_0^2=0,5$	$v_0^2=2$
0,3	0,5	7,4	9,5	0,5	0,08	0,01	- 0,09	0,01	- 0,07
	2	- 12,2	- 12,8	- 3,81	- 3,63	- 0,75	- 0,94	- 0,17	- 0,31
0,5	0,5	7,91	7,55	0,82	0,7	- 0,08	- 0,81	- 0,1	- 0,52
	2	- 10,0	- 9,48	- 8,65	- 8,85	- 5,06	- 5,37	- 2,53	- 2,91
0,7	0,5	6,4	4,18	1,2	0,93	- 0,8	- 1,8	- 1,0	- 3,2
	2	- 6,68	- 5,8	- 11,13	- 10,4	- 10,36	- 12,7	- 9,65	- 11,1

	0,5	2,06	1,4	1,15	0,2	- 1,6	- 4,26	- 3,2	- 6,75
0,9	2	- 1,56	- 3,4	- 6,4	- 5,45	- 10,26	- 10,7	-12,67	- 14,3

СМО с несколькими классами заявок

СМО с разными классами заявок при отсутствии приоритетов в их обслуживании.

Среднее время ожидания заявок в очереди СМО

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot t_i^{(2)}}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot t_i \cdot (1 + \nu_i^2)}{2 \cdot (1 - \rho)}$$

Среднее время пребывания заявок в СМО

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} T_i \quad \text{где: } T_i = W + t_i$$

$$T = W + t_0 = W + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} t_i$$

Где: t_0 - среднее время обслуживания заявок всех классов

Среднее число заявок в очереди СМО и в СМО

$$Q = \lambda \cdot W \quad L = \lambda \cdot T$$

СМО с относительными приоритетами

Среднее время ожидания заявок k -го приоритетного класса в очереди СМО

$$W_k = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i t_i (1 + \nu_i^2)}{2 \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i \right) \left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i \right)}$$

Среднее время ожидания заявок 1-го и 2-го класса в очереди СМО с двумя классами заявок.

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} \quad W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

Среднее время ожидания заявок разных классов в очереди СМО с тремя классами заявок.

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1)}$$

$$W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

$$W_3 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2)(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)}$$

СМО с абсолютными приоритетами.

Среднее время ожидания заявок k -го приоритетного класса в очереди СМО

$$W_k = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \rho_i t_i}{\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i\right)} + \frac{\sum_{i=1}^k \rho_i t_i (1 + \nu_i^2)}{2 \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i\right)}$$

Среднее время ожидания заявок 1-го и 2-го класса в очереди СМО с двумя классами заявок.

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1}{(1 - \rho_1)} \quad W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

Среднее время ожидания заявок разных классов в очереди СМО с тремя классами заявок.

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1}{(1 - \rho_1)}$$

$$W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

$$W_3 = \frac{(\rho_1 + \rho_2) \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2)(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)}$$

СМО с комбинированными приоритетами

На вход СМО поступают заявки трёх приоритетных классов.

Заявки 1-го класса имеют абсолютный приоритет перед заявками 2-го и 3-го классов, а заявки 2-го класса - относительный приоритет перед заявками 3-го класса.

Среднее время ожидания заявок 1-го, 2-го и 3-го приоритетных классов в очереди СМО

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1}{(1 - \rho_1)}$$

$$W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

$$W_3 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2) \cdot (1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)}$$

Закон сохранения времени ожидания Клейнрока $\sum_{i=1}^n \rho_i W_i = \rho \cdot W$

n - число приоритетных классов заявок, поступающих на вход СМО.

Метод инвариантов отношения

Согласно метода инвариантов отношения, имеем следующую связь для числа заявок, находящихся в очередях СМО.

$$\frac{Q_{G/G/c}}{Q_{G/G/1}} = \frac{Q_{M/M/c}}{Q_{M/M/1}} \quad \text{Тогда} \quad Q_{G/G/c} = Q_{G/G/1} \frac{Q_{M/M/c}}{Q_{M/M/1}}$$

Для расчета показателей функционирования двухканальных СМО с приоритной обработкой заявок используют метод инвариантов отношения, позволяющий получить простые аналитические выражения. Согласно этому методу справедливы следующие выражения, устанавливающие взаимосвязь между бесприоритетными СМО вида $M/M/1$ и $M/M/2$ и приоритетными СМО с относительными приоритетами вида $M/M/1/\infty/Отн/\infty$ и $M/M/2/\infty/Отн/\infty$, а также с абсолютными приоритетами вида $M/M/1/\infty/Абс/\infty$ и $M/M/1/\infty/Абс/\infty$.

$$\frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}} = \frac{W_{M/M/2/\infty/отн/\infty}}{W_{M/M/1/\infty/отн/\infty}} \quad \frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}} = \frac{W_{M/M/2/\infty/абс/\infty}}{W_{M/M/1/\infty/абс/\infty}}$$

После преобразований из этих выражений получаем:

$$W_{M/M/2/\infty/отн/\infty} = W_{M/M/1/\infty/отн/\infty} \cdot \frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}} \quad W_{M/M/2/\infty/абс/\infty} = W_{M/M/1/\infty/абс/\infty} \cdot \frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}}$$

$$Q_{G/G/1} = \frac{\rho^2 \cdot (v_{ex}^2 + v_o^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\rho^2 \cdot a}{(1 - \rho)} \quad \text{где} \quad a = \frac{(v_{ex}^2 + v_o^2)}{2}$$

$$\text{СМО } G/G/c/m \quad \rho = 1 \quad P_{отк} = \frac{2}{c + \frac{2 \cdot m}{a} + 3} = \frac{2}{c + \frac{4 \cdot m}{(v_{ex}^2 + v_o^2)} + 3} \quad \text{при } 1 \leq c \leq 2$$

$$P_{отк} = \frac{6}{c + \frac{6 \cdot m}{a} + 15} = \frac{6}{c + \frac{12 \cdot m}{(v_{ex}^2 + v_o^2)} + 15} \quad \text{при } 3 \leq c \leq 50$$

$$Q_{M/G/1} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + v_o^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\rho^2 \cdot a_o}{(1 - \rho)} \quad \text{где} \quad a_o = \frac{(1 + v_o^2)}{2}$$

Для СМО $M/G/1/m$ и $G/G/1/m$ предложены приближённые формулы:

$$P_{отк} = \frac{\rho^{(m+1) \cdot a_0} - \rho^{(m+1) \cdot a_0 + 1}}{1 - \rho^{(m+1) \cdot a_0 + 1}}$$

$$P_{отк} = \frac{\rho^{(m+1) \cdot a} - \rho^{(m+1) \cdot a + 1}}{1 - \rho^{(m+1) \cdot a + 1}}$$

Разомкнутые сети массового обслуживания

Композиция потоков

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

$$v^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot v_j^2}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}$$

Декомпозиция потоков

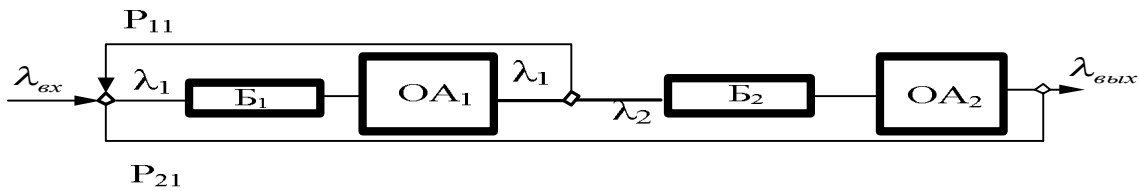
$$\lambda_j = \lambda \cdot q_j,$$

$$v_j^2 = v^2 \cdot q_j + (1 - q_j).$$

Способ 1 $v_{выхi}^2 = v_{вxi}^2 + \rho_i^2 \cdot (v_{oi}^2 - v_{вxi}^2)$

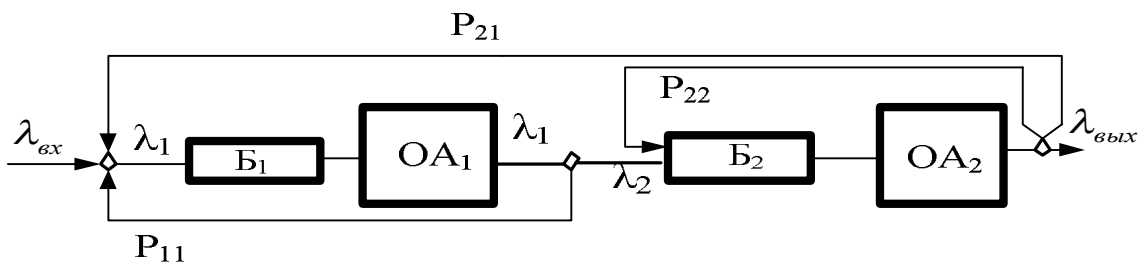
Способ 2 $v_{выхi}^2 = (1 - \rho_i) \cdot v_{вxi}^2 + \rho_i \cdot v_{oi}^2 - \rho_i^2 + \rho_i$

Способ 3 $v_{выхi}^2 = v_{вxi}^2 + 2\rho_i v_{oi}^2 - \rho_i^2 \cdot (v_{вxi}^2 + v_{oi}^2)$



$$\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_1 \cdot p_{11} \quad \lambda_2 = \lambda + \lambda_2 \cdot p_{21} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - p_{21}}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{1 - p_{11}} = \frac{\lambda}{(1 - p_{21}) \cdot (1 - p_{11})} \quad \alpha_1 = \frac{1}{(1 - p_{11}) \cdot (1 - p_{21})} \quad \alpha_2 = \frac{1}{(1 - p_{21})}$$



$$\lambda_2 = \lambda + \lambda_2 \cdot p_{21} + \lambda_2 \cdot p_{22} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - p_{21} - p_{22}}$$

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda_2 \cdot p_{22} + \lambda_1 \cdot p_{11} \qquad \lambda_1 = \frac{\lambda \cdot (1 - p_{21})}{(1 - p_{21} - p_{22}) \cdot (1 - p_{11})}$$

$$\alpha_1 = \frac{(1 - p_{21})}{(1 - p_{21} - p_{22}) \cdot (1 - p_{11})} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{1 - p_{21} - p_{22}}$$

Формулы для приближенной оценки основных показателей качества функционирования многоканальных СМО М/М/с

Среднее число заявок в очереди СМО М/М/с и в СМО:

$$Q_{M/M/c} = \frac{C \cdot \rho^{c+1}}{1 - \rho^c} \qquad L_{M/M/c} = Q + c \cdot \rho = \frac{C \cdot \rho}{1 - \rho^c}$$

Среднее время ожидания заявок в очереди СМО М/М/с и в СМО:

$$W_{M/M/c} = \frac{\rho^c}{(1 - \rho^c) \cdot \mu} \qquad T_{M/M/c} = W + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{(1 - \rho^c) \cdot \mu}$$

$t_0 = 1/\mu$ - среднее время обслуживания заявок в одном ОА СМО.

Для уменьшения погрешности результатов, получаемых с помощью формул для вычисления $L_{M/M/c}$ и $T_{M/M/c}$, предложена замена числа обслуживающих аппаратов (c) в этих формулах на (c^*). В этом случае погрешность результатов составляет менее 1%. Некоторые, наиболее важные значения (c^*), аппроксимирующие соответствующие значения числа (c), приведены ниже.

Значения c^* , аппроксимирующие значения c .

c	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,7$	$\rho = 0,9$
$c = 1$	1	1	1	1	1
$c = 2$	2	2	2	2	2
$c = 3$	2,8633	2,8519	2,8745	2,9146	2,9683
$c = 4$	3,6563	3,6033	3,6439	3,7425	3,8974
$c = 5$	4,4090	4,2888	4,3346	4,4954	4,7860
$c = 6$	5,1356	4,9290	4,9662	5,1858	5,6349
$c = 7$	5,8443	5,5365	5,5525	5,8240	6,4463
$c = 8$	6,5398	6,1196	6,1032	6,4185	7,2226
$c = 9$	7,2252	6,6836	6,6253	6,9767	7,9660
$c = 10$	7,9025	7,2325	7,1239	7,5032	8,6791

$c = 15$	11,211	9,8281	9,3775	9,7929	11,861
$c = 20$	14,444	12,278	11,389	11,709	14,548
$c = 25$	17,634	14,649	13,264	13,399	16,882
$c = 30$	20,799	16,968	15,049	14,936	18,950
$c = 40$	27,077	21,518	18,446	17,713	22,513
$c = 50$	33,314	24,079	21,668	20,232	25,538

Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/1 и М/М/2

№	СМО М/М/1	СМО М/М/2
1	Загрузка обслуживающего аппарата	
	$\rho = \lambda / \mu$	$\rho = \lambda / (2 \cdot \mu)$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата	
	$P_0 = 1 - \rho$	$P_0 = (1 - \rho) / (1 + \rho)$
3	Вероятность, что в СМО, i - заявок	
	$P_i = P_0 \cdot \rho^i$	$P_i = (\rho^i / 2^i i!) P_0$ если $i = 1, 2$ $P_i = \frac{\rho^i}{2^i \cdot 2!} \cdot P_0$ если $i = 3, 4, 5, \dots$
4	Среднее число заявок в очереди на обслуживание	
	$Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$	$Q = \frac{2 \cdot \rho^3}{1 - \rho^2}$
5	Среднее число заявок в СМО, в очереди и на обслуживании	
	$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$	$L = \frac{2 \cdot \rho}{1 - \rho^2}$
6	Дисперсия числа заявок в очереди СМО	
	$D_Q = \frac{\rho^2(1 + \rho - \rho^2)}{(1 - \rho)^2}$	$D_Q = \frac{2\rho^3(1 + 2\rho - \rho^3)}{(1 - \rho^2)^2}$
7	Дисперсия числа заявок в СМО	
	$D_L = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$	$D_L = \frac{2\rho \cdot (1 + \rho^2)}{(1 - \rho^2)^2}$
8	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО	

	$W = \frac{\rho}{(1-\rho) \cdot \mu}$	$W = \frac{\rho^2}{(1-\rho^2) \cdot \mu}$
9	Среднее время пребывания заявок в СМО	
	$T = \frac{1}{(1-\rho) \cdot \mu} = \frac{1}{(\mu-\lambda)}$	$T = \frac{1}{(1-\rho^2) \cdot \mu}$

Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/1/м

№	Показатель СМО
1	Загрузка обслуживающего аппарата $\rho = \lambda / \mu$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата $P_0 = \frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{m+2})}$
3	Вероятность, что в СМО, i - заявок $P_i = \frac{(1-\rho) \cdot \rho^i}{(1-\rho^{m+2})}$
4	Вероятность отказа заявкам в обслуживании $P_{отк} = P_{m+1} = \frac{(\rho^{m+1} - \rho^{m+2})}{(1-\rho^{m+2})}$
5	Интенсивность потока обслуженных заявок $\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda$
6	Коэффициент использования обслуживающего аппарата $U = \lambda_c / \mu = (1 - P_{отк}) \cdot \rho$
7	Среднее число заявок в очереди на обслуживание $Q = \frac{\rho^2 \cdot [1 - \rho^m \cdot (m+1) + m \cdot \rho^{m+1}]}{(1-\rho^{m+2}) \cdot (1-\rho)}$
8	Среднее число заявок в СМО $L = Q + U = \frac{\rho \cdot [1 - (m+2)\rho^{m+1} + (m+1) \cdot \rho^{m+2}]}{(1-\rho^{m+2}) \cdot (1-\rho)}$
9	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО $W = \frac{Q}{\lambda_c} = \left[\frac{\rho}{(1-\rho)} - \frac{(m+1) \cdot \rho^{m+1}}{(1-\rho^{m+1})} \right] \cdot \frac{1}{\mu}$

10	Среднее время пребывания заявок в СМО $T = \frac{L}{\lambda_c} = \left[\frac{1}{(1-\rho)} - \frac{(m+1) \cdot \rho^{m+1}}{(1-\rho^{m+1})} \right] \cdot \frac{1}{\mu}$
----	--

Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/2/м

№	Показатель СМО
1	Загрузка обслуживающего аппарата $\rho = \frac{\varphi}{2} = \frac{\lambda}{2\mu}$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата $P_0 = \frac{(1-\rho)}{(1+\rho-2\rho^{m+3})}$
3	Вероятность, что в СМО, i - заявок $P_i = 2 \cdot \rho^i \cdot P_0$
4	Вероятность отказа заявкам в обслуживании $P_{отк} = P_{m+2} = \frac{(2\rho^{m+2} - 2\rho^{m+3})}{(1+\rho-2\rho^{m+3})}$
5	Интенсивность потока обслуженных заявок $\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda = \frac{(1+\rho-2\rho^{m+2})}{(1+\rho-2\rho^{m+3})} \cdot \lambda$
6	Коэффициент использования обслуживающего аппарата $U = \lambda_c / 2\mu = (1 - P_{отк}) \cdot \rho$
7	Среднее число заявок в очереди на обслуживание $Q = \frac{2 \cdot (m \cdot \rho^{m+4} - m \cdot \rho^{m+3} - \rho^{m+3} + \rho^3)}{(1-\rho) \cdot (1+\rho-2\rho^{m+3})}$
8	Среднее число заявок в СМО $L = Q + 2U = \frac{2 - 2(m+3) \cdot \rho^{m+2} + 2(m+2) \cdot \rho^{m+3}}{(1-\rho) \cdot (1+\rho-2\rho^{m+3})} \cdot \rho$
9	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО $W = \frac{Q}{\lambda_c} = \frac{m\rho^{m+3} - m\rho^{m+2} - \rho^{m+2} + \rho^2}{(1-\rho) \cdot (1+\rho-2\rho^{m+2}) \cdot \mu}$

10	Среднее время пребывания заявок в СМО $T = \frac{L}{\lambda_c} = \frac{(m+2)\rho^{m+3} - (m+3)\rho^{m+2} + 1}{(1-\rho) \cdot (1+\rho - 2\rho^{m+2}) \cdot \mu}$
----	--

**Показатели оценки качества функционирования СМО
М/М/1/м и М/М/2/м при $\rho = 1$**

№	СМО М/М/1/м	СМО М/М/2/м
1	Вероятность отказа заявкам в обслуживании	
	$P_{отк} = 1/(m+2)$	$P_{отк} = 2/(2m+5)$
2	Коэффициент использования обслуживающего аппарата	
	$U = \frac{(m+1)}{(m+2)}$	$U = \frac{(2m+3)}{(2m+5)}$
3	Интенсивность потока обслуженных заявок	
	$\lambda_c = \frac{(m+1)}{(m+2)} \cdot \lambda$	$\lambda_c = \frac{(2m+3)}{(2m+5)} \cdot \lambda$
4	Среднее число заявок в очереди на обслуживание	
	$Q = \frac{m \cdot (m+1)}{2 \cdot (m+2)}$	$Q = \frac{m \cdot (m+1)}{(2m+5)}$
5	Среднее число заявок в СМО	
	$L = \frac{(m+1)}{2}$	$L = \frac{(m+2) \cdot (m+3)}{(2m+5)}$
6	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО	
	$W = \frac{m}{2 \cdot \mu}$	$W = \frac{m \cdot (m+1)}{(2m+3) \cdot \mu}$
7	Среднее время пребывания заявок в СМО	
	$T = \frac{(m+2)}{2 \cdot \mu}$	$T = \frac{(m+2) \cdot (m+3)}{(2m+3) \cdot 2 \cdot \mu}$
8	Относительная пропускная способность СМО	
	$q = \frac{(m+1)}{(m+2)}$	$q = \frac{(2m+3)}{(2m+5)}$
9	Абсолютная пропускная способность СМО	
	$A = \frac{(m+1)}{(m+2)} \cdot \lambda$	$A = \frac{(2m+3)}{(2m+5)} \cdot \lambda$

Приложение 2.

Вспомогательные формулы для расчёта характеристик работы СМО.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \frac{1}{(1-\rho)}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho^i = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \rho^{i-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \rho^i = \frac{\rho(1+\rho)}{(1-\rho)^3}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \rho^{i-1} = \frac{(1+\rho)}{(1-\rho)^3}$$

$$\sum_{i=1}^N \rho^i = \frac{\rho(1-\rho^N)}{(1-\rho)}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^3 \rho^{i-1} = \frac{(1+4\rho+\rho^2)}{(1-\rho)^4}$$

$$\sum_{i=1}^N i^m \rho^i = \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{i=1}^N i^{m-1} \rho^i$$

Момент (α) распределения Эрланга порядка (k)

$$t_k^\alpha = \frac{(\alpha+k-1)!}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{t}{k}\right)^\alpha$$

Приложение 3

Знания, получаемые в процессе изучения вопросов, изложенных в учебно-методическом пособии

В процессе изучения учебно-методического пособия студент

должен знать:

1. Основные принципы и правила разработки Ф-схем систем и сетей массового обслуживания (СеМО), корректно отражающих работу рассматриваемых систем организационного управления (СОУ).
2. Основные законы, теоремы и формулы, используемые при анализе СОУ, формализуемых в виде СМО, а также разомкнутых и замкнутых СеМО.
3. Основные правила проведения функционально-стоимостного анализа СОУ для выбора наилучшего варианта среди сравниваемых.

должен уметь:

1. Применять аналитические выражения для анализа СОУ, формализуемых в виде одноканальных и многоканальных СМО с отказами, ограниченной длиной очереди, ожиданием и приоритетами.
2. Применять аналитические выражения для анализа СОУ, формализуемых в виде разомкнутых и замкнутых СеМО.
3. Применять аналитические выражения для проведения функционально-стоимостного анализа СОУ, формализуемых в виде разомкнутых и замкнутых СеМО.

должен владеть:

1. Принципами разработки аналитических моделей для анализа СОУ, формализуемых в виде СеМО..
2. Принципами корректировки и совершенствования аналитических моделей для проведения экспресс-анализа СОУ.
3. Принципами разработки критериев для проведения функционально-стоимостного анализа СОУ.