

Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана

В. М. Постников, С.Б. Спиридонов, В.И. Терехов

**Методы и модели массового обслуживания  
в системах организационного управления**

**Учебно-методическое пособие  
по дисциплине  
«Аналитические модели автоматизированных  
систем обработки информации и управления»**

для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению подготовки:  
«Информатика и вычислительная техника».

Москва 2023

УДК 007(075.8)  
ББК 16.332я73-2  
П 63

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор кафедры «Автоматизированные системы управления»  
Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета  
(МАДИ) П.Ф. Юрчик

д-р техн. наук, профессор кафедры «Информационные системы в экономике и управлении»  
АНО ВО «Российский новый университет».

Л.В. Лабунец

Авторы

Постников Виталий Михайлович, к.т.н., доцент кафедры  
«Системы обработки информации и управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана  
(E-mail: [postnikovvm@bmstu.ru](mailto:postnikovvm@bmstu.ru))

Спиридонов Сергей Борисович, доцент кафедры  
«Системы обработки информации и управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана  
(E-mail: [spirid@bmstu.ru](mailto:spirid@bmstu.ru))

Терехов Валерий Игоревич, к.т.н., доцент, заведующий кафедрой  
«Системы обработки информации и управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана  
(E-mail: [terekchow@bmstu.ru](mailto:terekchow@bmstu.ru))

П 63      **Постников В.М., Спиридонов С.Б., Терехов В.И.**

Методы и модели массового обслуживания в системах организационного управления.  
- М.: Издательство «Спутник +» , 2023 -148с.

**ISBN 978-5**

Рассмотрены основные понятия, методы и подходы, определяющие процесс анализа и выбора варианта решения в системах организационного управления (СОУ) на основе использования теории массового обслуживания. Изложены методы и модели анализа компонент СОУ, формализуемых в виде систем и сетей массового обслуживания.

Содержится большое количество примеров, предназначенных для выполнения домашних заданий, курсовых и выпускных квалификационных работ.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности “Автоматизированные системы обработки информации и управления” и по направлению “ Информатика и вычислительная техника”.

Различные части учебного пособия будут полезны аспирантам, научным сотрудникам и преподавателям, которым в своей работе приходится решать проблемы, связанные с анализом и принятием решений на основе методов и моделей систем и сетей массового обслуживания.

УДК 007(075.8)  
ББК 16.332я73-2

Отпечатано с готового оригинал-макета  
ISBN 978-5

Постников В.М., Спиридонов С.Б.,  
Терехов В.И., 2023

## Содержание

Предисловие .....	5
Список сокращений.....	6
<b>Часть 1. Основы аналитического моделирования систем организационного управления.....</b>	<b>7</b>
Глава 1. Основные понятия аналитического моделирования СОУ.....	7
Глава 2. Поток заявок и времена их обработки в СОУ.....	18
Глава 3. Оценка параметров входного потока заявок в СОУ.....	28
Глава 4. Оценка параметров времени обработки заявок в СОУ.....	33
Глава 5. Разработка формализованных схем СОУ и её компонент.....	38
<b>Часть 2. Аналитические модели систем организационного управления в виде систем массового обслуживания.....</b>	<b>42</b>
Глава 6. Методы анализа систем массового обслуживания.....	42
Глава 7. Аналитические модели СОУ в виде СМО с ожиданием.....	50
Глава 8. Аналитические модели СОУ в виде СМО с отказами и ограниченной длиной очереди.....	60
Глава 9. Аналитические модели СОУ в виде СМО с разными классами заявок и приоритетами в обслуживании.....	72
<b>Часть 3. Аналитические модели систем организационного управления в виде разомкнутых сетей массового обслуживания.....</b>	<b>91</b>
Глава 10. Аналитические модели СОУ в виде разомкнутых линейных сетей массового обслуживания.....	91
Глава 11. Аналитические модели СОУ в виде разомкнутых сетей массового обслуживания с обратными связями.....	101
Глава 12. Аналитические модели СОУ в виде разомкнутых разветвленных сетей массового обслуживания. ....	110
Глава 13. Аналитические модели СОУ в виде разомкнутых сетей массового обслуживания с отказами.....	116
<b>Часть 4. Аналитические модели систем организационного управления в виде замкнутых сетей массового обслуживания.....</b>	<b>129</b>
Глава 14. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сбалансированных сетей массового обслуживания.....	129
Глава 15. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сетей массового обслуживания на основе рекуррентного метода Базена.....	143
Глава 16. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сетей массового обслуживания на основе метода фонового потока...	164
Глава 17. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сетей массового обслуживания на основе методов подсистем и узкое место.....	179

Глава 18. Аналитические модели службы ремонта и обслуживания оборудования в виде замкнутых сетей массового обслуживания...	189
Глава 19. Аналитические модели службы ремонта и обслуживания оборудования в виде замкнутых сбалансированных сетей массового обслуживания.....	201

**Часть 5. Выбор варианта системы организационного управления на основе методов и моделей массового обслуживания..... 207**

Глава 20. Выбор варианта СОУ с учётом показателей работы.....	207
Глава 21. Выбор варианта СОУ с учётом затрат на сопровождение.....	221
Глава 22. Выбор варианта СОУ с учётом дохода от эксплуатации.....	231
Глава 23. Многокритериальный подход к выбору варианта СОУ.....	239
Литература .....	

244

Приложение 1. Показатели оценки качества работы СМО.....	246
Приложение 2. Вспомогательные формулы для расчёта характеристик работы СМО.....	259
Приложение 3. Знания, получаемые в процессе изучения вопросов, изложенных в учебно-методическом пособии.....	260

## Предисловие

Для сравнительной оценки вариантов систем организационного управления (СОУ) и корректного обоснования выбора наилучшего варианта решения, современный руководитель должен уметь использовать математический аппарат теории массового обслуживания. При этом наилучший вариант решения – это наиболее предпочтительный из набора рассматриваемых альтернативных вариантов, согласно заданного критерия.

Учебное пособие написано с учетом курса лекций, читаемого авторами в МГТУ им. Н.Э. Баумана, на кафедре «Системы обработки информации и управления», и посвящено анализу подходов для сравнения вариантов СОУ с использованием методов и моделей теории массового обслуживания (ТМО).

В учебном пособии изложены основные методологические подходы и аналитические модели, используемые в теории массового обслуживания при представлении СОУ и их компонент в виде формализованных схем систем и сетей массового обслуживания.

Преподавательский опыт авторов показал, что теоретический материал прочно усваивается студентами при решении задач. Поэтому разделы учебного пособия содержат примеры, показывающие практическое использование теоретического материала. Учебное пособие содержит пять частей, включающих 23 раздела, и охватывает все основные вопросы, возникающие при анализе СОУ и их компонент.

Учебное пособие предназначено для магистров, обучающихся по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления», по направлению «Информатика и вычислительная техника», содержит справочные материалы для выполнения домашних заданий, курсовых и выпускных квалификационных работ.

Различные части учебного пособия будут полезны аспирантам, научным сотрудникам, преподавателям, которым в своей работе приходится практически решать проблемы, связанные с анализом и принятием решений на основе методов и моделей систем и сетей массового обслуживания.

## Список сокращений

АСОИиУ – Автоматизированная система обработки информации и управления.

Б- буфер приёма потока заявок, поступающих на вход СМО.

ЛВС – локальная вычислительная сеть.

ОА – обслуживающий аппарат в составе СМО.

ПЭВМ – персональная электронная вычислительная машина.

СеМО – сеть массового обслуживания.

СЛАУ- система линейных алгебраических уравнений.

СМО- система массового обслуживания.

СОИ - Система обработки информации.

СОУ – Система организационного управления.

Ф-схема – формализованная схема СМО

## **Часть 1. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ ОРГАНИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ**

### **Глава 1. Основные понятия аналитического моделирования СОУ**

Работа СОУ обычно связана с обслуживанием запросов (заявок), поступающих от клиентов в случайные моменты времени. При этом обслуживание этих запросов обычно имеет случайный характер. Все это создает неравномерность в работе ресурсов СОУ, в качестве которых могут быть как аппаратно-программные средства, так и персонал, что порождает либо простой и недогрузки, либо перегрузки ресурсов системы. Перегрузка ресурсов означает наличие очередей в системе и увеличение времени обслуживания запросов клиентов. Поэтому вполне закономерно, что эффективность функционирования СОУ во многом определяют ее аппаратно-программная и организационная структуры.

В связи с этим необходима сравнительная оценка различных вариантов построения организационной структуры СОУ, а также анализ перспективных вариантов её развития, с целью выбора наиболее эффективного.

Для выявления уровня загруженности ресурсов СОУ, оценки основных временных характеристик ее функционирования, поиска резервов увеличения производительности и выработки рекомендаций, направленных на модернизацию или реорганизацию для дальнейшего увеличения эффективности её работы, используют аналитическое моделирование.

Основу аналитического моделирования СОУ составляют аналитические модели, полученные при определенных допущениях и предположениях. Аналитические модели позволяют достаточно просто и быстро получить такие основные характеристики функционирования СОУ, как среднее время реакции системы на запрос клиента, загрузка компонент системы, среднее число клиентов в очереди и в системе и т.д.

При разработке аналитических моделей СОУ и её компонент используют методы теории массового обслуживания (методы ТМО), учитывающие вероятностный характер информационных процессов, протекающих в СОУ.

ТМО предполагает, что работу СОУ следует представить в виде системы массового обслуживания (СМО) или сети массового обслуживания (СеМО).

СМО - это система обслуживания потока заявок, поступающих на её вход при заданном законе и порядке обслуживания этих заявок с учетом параметров структуры самой обслуживающей системы.

СеМО- это совокупность взаимосвязанных СМО. Структуру СеМО можно представить в виде графа, вершины которого соответствуют отдельным СМО, а дуги - вероятностям переходов заявок между этими СМО.

Формализованную схему (Ф-схему) СМО, приведенную на рис.1.1, графически представляют в виде буфера (или набора буферов), в которые поступают входные потоки заявок, и связанных с буферами обслуживающих аппаратов (ОА), предназначенных для обработки этих заявок. Формализованную схему СОУ представляют в виде Ф-схемы СМО или набора Ф-схем СМО, входящих в состав СеМО, отражающей структуру и логику работы СОУ.

Аналитические модели (аналитические выражения) отражают логику работы СМО (или СеМО) по обработке поступающих в нее заявок и позволяют определить соответствующие характеристики функционирования СМО (или СеМО) с учетом заданных параметров ее работы.

Аналитические модели СОУ разрабатывают на основе аналитических моделей СМО или совокупности моделей нескольких СМО, входящих в состав СеМО, отражающих работу соответствующих СОУ.

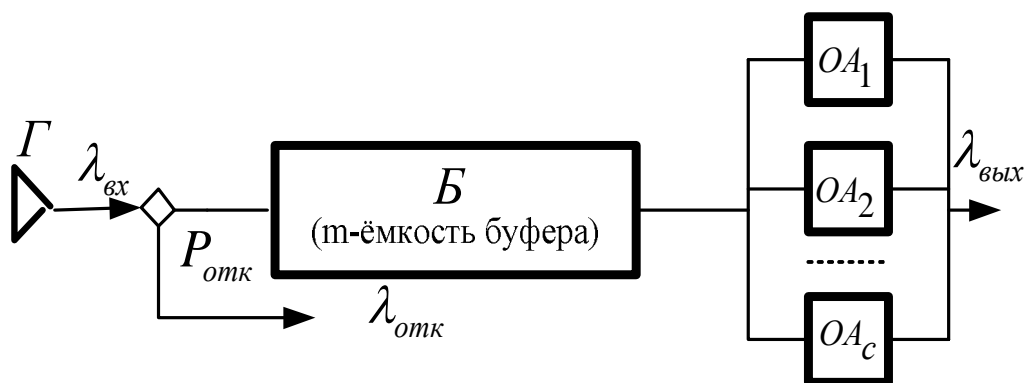


Рис. 1.1 Формализованная схема СМО



## 1.1 Основные компоненты СМО

В составе СМО, Ф-схема которой приведена на рис.1.1, можно выделить следующие компоненты:

1. Источники заявок (Г-генераторы заявок), определяющие входящие в СМО потоки заявок. Количество источников заявок определяет количество входящих в СМО потоков заявок ( $n$ ).

2. Входящий поток заявок ( $\lambda_{вх}$ ) - это совокупность всех типов заявок, поступающих на вход СМО. Обычно его задают функцией распределения интервалов времени между моментами поступления двух соседних заявок для каждого потока, т. е. средним значением интервала времени между заявками, и коэффициентом вариации этого времени.

Одной из важнейших характеристик входящего потока является его интенсивность, равная среднему числу заявок поступающих в единицу времени. Величина, обратная интенсивности определяет средний интервал времени между двумя последовательными заявками.

Наиболее часто в качестве входящего потока при анализе СМО используют простейший поток, который обладает следующими свойствами:

- стационарность, когда вероятность поступления заявок в систему в интервале  $[t, t+h]$  зависит лишь от величины  $h$ ;
- ординарность, когда на бесконечно малом промежутке времени  $h$  поступает не более одной заявки;
- отсутствие последействия, когда вероятность поступления заявок в систему в интервале  $[t, t+h]$  не зависит от количества заявок поступивших в систему до момента времени  $t$ .

Для простейшего потока интервалы времени между двумя последовательными заявками – это непрерывные случайные величины с экспоненциальной функцией распределения  $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$  и плотностью распределения  $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$ , где  $\lambda$ - интенсивность поступления потока заявок в систему в единицу времени.

### 3. Механизм обслуживания заявок, который включает:

- длительность обслуживания заявок (среднее время и коэффициент вариации времени обслуживания заявок). На практике часто используют экспоненциальное распределение длительности обслуживания заявок в ОА, которое описывается функцией распределения времени обслуживания  $F(\tau)$  и плотностью распределения  $f(\tau)$ :

$$F(\tau) = 1 - e^{-\mu\tau} \quad (1.1)$$

$$f(\tau) = \mu e^{-\mu\tau} \quad (1.2)$$

где  $\mu$  - интенсивность обслуживания заявок в СМО в единицу времени.

Среднее время обслуживания заявок  $M(\tau)$  и дисперсию времени обслуживания заявок  $D(\tau)$  в этом случае определяют из следующих формул:

$$M(\tau) = 1/\mu \quad (1.3)$$

$$D(\tau) = 1/\mu^2 \quad (1.4)$$

- количество обслуживающих аппаратов (ОА) в обслуживающей системе, равное ( $c$ ), которые могут одновременно обслуживать поступающие заявки. При этом в каждый момент времени одну заявку обслуживает только один ОА.

- пропускная способность обслуживающей системы -  $\mu_{сис}$ , которая зависит от числа обслуживающих аппаратов ( $c$ ) и средней интенсивности обслуживания заявок ( $\mu_i$ ) каждым ОА.

$$\mu_{сис} = \sum_{i=1}^c \mu_i \quad (1.5)$$

Обычно считают, что СМО, включают только однотипные ОА.

- количество мест в очереди на обслуживание ( $m$ ), т. е. максимальное число заявок, которое может быть в очереди и ожидать начала обслуживания, если все ОА заняты обслуживанием. Число мест заявок в очереди на обслуживание определяет доступность обслуживания;

- дисциплина формирования очереди. По правилу формирования очереди различают СМО с общей очередью и СМО с несколькими очередями. При

общей очереди заявки заполняют очередь в порядке поступления. В случае наличия нескольких очередей более важные заявки поступают в более приоритетные для обслуживания очереди;

- дисциплина обслуживания очереди определяет правила выбора заявок из очереди на обслуживание. Имеют место беспriorитетные и приоритетные дисциплины обслуживания.

В общем случае возможны различные комбинации дисциплин формирования и обслуживания очереди, что порождает достаточно широкий спектр вариантов управления процессами обработки заявок в СМО.

## **1.2 Классификация СМО**

1. В зависимости от характера источника заявок различают источники с бесконечным числом заявок и источники с конечным числом заявок. В первом случае источник генерирует неограниченное число заявок в соответствии с заданной функцией распределения интервала времени между поступающими заявками и его работа не зависит от обслуживающей системы. Во втором случае в системе циркулирует конечное, и обычно постоянное, число заявок.

СМО с бесконечным числом заявок называются разомкнутыми, а с конечным числом заявок - замкнутыми.

2. СМО с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальным распределением времени обслуживания этих заявок называют марковскими, в противном случае СМО считают немарковскими.

3. По количеству ОА в обслуживающей системе различают: одноканальные СМО, если в системе один ОА и многоканальные СМО, если в системе несколько ОА.

4. В зависимости от числа мест в очереди различают СМО с отказами, СМО с ограниченной длиной очереди и СМО с ожиданием (отсутствие отказов), т.е. с бесконечной длиной очереди. .

В СМО с отказами число мест в очереди на обслуживание равно нулю, а в СМО с ограниченной длиной очереди оно конечно ( $0 < m < \infty$ ). Поэтому вследствие вероятностного характера, как входящего потока заявок, так и

процесса их обслуживания, существует вероятность того, что при ( $0 \leq m < \infty$ ) поступившая на вход СМО заявка застанет все ОА и все места в очереди занятыми, т.е. получит отказ в обслуживании.

В СМО с ожиданием заявка либо сразу поступает на обслуживание, если имеется хотя бы один свободный ОА, либо поступает в очередь бесконечной длины и там находится до начала обслуживания.

5. Согласно правилу выбора заявок из очереди на обслуживание различают беспriorитетные и приоритетные СМО. В беспriorитетных СМО заявки выбирают из очереди на обслуживание, как правило, в порядке их поступления. В приоритетных СМО заявки из очереди на обслуживание выбирают с учетом уровня важности заявок. Более важные заявки поступают в более приоритетные для обслуживания очереди.

### 1.3 Описание входных и выходных данных СМО

Для описания входных и выходных данных моделей СМО используют следующие обозначения:

$\lambda$  - интенсивность входящего потока заявок в СМО;

$\mu$  - интенсивность обслуживания заявок в ОА СМО;

$t_0 = 1/\mu$  - среднее время обслуживания заявок в ОА СМО;

$c$  - число обслуживающих аппаратов, входящих в состав СМО;

$\rho = \lambda/(c \cdot \mu)$  - загрузка обслуживающего аппарата СМО;

$\varphi = \lambda/\mu$  - загрузка СМО, т.е. суммарная загрузка всех ОА;

$m$  - число мест ожидания заявок в очереди СМО;

$P_0$  - вероятность простоя СМО, в СМО нет ни одной заявки;

$P_i$  - вероятность, что в СМО, в очереди и на обслуживании,  $i$  - заявок;

$P_{c+i}$  - вероятность, что заняты все «с» ОА и  $i$  - заявок в очереди;

$P_W$  - вероятность ожидания заявкой начала обслуживания;

$P_{отк}$  - вероятность отказа заявке в обслуживании;

$\lambda_{отк}$  - интенсивность потока заявок, которым отказано в обслуживании;

$\lambda_c$  - интенсивность потока заявок, поступающих в СМО на обслуживание;  
 $U$  - коэффициент использования ОА для СМО с ограниченной очередью;  
 $Q$  - среднее число заявок в очереди на обслуживание;  
 $L$  - среднее число заявок в СМО, т. е. в очереди и на обслуживании;  
 $W$  - среднее время нахождения заявок в очереди СМО;  
 $T$  - среднее время пребывания заявок в СМО.  
 $D_Q$  - дисперсия числа заявок в очереди СМО;  
 $D_L$  - дисперсия числа заявок в СМО;  
 $D_W$  - дисперсия времени нахождения заявок в очереди СМО;  
 $D_T$  - дисперсия времени пребывания заявок в СМО;  
 $q$  - относительная пропускная способность СМО;  
 $A$  - абсолютная пропускная способность СМО;  
 $P(t_{ож} < t)$  - вероятность, что время ожидания заявки в очереди меньше ( $t$ )  
 $P(t_{прб} < t)$  - вероятность, что время пребывания заявки в СМО меньше ( $t$ )

#### 1.4 Показатели и критерии эффективности функционирования СМО

Показатели оценки эффективности функционирования СМО - это количественные показатели, характеризующие уровень выполнения СМО возложенных на нее функций по обслуживанию заявок при определенном наборе рабочих параметров СМО. К основным показателям оценки качества обслуживания заявок в СМО, обычно относят следующие показатели:

- вероятность обслуживания заявок ( $P_{обс}$ ) - это вероятность того, что произвольно выбранная из входящего потока с интенсивностью  $\lambda$  заявка будет обслужена, т.е. окажется в выходящем потоке обслуженных заявок с интенсивностью  $\lambda_{вых}$ . Обычно эту вероятность обслуживания заявок называют также относительной пропускной способностью СМО, обозначают символом ( $q$ ) и определяют из следующего выражения:

$$P_{обс} = q = \lambda_{вых} / \lambda \quad (1.6)$$

- вероятность потери заявок ( $P_{отк}$ ) - это вероятность того, что произвольно выбранная из входящего потока с интенсивностью  $\lambda$  заявка окажется в потоке заявок с интенсивностью  $\lambda_{отк}$ , которым будет отказано в обслуживании:

$$P_{отк} = 1 - P_{обс} \quad (1.7)$$

- среднее время ожидания заявок в очереди ( $W$ ). В общем случае время ожидания – это случайная величина, равная сумме длительностей интервалов времени, в течение которых заявка находится в очереди, начиная с момента поступления заявки на вход СМО и кончая моментом, когда заявка последний раз покидает очередь, уходя из очереди на обслуживание.

Среднее время ожидания является суммой двух составляющих: среднего времени ожидания начала обслуживания и среднего времени ожидания в прерванном состоянии, когда обслуживается более приоритетная заявка. Первая составляющая равна промежутку времени между моментом поступления заявки на вход СМО и моментом первого назначения заявки на обслуживание. Вторая составляющая равна сумме промежутков времени между моментами поступления заявки, обслуживание которой было прервано, снова в очередь, и моментами поступления этой заявки на дообслуживание.

- среднее время пребывания заявок в СМО ( $T$ )- это время равно среднему промежутку времени от момента поступления заявки на вход СМО до момента появления ее в выходящем потоке. Среднее время пребывания заявки в СМО равно сумме среднего времени нахождения заявки в очереди и среднего времени обслуживания в ОА:

$$T = W + 1/\mu \quad (1.8)$$

- средняя длина очереди ( $Q$ ) - это среднее число заявок, находящихся в очереди. Для систем без потерь средняя длина очереди связана со средним временем ожидания, согласно формулы Литтла, следующим соотношением:

$$Q = W \cdot \lambda \quad (1.9)$$

- среднее число заявок в СМО ( $L$ ) - это среднее суммарное число заявок, которое находится в очереди и в обслуживающих аппаратах. Для систем без потерь среднее число заявок в системе связано со средним временем пребывания, согласно формулы Литтла, следующим соотношением:

$$L = T \cdot \lambda \quad (1.10)$$

- загрузка обслуживающего аппарата СМО ( $\rho$ ) - это коэффициент использования ОА, вычисляются по следующей формуле

$$\rho = \lambda / (\mu \cdot c) \quad (1.11)$$

- загрузка обслуживающей системы ( $\varphi$ ) - это среднее число занятых обслуживающих аппаратов. Если обслуживающие аппараты однородны, то  $\varphi$  определяется из следующего выражения:

$$\varphi = c \cdot \rho = \lambda / \mu \quad (1.12)$$

В качестве критерия эффективности функционирования СМО обычно выбирают один, наиболее важный показатель, или несколько показателей, при этом критерий является некоторой функцией свертки набора этих показателей. Критерий эффективности функционирования СМО является средством оценки соответствия СМО возложенным на нее функциям. В качестве простейшего и широко используемого на практике критерия, используют критерий, который минимизирует общую стоимость обработки заявок в СМО. Его можно представить в следующем виде:

$$E_l = \min_j E_j = \min_j \left[ c_j \cdot \rho_j \cdot \sum_{i=1}^n e_{1ij} \cdot (1/\mu_{ij}) + \sum_{i=1}^n e_{2ij} \cdot T_{ij} \right], \quad j = 1, 2, \dots, B \quad (1.13)$$

Где  $E_l$  - стоимость обработки заявок в СМО, имеющей вариант структурной организации  $l$ , который является наилучшим с точки зрения выбранного критерия эффективности.

$E_j$  - стоимость обработки заявок в СМО со структурной организацией  $j$  ;

$B$  - количество возможных вариантов построения СМО;

$e_{1ij}$  - стоимость единицы времени обслуживания заявки  $i$  - го типа в СМО, имеющей вариант структурной организации  $j$  ;

$e_{2ij}$  - стоимость единицы времени пребывания заявки  $i$ -го типа: в СМО, имеющей вариант структурной организации  $j$ ;

$1/\mu_{ij}$  - среднее время обслуживания заявки  $i$ -го типа в СМО, имеющей вариант структурной организации  $j$ ;

$T_{ij}$  - среднее время пребывания заявки  $i$ -го типа в СМО, имеющей вариант структурной организации  $j$ ;

$\rho_j$  - нагрузка ОА СМО имеющей вариант структурной организации  $j$ ;

$c_j$  - число ОА в СМО, имеющей вариант структурной организации  $j$ ;

$n$  - число типов заявок, поступающих на вход СМО;

$E_l$  - значение критерия эффективности наилучшего варианта.

### 1.5 Описание систем массового обслуживания

Описания СМО унифицированы и имеют следующий символьный вид:  $a/b/c/d/e/f$ . Символы  $a, b, c, d, e, f$  соответствуют конкретным и наиболее важным элементам представления процессов обслуживания заявок в СМО и интерпретируются следующим образом:

$a$  - вид распределения интервалов времени между моментами поступления входящих в СМО заявок;

$b$  - вид распределения времени обслуживания заявок в ОА СМО;

$c$  - количество обслуживающих аппаратов в СМО;

$d$  - максимальное количество заявок, которое может одновременно находиться в очереди на обслуживание в СМО (емкость входного буфера);

$e$  - дисциплина выбора заявок из очереди на обслуживание;

$f$  - емкость источника, генерирующего заявки на обслуживание в СМО.

Для конкретизации символов  $a$  и  $b$  приняты следующие обозначения:

$M$  – пуассоновское распределение моментов поступления входящего потока заявок на обслуживание или экспоненциальное распределение интервалов времени обслуживания заявок;



$D$  – фиксированный (детерминированный) интервал времени между моментами последовательных поступлений заявок в систему на обслуживание или детерминированная продолжительность обслуживания;

$E_K$  - распределение Эрланга интервалов времени между моментами последовательных поступлений заявок в систему или продолжительностей обслуживания, при этом  $K$  - это параметр распределения Эрланга;

$GI$  – распределение произвольного вида моментов поступления заявок в систему на обслуживание;

$G$  - распределение произвольного вида продолжительностей обслуживания заявок в обслуживающем аппарате системы.

Для конкретизации символа ( $c$ ) указывается число от 1 до  $\infty$ ;

Для конкретизации символа ( $d$ ) указывается число от 1 до  $\infty$ ;

Для конкретизации символа ( $e$ ) приняты следующие обозначения: ПППО - первым пришел – первым обслужен; ОТН - относительные приоритеты; АБС - абсолютные; КОМ - комбинированные; ДБС - дообслуживание заявки при прерывании обслуживания; ЗАН- обслуживание заявки заново при прерывании.

Для конкретизации символа ( $f$ ) используют число ( $1, 2, N, \infty$ ), которое указывает емкость источника заявок.

Для иллюстрации обозначения СМО рассмотрим пример.

### **Пример 1.1**

Написать обозначение для СМО с пуассоновским входящим потоком, экспоненциальным распределением времени обслуживания, с одним ОА, с бесконечной емкостью буфера, с дисциплиной выбора заявок первый пришел - первым обслужен и с бесконечной емкостью источника заявок.

Решение. СМО имеет следующее обозначение:  $M / M / 1 / \infty / ПППО / \infty$ .

Следует иметь в виду, что СМО, при описании которых последние три символа имеют вид  $\infty / ПППО / \infty$ ., считают базовыми и эти последние три символа обычно опускают. Для обозначения таких СМО используют краткую форму записи, содержащую только первые три символа. Поэтому краткая форма обозначения рассматриваемой СМО имеет вид:  $M / M / 1$ .

## Глава 2. Поток заявок и времена их обработки в СОУ

### 2.1 Виды потоков заявок

Поток заявок (событий) – это последовательность следующих друг за другом по времени однородных событий. Различают следующие виды потоков заявок:

- Регулярный поток - это такой поток, в котором заявки следуют друг за другом через строго определенные интервалы времени.
- Случайный поток - это такой поток, в котором заявки следуют друг за другом через случайные интервалы времени.
- Стационарный поток – это поток, у которого вероятность появления определенного числа заявок на интервале от  $(t)$  до  $(t + \tau)$  зависит только от величины интервала  $(\tau)$  и не зависит от его положения на оси времени  $(t)$ .
- Нестационарный поток – это поток, у которого вероятность появления определенного числа заявок на интервале от  $(t)$  до  $(t + \tau)$  зависит только от протяженности интервала  $(\tau)$  и от его положения на оси времени  $(t)$ .
- Ординарный поток- это поток, у которого вероятность появления двух и более заявок за малый интервал времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления на этом интервале одной заявки. Ординарность потока исключает одновременное появление двух и более заявок.
- Неординарный поток- это поток, у которого в течение малого интервала времени  $(\tau)$  с вероятностью  $(p_k)$  может появиться группа из  $(k)$  заявок  $(k = 1 \dots m)$ . При этом математическое ожидание числа заявок равно

$$M(k) = \sum_{k=1}^m k \cdot P(k) \quad (2.1)$$

- Поток с отсутствием последействия - это поток, в котором для любых двух неперекрывающихся интервалов времени  $(\tau_1)$  и  $(\tau_2)$  число заявок, попадающих на один интервал, не зависит от того, сколько заявок попало на другой интервал.

- Поток с ограниченным последствием – это поток, в котором интервалы времени между заявками есть независимые случайные величины с функциями распределения  $E_k(t)$ , зависящими от номера заявки ( $k$ ). В таком потоке вероятность поступления очередной заявки в данный момент времени ( $t$ ) зависит только от момента появления последней заявки ( $t_k$ ), т.е. от  $(t - t_k)$ . В момент поступления заявки с номером ( $k$ ) будущее поведение процесса в вероятностном смысле не зависит от прошлого. Частным случаев потоков заявок с ограниченным последствием являются так называемые потоки Пальма.
- Поток Пальма – это стационарный, ординарный поток заявок с ограниченным последствием. В потоках Пальма интервалы времени между заявками представляют собой независимые случайные величины. Если, например, при отказе какого-либо элемента системы он немедленно заменяется новым элементом с той же плотностью распределения времени наработки на отказ, то поток отказов системы образует поток Пальма.
- Поток с неограниченным последствием - это поток, в котором заявки следуют через строго фиксированные интервалы времени, это так называемый регулярный поток, так как момент поступления одной заявки определяет моменты поступления всех остальных заявок.

## 2.2 Простейший поток заявок

Простейший поток заявок - это поток, который обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствием последствия, в котором интервалы времени между соседними заявками представляют собой независимые случайные величины, распределенные по показательному закону. Поэтому простейший поток является частным случаем потока Пальма.

На практике, для решения большого числа прикладных задач, обычно применяют математические модели однородных потоков, удовлетворяющих требованиям стационарности, ординарности и отсутствия последствия.

Определение: Поток называется стационарным, если вероятность появления  $n$  заявок на интервале времени  $(t, t+T)$  не зависит от его расположения на оси  $t$ .

Определение: Поток заявок называется ординарным, если вероятность появления двух или более заявок в течении элементарного интервала времени есть величина бесконечно малая по сравнению с вероятностью появления одного события на этом интервале.

Определение: Поток заявок называется потоком без последствия, если для любых непересекающихся интервалов времени число заявок, попадающих на один из них, не зависит от числа заявок, попадающих на другой. Это значит, что число заявок, которые поступили в данный отрезок времени, не зависит от числа заявок, которые поступили в предыдущие отрезки времени.

Определение: Если поток удовлетворяет требованиям стационарности, ординарности и без последствия он называется **простейшим, пуассоновским потоком**.

Простейший поток заявок широко используется в ТМО при проведении анализа работы различных систем, в частности СОУ, формализуемых в виде систем массового обслуживания. Это объясняется следующими причинами:

- использование простейшего потока позволяет получать простые аналитические выражения для оценки эффективности функционирования СОУ, формализуемых в виде СМО и СеМО;
- использование простейшего потока создает наиболее загруженный режим работы СМО, поскольку 63% промежутков времени между заявками имеют длину, меньшую среднего значения ( $\lambda$ ). Поэтому оценки эффективности работы исследуемой СОУ, получаемые в результате аналитического расчета, оказываются достаточно надежными, т.е. не хуже реальных.
- при объединении нескольких, например ( $n$ ), стационарных, ординарных, независимых случайных потоков, т.е. простейших потоков, образуется поток, который по своим характеристикам оказывается близким к простейшему и имеет интенсивность, равную сумме интенсивностей исходных потоков.

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (2.2)$$

При этом среди суммируемых потоков не должно быть потока с интенсивностью, сравнимой с суммой интенсивностей остальных потоков. Практически же сложение даже пяти простейших потоков, сравнимых по интенсивности, достаточно для того, чтобы суммарный поток оказался достаточно близким к простейшему.

В целом пуассоновский закон распределения с достаточно высоким приближением отражает многие реальные процессы массового обслуживания. Это оказывается верным, если учесть теорему Хинчина А.Я. которая представляет теоретическую и практическую ценность.

Согласно этой теореме, с учетом нестрогой ее формулировки, имеем: «Если входящий поток представляет собой сумму большого числа независимых между собой стационарных и ординарных потоков, каждый из которых вносит малый вклад в общую сумму, т.е. каждый из потоков не является сравнимым по интенсивности со всем суммарным потоком, то входящий поток близок к простейшему».

Следует иметь в виду, что пуассоновский поток может быть и нестационарным. Только стационарный пуассоновский поток является простейшим. При анализе СООУ, формализуемых в виде СМО и СеМО, обычно используют стационарный пуассоновский поток, т.е. простейший поток.

Для пуассоновского потока событий вероятность появления  $(k)$  событий за время  $(t)$  имеет распределение Пуассона и равна

$$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (2.3)$$

где  $\lambda$  - интенсивность потока заявок, т.е. среднее число заявок, поступающих в единицу времени.

Математическое ожидание, второй момент и дисперсия числа заявок, поступающих в систему для стационарного пуассоновского потока, т.е. простейшего потока, когда  $\lambda = \lambda(t)$ , соответственно равны

$$M(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda \quad (2.4)$$

$$M(k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot P_k = \lambda + \lambda^2 \quad (2.5)$$

$$D(k) = M(k^2) - [M(k)]^2 = \lambda \quad (2.6)$$

Численные значения математического ожидания и дисперсии числа заявок, поступающих в систему для стационарного пуассоновского потока (простейшего потока) равны. Однако, размерности их не совпадают. Найдем распределение интервалов времени между двумя последовательными заявками в пуассоновском стационарном потоке, когда  $\lambda = \lambda(t) = const$

Из условия ординарности потока следует, что на малом интервале времени от  $(t)$  до  $(t + \Delta t)$  может не появиться ни одной заявки с вероятностью  $P_0(\Delta t)$  или появиться одна с вероятностью  $P_1(\Delta t)$ . Сумма этих вероятностей  $P_0(\Delta t) + P_1(\Delta t) = 1$  поскольку в ординарном потоке в течение малого интервала времени  $(\Delta t)$  может появиться не более одной заявки. Поскольку вероятность появления одной заявки на малом интервале  $(\Delta t)$  равна  $P_1(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t$ , то имеем  $P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) = 1 - \lambda \cdot \Delta t$

Найдем теперь вероятность того, что на произвольном интервале времени  $(t)$  также не окажется ни одной заявки. Если интервал времени  $(t)$  разбить на равные отрезки  $\Delta t$ , то число таких отрезков будет равно  $(t/\Delta t)$ .

В силу отсутствия последействия вероятность того, что на всем интервале  $(0, t)$  не появится ни одной заявки, равна произведению вероятностей не наступления этих событий на отдельных интервалах  $(\Delta t)$ . Поэтому

$$P_0(t) = (1 - \lambda \cdot \Delta t)^{t/\Delta t} \quad \text{далее при } (\Delta t \rightarrow 0) \text{ имеем}$$

$$P_0(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \lambda \cdot \Delta t)^{\lambda t / \lambda \cdot \Delta t} = (\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - \lambda \cdot \Delta t)^{-1/\lambda \cdot \Delta t})^{-\lambda \cdot t} = e^{-\lambda \cdot t}$$

Вероятность  $P_0(t)$  - это вероятность того, что интервал времени между заявками окажется больше величины  $(t)$ . Поэтому вероятность события противоположного, т.е. функция распределения интервалов времени между двумя последовательными событиями в простейшем потоке будет иметь вид:

$$F(t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \quad (2.7)$$

Следовательно, в простейшем потоке интервалы времени между двумя последовательными событиями имеют экспоненциальную плотность распределения вероятностей

$$f(t) = dF(t)/dt = \lambda e^{-\lambda \cdot t} \quad (2.8)$$

Математическое ожидание длины интервала времени между двумя последовательными заявками, например, поступающими в систему равно:

$$M(t) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = 1/\lambda \quad (2.9)$$

Второй момент длины интервала времени между двумя последовательными заявками равен:

$$M(t^{(2)}) = \int_0^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt = 2/\lambda^2 \quad (2.10)$$

Дисперсия интервала времени между двумя последовательными событиями, т.е. между двумя последовательными моментами поступления заявок в систему, равна:

$$D(t) = M(t^2) - [M(t)]^2 = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - [M(t)]^2 = 1/\lambda^2 \quad (2.11)$$

Вычислим вероятность появления коротких интервалов времени между двумя последовательными заявками, т.е. таких интервалов, длина которых меньше математического ожидания длины интервала. Имеем:

$$P(t < M(t)) = \int_0^{1/\lambda} f(t) dt = \lambda \int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda t} dt = 1 - 1/e = 0,628 \quad (2.12)$$

### 2.3 Эрланговский поток заявок

Поток Эрланга ( $k$ )-го порядка - это поток, который образуется просеиванием стационарного пуассоновского потока. Просеивание состоит в том, что в исходном пуассоновском потоке сохраняется только каждая ( $k$ )-ая заявка, а ( $k-1$ ) заявка удаляется. Поток Эрланга ( $k$ )-го порядка обозначается ( $E_k$ ). Если исходный пуассоновский имеет интенсивность ( $\lambda$ ), то интенсивность потока Эрланга уменьшается и оказывается равной ( $\lambda/k$ ), что не удобно при замене пуассоновского на поток Эрланга при проведении аналитических расчетов. В связи с этим на практике используют нормированные потоки Эрланга.

Нормированный поток Эрланга ( $k$ )-го порядка - это поток, который образуется просеиванием стационарного пуассоновского потока, но интенсивность пуассоновского потока при этом должна быть равна ( $k \cdot \lambda$ ). В этом случае математическое ожидание и дисперсия интервалов времени между заявками потока Эрланга ( $k$ )-го порядка соответственно равны:

$$M_k = 1/\lambda \quad D_k = 1/(k \cdot \lambda^2)$$

Поэтому при постоянной интенсивности потока Эрланга с увеличением его порядка ( $k \rightarrow \infty$ ), дисперсия интервалов времени между заявками стремится к нулю, т.е. поток заявок приближается к регулярному.

Функция распределения интервалов времени между двумя последовательными заявками в потоке Эрланга ( $k$ )-го порядка имеет вид:

$$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k \cdot \lambda \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-k\lambda t} \quad (2.13)$$

Плотность распределения вероятностей интервалов времени между двумя последовательными заявками в потоке Эрланга ( $k$ )-го порядка имеет вид:

$$f(t) = dF(t)/dt = \frac{(k \cdot \lambda) \cdot (k \cdot \lambda \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-k\lambda t} \quad (2.14)$$

При ( $k=1$ ) получаем простейший поток заявок:



$$F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \qquad f(t) = \lambda e^{-\lambda \cdot t}$$

При  $(k = 2)$  получаем поток Эрланга 2-го порядка.

$$F(t) = 1 - (1 + 2\lambda t) \cdot e^{-2\lambda t} \qquad f(t) = 4\lambda^2 t \cdot e^{-2\lambda t}$$

Для любой одной фазы, при наличии  $(k)$  фаз, математическое ожидание длины интервала времени фазы и дисперсия времени этой фазы равны:

$$M(t) = 1/k\lambda \qquad D(t) = (1/k\lambda)^2$$

Математическое ожидание и дисперсия длины интервала времени между двумя последовательными заявками в потоке Эрланга  $(k)$ -го порядка соответственно равны

$$M(t) = k \cdot \frac{1}{k\lambda} = \frac{1}{\lambda} \qquad D(t) = k \cdot \frac{1}{(k\lambda)^2} = \frac{1}{k\lambda^2}$$

Квадрат коэффициента вариации длины интервала времени между двумя последовательными заявками в потоке Эрланга  $(k)$ -го порядка равен

$$v^2(t) = \frac{D(t)}{[M(t)]^2} = \frac{1}{k} \qquad (2.15)$$

#### 2.4 Длительности обработки заявок

Длительность обслуживания заявок в ОА СМО равна промежутку времени, необходимому этому ОА для обслуживания поступившей заявки.

В систему может поступать несколько типов заявок. Предполагаем, что длительности обслуживания заявок одного типа независимы, что вполне справедливо для большинства реальных СОУ.

Наиболее широко на практике используют следующие законы распределения времени обслуживания заявок:

- Экспоненциальное распределение времени обслуживания заявок;
- Распределение времени обслуживания заявок по закону Эрланга.

Рассмотрим их более подробно

## 2.5 Экспоненциальное распределение времени обработки заявок

Если отсутствуют сведения о законе распределения времени обслуживания заявок, но известно среднее время обслуживания, то время обслуживания заявок можно аппроксимировать экспоненциальным распределением вида:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t} \qquad f(t) = \mu e^{-\mu t}$$

где  $\mu = 1/t_0$  - интенсивность обслуживания заявок

$t_0$  - математическое ожидание (среднее время) обслуживания заявок.

Математическое ожидание интервала времени обслуживания заявок равно:

$$M(t) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = 1/\mu$$

Второй момент интервала времени обслуживания заявок равен:

$$M(t^{(2)}) = \int_0^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt = 2/\mu^2$$

Дисперсия интервала времени обслуживания заявок равна:

$$D(t) = M(t^2) - [M(t)]^2 = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - [M(t)]^2 = 1/\mu^2$$

## 2.6. Распределение времени обработки заявок по закону Эрланга

Функция распределения длительности обслуживания заявок по закону Эрланга ( $k$ )-го порядка имеет следующий вид :

$$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k \cdot \mu \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-k\mu t} \qquad (2.16)$$

Поэтому плотность распределения длительности обслуживания заявок по закону Эрланга ( $k$ )-го порядка имеет следующий вид :

$$f(t) = dF(t)/dt = \frac{(k \cdot \mu) \cdot (k \cdot \mu \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-k\mu t} \qquad (2.17)$$

После подстановки значения ( $k$ ) получаем.

При ( $k=1$ ) экспоненциальное обслуживание:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t} \qquad f(t) = \mu e^{-\mu t}$$

При  $(k = 2)$  обслуживание Эрланга 2-го порядка,

$$F(t) = 1 - (1 + 2\mu t) \cdot e^{-2\mu t} \quad f(t) = 4\mu^2 t \cdot e^{-2\mu t}$$

Для любой одной фазы (при наличии  $(k)$  фаз) обслуживания математическое ожидание длины интервала времени этой фазы и дисперсия времени этой фазы соответственно равны:

$$M(t) = 1/k\mu \quad D(t) = (1/k\mu)^2$$

Математическое ожидание и дисперсия длины интервала времени обслуживания для Эрланга  $(k)$ -го порядка соответственно равны:

$$M(t) = k \cdot \frac{1}{k\mu} = \frac{1}{\mu} \quad D(t) = k \cdot \frac{1}{(k\mu)^2} = \frac{1}{k\mu^2}$$

Квадрат коэффициента вариации длины интервала времени обслуживания для Эрланга  $(k)$ -го порядка равен:

$$v^2(t) = \frac{D(t)}{[M(t)]^2} = \frac{1}{k} \quad (2.18)$$

### Глава 3. Оценка параметров входного потока заявок в СОУ

Обычно поток заявок в СОУ считают стационарным пуассоновским, т.е. простейшим, который обладает свойствами: стационарности, отсутствия последствия и ординарности. Для простейшего потока вероятность поступления  $k$  заявок в единицу времени определяют из следующего выражения:

$$P_k = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \quad (3.1)$$

где  $\lambda$  - интенсивность поступления заявок в единицу времени, т.е. например, среднее число заявок в час.

Простейший поток имеет также следующие особенности:

- поток является однопараметрическим, так как математическое ожидание, второй момент и дисперсия количества заявок, поступающих в единицу времени, соответственно определяют из следующих выражений:

$$M(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \quad (3.2)$$

$$M(k^{(2)}) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \cdot (1 + \lambda) = \lambda + \lambda^2 \quad (3.3)$$

$$D(k) = M(k^2) - M^2(k) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda \quad (3.4)$$

Любая случайная величина, как правило, имеет размерность, Для пуассоновского входного потока физические размерности математического ожидания и дисперсии не совпадают, хотя их численные значения равны.

- интервалы времени между последовательно поступившими заявками пуассоновского входного потока имеют экспоненциальное распределение.

- поток позволяет получить для анализа систем, подобных СОУ, простые аналитические зависимости.

Однако, всегда на практике, необходима проверка гипотезы о том, что рассматриваемый поток заявок в СОУ является пуассоновским.

### 3.1. Проверка гипотезы о пуассоновском входном потоке заявок

Предлагаемый подход включает несколько этапов.

Этап 1. Определяем экспериментально число заявок, поступивших за единицу времени (например за один час) и сколько таких поступлений заявок было за время проведения эксперимента, определяемое объемом выборки. При этом объемом выборки называют  $n$  – количество заявок, которое включает объем наблюдений. Задаем начальное значение объема выборки (например,  $n = 200$ ), которое при необходимости можно изменить. Данные, полученные в результате наблюдения за реальным поступлением заявок, заносим в табл.3.1. При этом количество столбцов, т.е. интервалов, на которые разбиваем результаты наблюдений, должно быть не менее  $m$ . Значение  $m$  определяем из следующего выражения:  $m > \log_2 n + 1 = \log_2 200 + 1 = 9$

Этап 2. Определяем среднюю реальную интенсивность поступления заявок

( $\lambda$ ), используя данные табл.3.1 и следующее выражение:  $\lambda = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot n_{\Delta i}$

Где :  $k_i$  - число заявок, поступивших за один час;

$n_{\Delta i}$  - сколько раз поступило на практике  $k_i$  заявок за один час;

$n=200$  – количество заявок, которое подвергнуто испытанию;

$m=12$ – количество интервалов, на которые были разбиты все заявки.

После подстановки исходных данных получаем, что  $\lambda = 6$  заявок/час

Этап 3. Определяем теоретические вероятности поступления заявок, согласно распределению Пуассона, соответствующие их практическому поступлению с  $\lambda = 6$  заявок/час, используя следующее выражение

$$P_k = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Далее вычисляем теоретические частоты поступления ( $k_i$ ) заявок за час, используя выражение:

$$n_T = n \cdot P_k$$

Вычисленные значения теоретических вероятностей поступления заявок и соответствующих им частот поступления (количество поступлений) заносим в табл.1.2

Этап 4. Проводим сравнение экспериментальных и теоретических частот поступления заявок, приведенных в таб.3.2, используя следующее выражение.

$$\beta_i = (n_{Эi} - n_{Ti})^2 / n_{Ti}$$

Суммируя полученные результаты по всем интервалам получаем, что значение критерия согласия (критерия хи квадрат) равно  $\chi^2_{\text{Э}} = \sum_{i=0}^m \beta_i = 5,856$ .

Таблица 3.1

Интенсивности поступления заявок в СОУ

$K_i$ (заявка/час)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n_{Эi}$ (число раз)	0	2	5	15	28	35	36	29	22	18	5	5

Таблица 3.2

Сравнительный анализ экспериментальных и теоретических результатов для входного потока заявок в СОУ

№ Интервала	$k$ - кол-во заявок, поступающих за один час	Частота поступления $k$ заявок за час		Теоретическая вероятность поступления $k$ заявок за час $P(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$	Различие экспериментальных и теоретических результатов в $(n_{\text{Э}} - n_{\text{Т}})$	Значение критерия $(n_{\text{Э}} - n_{\text{Т}})^2 / n_{\text{Т}}$
		$n_{\text{Э}}$ практика	$n_{\text{Т}}$ Теория			
1	0	0	0,50	0,0025	-0,50	0,500
2	1	2	3,00	0,0150	-1,00	0,333
3	2	5	9,00	0,0450	-4,00	1,777
4	3	15	18,00	0,0900	-3,00	0,500
5	4	26	27,00	0,1350	-1,00	0,037
6	5	35	32,40	0,1620	2,60	0,208
7	6	36	32,40	0,1620	3,60	0,400
8	7	29	27,76	0,1388	1,24	0,055
9	8	22	20,84	0,1042	-1,16	0,065
10	9	18	13,88	0,0694	4,12	1,223
11	10	7	8,32	0,0416	-1,32	1,210
12	11 и более	5	6,90	0,0345	-1,90	0,523
Сумма		200	200	1		$\chi^2_{\text{Э}} = 5,856$

Этап 5. По таблице критических точек находим табличное значение критерия согласия  $\chi_T^2$ . Для числа степеней свободы (S), равного числу интервалов минус два  $S = 12 - 2 = 10$  и уровня значимости  $\alpha = 0,05$ , имеем  $\chi_T^2 = 18,3$ . Следует иметь в виду, что уровень значимости  $\alpha = 0,05$  показывает, что вероятность отвергнуть правильную гипотезу соответствует 5%.

Поскольку значение критерия согласия  $\chi_S^2 = 5,856$ , а значение  $\chi_T^2 = 18,3$  и  $\chi_S^2 < \chi_T^2$ , то нет оснований отвергать гипотезу, что входной поток заявок пуассоновский.

Этап 6. Определяем необходимый объем выборки (n) для подтверждения полученных результатов, используя следующее выражение:

$$n = \frac{t^2 \cdot D \cdot N}{\delta_\lambda^2 \cdot N + t^2 \cdot D} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 1200}{0,1 \cdot 1200 + 4 \cdot 6} = 200 \text{ заявок/час}$$

где  $t$  - коэффициент доверия, который зависит от вероятности, с которой гарантируется предельная ошибка выборки (при вероятности  $P = 0,95$ ;  $t = 2$ )

$D$  - дисперсия числа заявок поступающих за один час  $D = 6 \text{ заявок/час}$

$N$  - количество заявок, поступающих за месяц  $N = 1200 \text{ заявок}$

$\delta_\lambda$  - предельная ошибка выборки, которая равна  $\delta_\lambda < 0,31 \text{ заявок/час}$ .

Это означает, что границы вычисления  $\lambda$  такие, что  $5,69 < \lambda < 6,31$  заявок/час. Поэтому погрешность вычисления интенсивности поступления клиентов ( $\lambda$ ) в СОУ находится в пределах 5%, что вполне приемлемо.

### **3.2. Экспресс-метод проверки гипотезы о пуассоновском**

#### **входном потоке заявок**

Этот метод основан на определении среднего значения и дисперсии количества заявок, поступающих в систему в единицу времени. Равенство этих величин позволяет приближенно считать, что входной поток заявок пуассоновский или близкий к нему.

Согласно данным, приведенным в табл. 3.1 имеем, что среднее число заявок, поступающих в СОУ в единицу времени равно

$$M(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^m k_i \cdot n_{\text{Э}i} = 6,00 \text{ заявок/час}$$

Второй момент числа заявок, поступающих в единицу времени равен:

$$M(k^{(2)}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^m k_i^2 \cdot n_{\text{Э}i} = 41,80 \text{ заявок}^2 / \text{час}^2$$

Дисперсия числа заявок, поступающих в единицу времени равна

$$D(k) = M(k^{(2)}) - [M(k)]^2 = 5,80 \text{ заявок}^2 / \text{час}^2$$

Поскольку численные значения  $M(k)$  и  $D(k)$  практически равны, то входной поток заявок приближенно можно считать пуассоновским.



## Глава 4. Оценка параметров времени обработки заявок в СОУ

### 4.1. Экспоненциальное распределение времени обработки заявок

Предполагаем, что время обработки заявок, поступающих в СОУ подчиняется экспоненциальному закону. Тогда, если  $t_0$  - среднее время обработки заявок, то  $\mu = 1/t_0$  - интенсивность обработки заявок, т.е. среднее количество заявок, обработанных в единицу времени, например, за один час.

Экспоненциальное распределение относится к классу непрерывных распределений и имеет следующие особенности:

1) Функция распределения вероятности времени обработки заявок имеет вид:  $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$

2) Плотность распределения вероятности времени обработки заявок имеет вид:  $f(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}$

3) Математическое ожидание, второй момент и дисперсия времени обработки заявок соответственно имеют вид

$$M[t] = \int_0^t t \cdot f(t) dt = \int_0^t t \cdot \mu \cdot e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu} \quad (4.1)$$

$$M[t^{(2)}] = \int_0^t t^2 \cdot f(t) dt = \int_0^t t^2 \cdot \mu \cdot e^{-\mu t} dt = \frac{2}{\mu^2} \quad (4.2)$$

$$D[t] = M[t^2] - M^2[t] = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} \quad (4.3)$$

4) Позволяет получить для анализа сложных систем, подобных СОУ, простые аналитические зависимости.

### 4.2. Проверка гипотезы о экспоненциальном распределении времени обработки заявок в СОУ

Для проверки гипотезы о экспоненциальном распределении времени обработки заявок в СОУ используем тот же подход, который использовали ранее для проверки гипотезы о пуассоновском входном потоке заявок.

Предлагаемый подход включает следующие этапы:

Этап 1. Определяем экспериментально время в минутах, которое затратил оператор на обработку заявок в СОУ и сколько таких заявок было за время проведения эксперимента, определяемое объемом выборки. Задаем начальное значение объема выборки  $n = 300$ , которое при необходимости можно изменить. Данные, полученные по времени обработки оператором заявок заносим в табл.4.1 При этом количество столбцов, т.е. интервалов данных эксперимента, должно быть не менее величины  $m$ , которую определяем из выражения  $m > \log_2 n + 1 = \log_2 300 + 1 = 10$

Этап 2. Определяем среднее время обработки оператором заявки ( $t_0$ ), используя данные табл.4.1 и следующее выражение  $t_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^m t_i \cdot n_{\Delta i}$

Где:  $t_i$  - среднее время обработки заявки при его попадании в  $i$  – ый интервал;

$n_{\Delta i}$  - число заявок, попавших по времени выполнения в  $i$  – ый интервал;

$n = 300$  – количество заявок, которое подвергается испытанию;

$m = 13$  - количество интервалов.

После подстановки исходных данных получаем, что среднее время обработки заявки в СОУ равно  $t_0 = 30,2$  мин

Тогда интенсивность работы оператора по обработке заявок равна  $\mu = 2 \text{ заявки / час} = 0,0333 \text{ заявки / мин}$

Таблица 4.1

Параметры обработки оператором заявки в СОУ

$\Delta T_i$ (мин)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
$t_i$ (мин)	5	15	25	35	45	55	65	75	85
$n_{\Delta i}$ (число раз)	64	64	48	40	29	20	15	6	5

$\Delta T_i$ (мин)	90-100	100-110	110-120	120-130
$t_i$ (мин)	95	105	115	125
$n_{\Delta i}$ (число раз)	5	2	1	1

Этап 3. Определяем теоретические вероятности обработки заявок, согласно экспоненциальному распределению, соответствующие их практической обработке с  $\mu = 2 \text{ заявки} / \text{час} = 0,0333 \text{ заявки} / \text{мин}$ , используя следующее выражение

$$P_i = e^{-\mu \cdot t_{ni}} - e^{-\mu \cdot t_{ki}}$$

где  $P_i$  - вероятность попадания в  $i$ -ый интервал;

$t_{ni}$  - начальное время для  $i$ -го интервала;

$t_{ki}$  - конечное время для  $i$ -го интервала.

Далее вычисляем теоретические частоты выполнения заявки по интервалам  $n_{Ti} = n \cdot P_i$

После этого вычисленные теоретические вероятности и соответствующие им частоты обработки заявок заносим в табл. 4.2

Этап 4. Для сравнения экспериментальных и теоретических частот обработки заявок в СОУ составляем табл.4.3, в которую заносим необходимые данные из табл.4.1 и табл.4.2. Для сравнения частот используем следующее выражение:

$$\beta_i = (n_{\text{э}i} - n_{Ti})^2 / n_{Ti}$$

Суммируя полученные результаты по всем интервалам получаем, что значение критерия согласия (критерия хи квадрат) равно  $\chi_{\text{э}}^2 = \sum_{i=0}^m \beta_i = 19,1$ .

Этап 5. По таблице критических точек находим табличное значение критерия согласия  $\chi_T^2$ . Для числа степеней свободы (S), равного числу интервалов минус два  $S = 13 - 2 = 11$  и уровня значимости  $\alpha = 0,05$ , имеем  $\chi_T^2 = 19,7$ . При этом уровень значимости  $\alpha = 0,05$  показывает, что вероятность отвергнуть правильную гипотезу равна 5%.

Поскольку значение критерия согласия по экспериментальным данным  $\chi_{\text{э}}^2 = 19,1$ , а табличное значение  $\chi_T^2 = 19,7$  и  $\chi_{\text{э}}^2 < \chi_T^2$ , то нет оснований отвергать гипотезу, что время обработки оператором заявок в СОУ подчинено экспоненциальному распределению.

Таблица 4.2

Параметры теоретического экспоненциального распределения при  $\mu = 0,0333$  заявки / мин

№ интервала	Границы интервала	$e^{-\mu \cdot t_{ni}}$	$e^{-\mu \cdot t_{ki}}$	Вероятность оформления заказа $P_i$	Частота оформления заказа $n_{Ti}$
1	0-10	1	0,717	0,283	84,90
2	10-20	0,717	0,514	0,203	60,90
3	20-30	0,514	0,368	0,146	43,80
4	30-40	0,368	0,266	0,102	30,60
5	40-50	0,266	0,192	0,074	22,20
6	50-60	0,192	0,137	0,055	16,50
7	60-70	0,137	0,100	0,037	11,10
8	70-80	0,100	0,072	0,028	8,40
9	80-90	0,072	0,052	0,020	6,00
10	90-100	0,052	0,038	0,014	4,20
11	100-110	0,038	0,028	0,010	3,00
12	110-120	0,028	0,020	0,008	2,40
13	120 и далее	0,020	0,000	0,020	6,00
Сумма				1	300

Таблица 4.3

Сравнительный анализ экспериментальных и теоретических результатов для времени обработки заявки в СОУ.

№ интервала	Границы интервала	Частота обработки заявки		Различие экспериментальных и теоретических результатов $(n_{\text{Э}} - n_{\text{Т}})$	Значение критерия $(n_{\text{Э}} - n_{\text{Т}})^2 / n_{\text{Т}}$
		$n_{\text{Э}}$ практика	$n_{\text{Т}}$ теория		
1	0-10	64	84,90	-20,90	5,14
2	10-20	64	60,90	3,10	0,15
3	20-30	48	43,80	4,20	0,40
4	30-40	40	30,60	9,40	2,90
5	40-50	29	22,20	6,80	2,08
6	50-60	20	16,50	3,50	0,75
7	60-70	15	11,10	3,90	1,37
8	70-80	6	8,40	-2,40	0,68
9	80-90	5	6,00	-1,00	0,17
10	90-100	5	4,20	0,80	0,15
11	100-110	2	3,00	-1,00	0,33
12	110-120	1	2,40	-1,40	0,82
13	120 и далее	1	6,00	-5,00	4,16
Сумма		300	300		$\chi^2_{\text{Э}} = 19,10$

Этап 6. Определяем необходимый объем выборки ( $n$ ) для подтверждения полученных результатов, используя следующее выражение

$$n = \frac{t^2 \cdot D \cdot N}{\delta_T^2 \cdot N + t^2 \cdot D} = \frac{4 \cdot 900 \cdot 1200}{9 \cdot 1200 + 4 \cdot 900} = 300 \text{ заявок}$$

где  $t$  - коэффициент доверия, который зависит от вероятности, с которой гарантируется предельная ошибка выборки (при  $P=0,95$  имеем  $t=2$ )

$D$  - дисперсия времени обработки заказов клиентов  $D=900 \text{ мин}$

$N$  - количество клиентов, поступающих за месяц  $N=1200$  заявок

$\delta_\lambda$  - предельная ошибка выборки, которая равна  $\delta_T < 3 \text{ мин}$ .

Это означает, что предельные границы среднего времени обработки заявки в СОУ ( $t_0$ ) следующие:  $27 \text{ мин} < t_0 < 33 \text{ мин}$  Поэтому погрешность вычисления среднего времени обработки заявок клиентов находится в пределах 10 %, что вполне приемлемо.

## Глава 5. Разработка формализованных схем СОУ и ее компонент

### 5.1. Этапы разработки формализованных схем СОУ

Разработка Ф-схем СОУ и ее компонент включает следующие этапы:

- Этап 1. Разработка структурной схемы исследуемой системы.
- Этап 2. Выделение основных компонент системы и их взаимодействия.
- Этап 3. Разработка укрупненной формализованной схемы системы.
- Этап 4. Выбор формализованных схем компонент системы.
- Этап 5. Разработка детальной формализованной схемы системы.

Рассмотрим процесс разработки Ф-схем СОУ на примерах.

### 5.2. Разработка Ф-схемы службы ремонта ПЭВМ

Этап 1. Структурная схема службы ремонта ПЭВМ приведена на рис.5.1

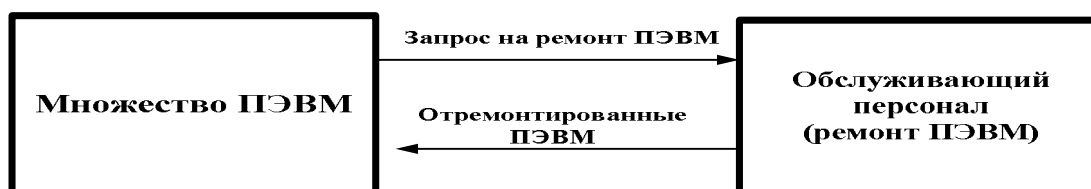


Рис. 5.1 Структурная схема службы ремонта ПЭВМ.

Рассматриваем три варианта организации работы службы ремонта ПЭВМ.

Вариант 1. Каждый сотрудник службы ремонта полностью ремонтирует ПЭВМ, т.е. аппаратуру (КТС) и настройку программного обеспечения (ПО).

Вариант 2. Сотрудники службы ремонта разделены на две группы: первая выполняет ремонт КТС, вторая – настройку ПО.

Вариант 3. Сотрудники службы ремонта разделены на три группы. Каждый сотрудник первой группы полностью выполняет все виды ремонтных работ.

Сотрудники второй группы выполняют ремонт КТС, а сотрудники третьей группы – настройку ПО.

Этап 2. Выделяем основных компоненты трех рассматриваемых вариантов работы службы ремонта. Обобщённая схема трех рассматриваемых вариантов работы службы ремонта приведена на рис. 5.2.

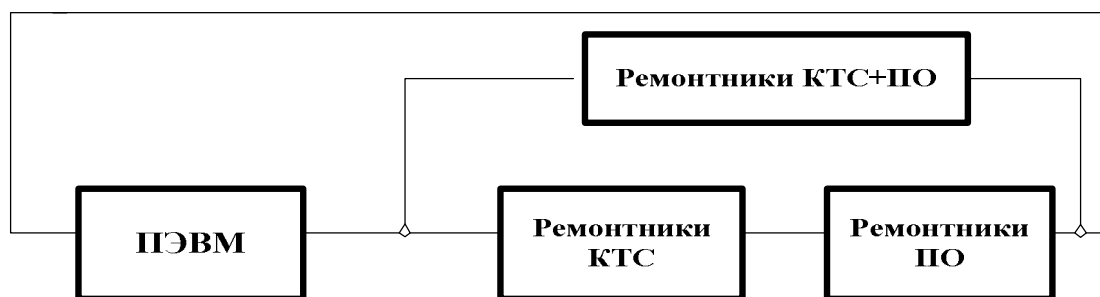


Рис. 5.2 Структурная схема связей компонентов службы ремонта.  
 Этап 3. Составляем укрупнённую Ф – схему службы ремонта ПЭВМ, которая, в виде набора Ф-схем СМО и связей между ними, приведена на рис.5.3.

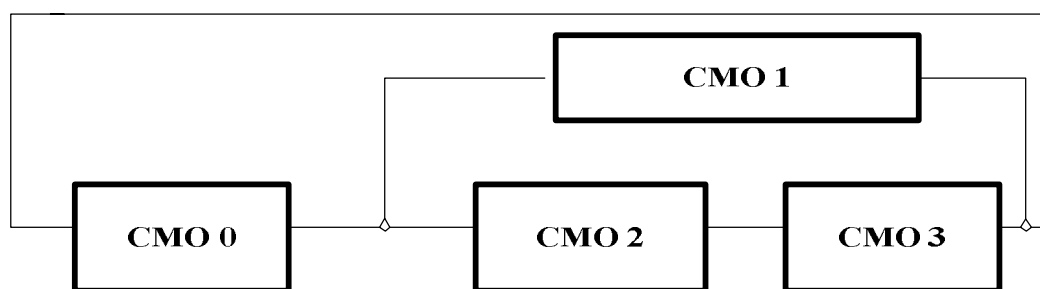


Рис. 5.3 Укрупнённая Ф – схема службы ремонта ПЭВМ..

Этап 4. Выбираем типы СМО, соответствующие Ф-схемам компонент службы ремонта для трех рассматриваемых вариантов ее работы.

СМО 0 - рабочие станции, СМО типа  $M/M/N/0$ , где  $N$  – количество ПЭВМ;

СМО 1 - ремонтники (КТС+ПО), СМО типа  $M/M/c1$ , где  $c1$  - кол-во ремонтников (КТС+ПО);

СМО 2 - ремонтники КТС, СМО типа  $M/M/c2$ ,  $c2$  - кол-во ремонтников КТС;

СМО 3 - ремонтники ПО, СМО типа  $M/M/c3$ ,  $c3$  - кол-во ремонтников ПО;

Этап 5. Составляем детальную Ф-схему службы ремонта, приведена на Рис.5.4.

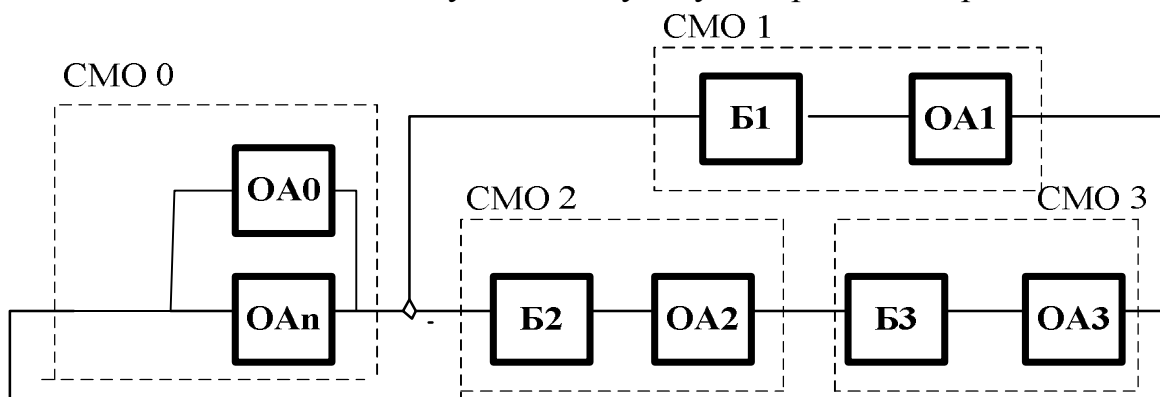
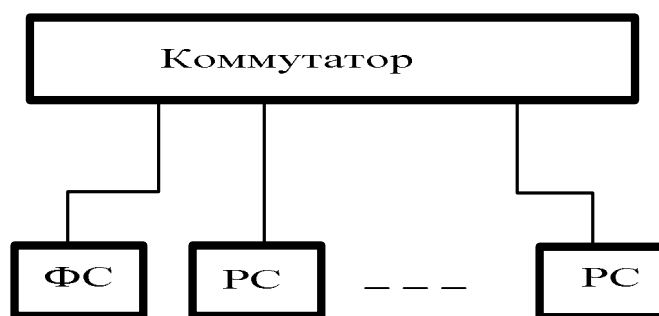


Рис. 5.4 Детальная Ф-схема службы ремонта ПЭВМ.

### 5.3. Разработка Ф-схемы ЛВС подразделения

Этап 1. Структурная схема ЛВС подразделения приведена на рис.1.6.



ФС – файловый сервер, РС – рабочая станция.

Рис.5.5. Структурная схема ЛВС подразделения

Этап 2. Схема взаимодействия основных компонент ЛВС приведена на Рис.5.6.

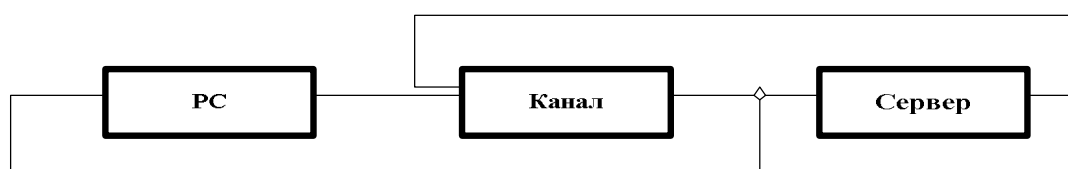


Рис.5.6. Схема взаимодействия основных компонент ЛВС.

Этап 3. Составляем укрупнённую Ф – схему ЛВС подразделения, которая, в виде набора Ф-схем СМО и связей между ними, приведена на Рис.5.7.

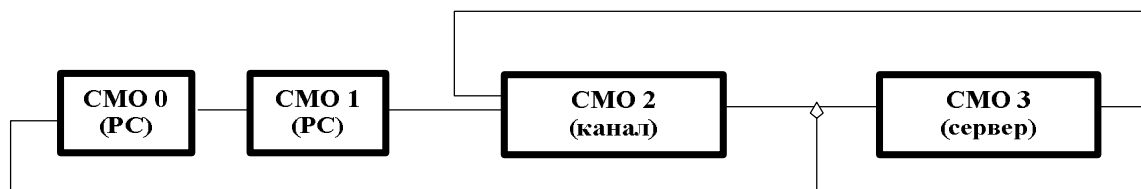


Рис.5.7. Укрупнённая Ф-схема взаимодействия компонент ЛВС.

Поскольку на РС осуществляется и дообработка запроса и его формирование, то рабочую станцию представляют в виде двух СМО: СМО 0 соответствует (РС - дообработка запроса), а СМО1 - (РС - формирование запроса). СМО 2 соответствует каналу; а СМО 3 - серверу.

Этап 4. Выбираем типы СМО, соответствующие Ф-схемам компонент ЛВС

СМО 0 и СМО 1 – это СМО типа  $M / M / N / \infty / ПППО / N$ .

СМО 2 и СМО 3 – это СМО типа  $M / M / 1$ .

Этап 5. Составляем детальные Ф-схемы ЛВС подразделения, которые приведены на рис.5.8. и Рис.5.9.



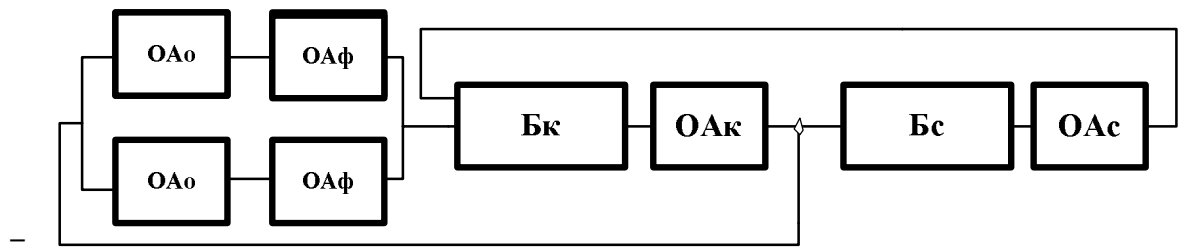


Рис. 5.8 Ф-схема ЛВС, содержащая ПЭВМ, канал и сервер. .

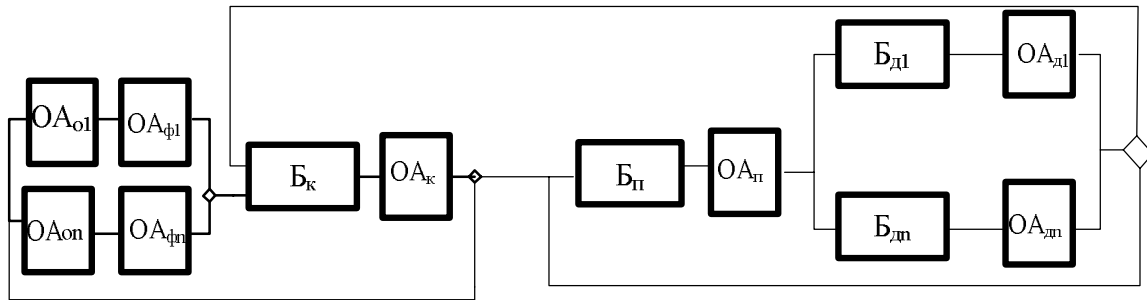


Рис.5.9 Ф- схема ЛВС, в которой сервер включает процессоры и диски.

На схемах ОАо –отражает работу РС (дообработка запроса); ОАф - работу РС (формирование запроса); Бк и ОАк - работу буфера канала и канала; Бс и ОАс - работу буфера сервера и сервера. Бп и ОАп - работу буфера процессора и процессора, Бд и ОАд - работу буфера диска и диска сервера.

**Часть 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ  
ОРГАНИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ВИДЕ СИСТЕМ  
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

**Глава 6. Методы анализа систем массового обслуживания  
6.1. Анализ систем массового обслуживания на основе марковских  
случайных процессов**

Работа СОУ обычно связана с обслуживанием заявок, которые поступают в виде запросов от клиентов в случайные моменты времени и изменяют состояние СОУ. На практике, в большинстве случаев, имеют место ситуации, когда количество возможных состояний СОУ заранее известно, при этом оно конечно или бесконечно, и переходы СОУ из одного состояния в другое происходят в случайные моменты времени.

Если все входящие в СОУ потоки заявок, которые изменяют ее состояние, стационарные пуассоновские, или близкие к ним, а интервалы времени обслуживания заявок представляют собой независимые случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение, то работу СОУ можно формализовать в виде марковских СМО.

Для анализа марковских СМО обычно используют теорию марковских случайных процессов с дискретными конечными или бесконечными состояниями и непрерывным временем обслуживания.

Методику анализа марковских систем массового обслуживания в стационарном режиме работы можно представить с помощью однородных марковских случайных процессов в виде последовательности следующих действий.

1. Рассматривать функционирование СМО в стационарном режиме, когда интенсивности поступления и обслуживания заявок не зависят от времени.
2. Ввести понятие состояния системы. Например, состояние системы может быть определено как число заявок, которое находится в СМО (в очереди и на обслуживании). Указать все состояния, в которых может находиться система в разные моменты времени. При этом следует соблюдать условие

нормировки вероятностей состояний, когда сумма вероятностей всех возможных состояний системы должна быть равна единице.

3. Составить граф всех возможных состояний системы, т.е. схему состояний, на которой указать все возможные состояния системы, вероятности этих состояний, все возможные переходы системы из одного состояния в другое состояние, а также интенсивности этих переходов.

4. Составить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения значений вероятностей состояний системы, используя граф состояний системы и следующие правила:

а) число алгебраических уравнений, включая условие нормировки вероятностей состояний, должно соответствовать числу состояний в графе состояний системы;

б) для каждого состояния графа состояний системы должно быть составлено свое уникальное алгебраическое уравнение;

в) в левой части каждого уравнения должно быть столько членов, сколько стрелок (интенсивностей переходов) связано с тем состоянием в графе состояний системы, для которого составлено данное уравнение;

г) правая часть каждого уравнения должна быть равна нулю;

д) любой член каждого уравнения должен быть представлен как произведение интенсивности перехода, соответствующей данной стрелке, и вероятности того состояния, из которого стрелка исходит;

е) если стрелка направлена из состояния, то соответствующий член имеет знак минус, а если в состояние, то соответствующий член имеет знак плюс.

5. Вычислить значения вероятностей состояний системы, решая составленную СЛАУ с учетом выполнения условия нормировки вероятностей.

Вычислить основные характеристики функционирования СМО:

- загрузка обслуживающего аппарата СМО;
- вероятность потери заявок в СМО;
- среднее число заявок в очереди в СМО;
- среднее число заявок в СМО;

- среднее время пребывания заявок в очереди СМО;
- среднее время пребывания заявок в СМО.

Пример.6.1 Рассмотрим методику анализа марковской СМО М/М/1.

Решение.

1. Рассматриваем работу СМО М/М/1 в стационарном режиме, когда  $\lambda$  - интенсивность поступления заявок,  $\mu$  - интенсивность обслуживания заявок и они не зависят от времени. При этом  $\lambda < \mu$ . Схема СМО приведена на Рис.6.1

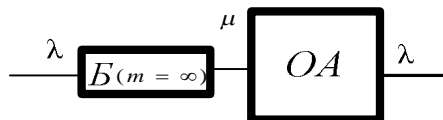


Рис.6.1 Схема СМО М/М/1

2. Вводим понятия:

- $S_i$  - состояние СМО (где  $0 \leq i \leq \infty$ ), которое определяем как число заявок  $i$ , находящихся в СМО (в очереди и на обслуживании).
- $P_i$  - вероятность пребывания СМО в состоянии  $i$ , где  $(0 \leq i \leq \infty)$
- условие нормировки вероятностей состояний СМО  $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$

3. Составляем граф возможных состояний СМО, который приведен на Рис.6.2

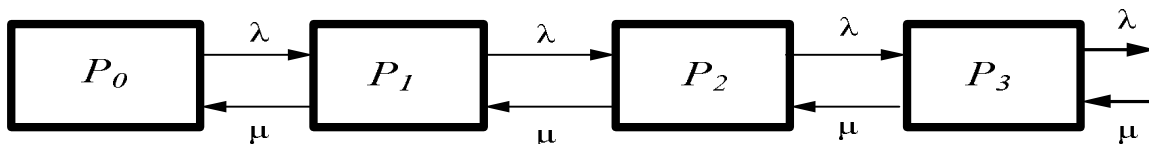


Рис.6.2 Граф состояний СМО М/М/1

4. Составляем систему линейных алгебраических уравнений для предельных значений вероятностей состояний СМО М/М/1, которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 P_1 \cdot \mu - P_0 \lambda &= 0 \\
 P_2 \cdot \mu + P_0 \lambda - P_1 (\lambda + \mu) &= 0 \\
 P_3 \cdot \mu + P_1 \lambda - P_2 (\lambda + \mu) &= 0 \\
 P_4 \cdot \mu + P_2 \lambda - P_3 (\lambda + \mu) &= 0 \\
 P_5 \cdot \mu + P_3 \lambda - P_4 (\lambda + \mu) &= 0 \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Решаем систему уравнений (6.1) и получаем  $P_i = P_0 \cdot (\lambda / \mu)^i = P_0 \cdot \rho^i$

Где  $\rho = \lambda / \mu$  - загрузка СМО М/М/1.

С учетом условия нормировки имеем: 
$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = \sum_{i=0}^{\infty} P_0 \cdot \rho^i = 1 \quad (6.2)$$

Решаем уравнение (6.2) и получаем: 
$$P_0 = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \right)^{-1} = 1 - \rho \quad (6.3)$$

Тогда 
$$P_i = P_0 \cdot \rho^i = (1 - \rho) \cdot \rho^i \quad (6.4)$$

Вычисляем характеристики функционирования СМО М/М/1

Среднее число заявок в очереди СМО М/М/1 определяют по формуле:

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \cdot P_i = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad (6.5)$$

Среднее число заявок в СМО М/М/1 определяют по формуле:

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P_i = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (6.6)$$

Среднее время пребывания заявок в очереди СМО М/М/1 ( $W$ ) и в СМО М/М/1 ( $T$ ) соответственно определяют по формулам:

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P_i \cdot t_0 = \frac{\rho \cdot t_0}{1-\rho}, \quad \text{где } t_0 = 1/\mu \quad (6.7)$$

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) \cdot P_i \cdot t_0 = \frac{t_0}{1-\rho} \quad (6.8)$$

При этом 
$$L = Q + \rho = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (6.9)$$

$$T = W + t_0 = \frac{t_0}{1-\rho} \quad (6.10)$$

Дисперсии времени нахождения заявок в очереди СМО ( $D_W$ ) и пребывания в

СМО ( $D_T$ ) соответственно определяют из следующих выражений:

$$D_W = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot P_i \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 - W^2 \quad (6.11)$$

$$D_T = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^2 \cdot P_i \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 - T^2 \quad (6.12)$$

Вероятность, что время ожидания заявки в очереди меньше ( $t$ ) определяют по формуле:

$$P(t_{ож} < t) = 1 - \rho \cdot e^{-(c\mu - \lambda) \cdot t} \quad (6.13)$$

Вероятность, что время пребывания заявки в СМО меньше ( $t$ ) определяют по формуле:

$$P(t_{прб} < t) = 1 - e^{-(c\mu - \lambda) \cdot t} \quad (6.14)$$

В СМО М/М/1 входной поток заявок - пуассоновский, а обслуживание заявок подчиняется экспоненциальному закону.

$F(t)$  - Функция распределения экспоненциального закона имеет вид:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\mu t}, & t > 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

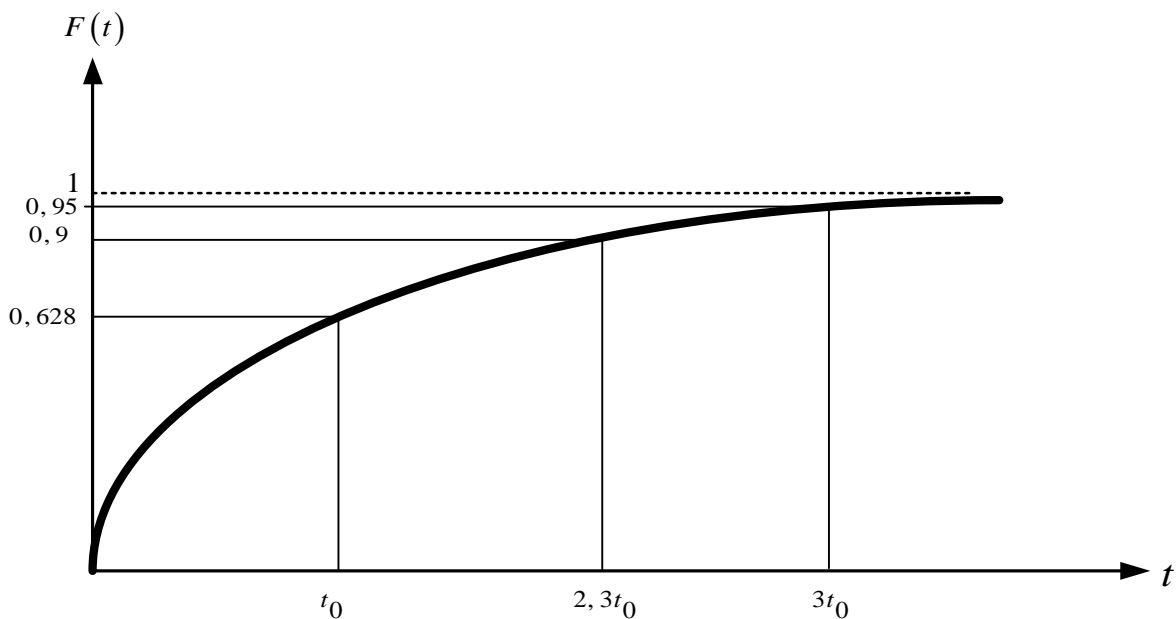


Рис. 6.3. График экспоненциальной функции распределения  
 При этом математическое ожидание, второй момент и дисперсию времени обслуживания заявок в СМО М/М/1 определяют по следующим формулам:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot P(t) dt = \frac{1}{\mu}$$

$$M(t^{(2)}) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot P(t) dt = \frac{2}{\mu^2}$$

$$D(t) = M(t^{(2)}) - (M(t))^2 = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}$$

Графы состояний СМО М/М/2 и СМО М/М/с соответственно приведены на Рис.6.4 и Рис.6.5.

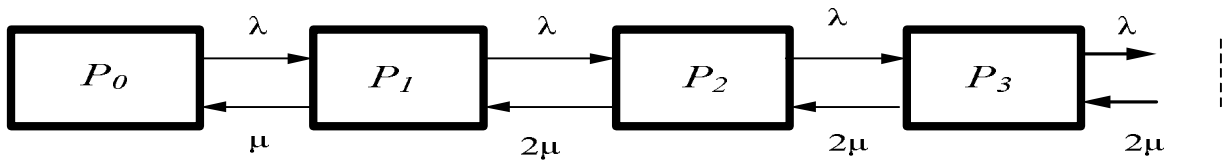


Рис.6.4 Граф состояний СМО М/М/2

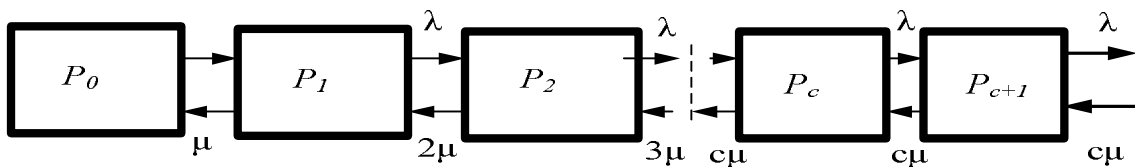


Рис.6.5 Граф состояний СМО М/М/с

С учетом этих графов и выполнения условия нормировки вероятностей состояний для каждой СМО, составлены СЛАУ и определены показатели работы СМО М/М/2 и СМО М/М/с, которые приведены в главе 7.

Вспомогательные справочные материалы, необходимые для выполнения расчетов и получения аналитических выражений для оценки показателей работы СМО с использованием теории случайных марковских процессов, приведены в Приложении 1.

## 6.2. Анализ систем массового обслуживания на основе метода подобия

При анализе немарковских СМО часто используют метод подобия (или метод аналогий) для получения простых аналитических выражений для оценки показателей функционирования этих СМО.

Для оценки среднего числа заявок в очереди СМО М/Г/1 Поллячек-Хинчин получил довольно простую формулу, которая имеет следующий вид:

$$Q = \frac{\rho^2(1+v_0^2)}{2(1-\rho)}$$

На основе использования метода аналогий применительно к СМО G/G/1 Файнберг М.А. предложил, что функция распределения интервалов времени входного потока заявок, также влияет на среднее число заявок в очереди СМО, как и функция распределения интервалов времени обслуживания.

Он предложил для оценки среднего числа заявок в очереди СМО G/G/1 использовать следующую формулу:

$$Q = \frac{\rho^2(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2)}{2(1-\rho)}, \quad (6.16)$$

где:  $v_{\text{вх}}^2$  и  $v_0^2$  - соответственно, квадраты коэффициента вариации интервалов времени входного потока заявок и интервалов времени их обслуживания.

Тогда, среднее число заявок в СМО G/G/1 (в очереди и на обслуживании) определяют по следующей формуле:

$$L = Q + \rho = \frac{\rho^2(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2 - 2) + 2\rho}{2(1-\rho)} \quad (6.17)$$

Это выражение позволяет учесть влияние на количество заявок в СМО G/G/1 как функции распределения интервалов времени между входными заявками, так и функции распределения интервалов времени их обслуживания.

Однако замена многоканальной СМО на одноканальную, той же суммарной производительности, как правило, существенно улучшает реальные характеристики функционирования исходной СМО. Поэтому необходимо иметь простые в использовании аналитические выражения и для СМО G/G/c.

### **6.3. Анализ систем массового обслуживания на основе метода инвариантов отношения**

При анализе немарковских СМО часто используют метод инвариантов отношения для получения простых аналитических выражений оценки показателей функционирования СМО типа G/G/c.



Если имеются простые аналитические выражения для оценки среднего числа заявок в СМО М/М/1, М/М/с и G/G/1, то метод инвариантов отношения позволяет установить функциональную связь между этими выражениями, чтобы получить простое аналитическое выражение для оценки среднего числа заявок в очереди СМО G/G/c. Согласно метода инвариантов отношения, имеем следующую связь для числа заявок, находящихся в очередях указанных СМО.

$$\frac{Q_{G/G/c}}{Q_{G/G/1}} = \frac{Q_{M/M/c}}{Q_{M/M/1}} \quad (6.18)$$

Тогда 
$$Q_{G/G/c} = Q_{G/G/1} \frac{Q_{M/M/c}}{Q_{M/M/1}} \quad (6.19)$$

При этом известны следующие аналитические выражения.

$$Q_{M/M/1} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} \quad (6.20)$$

$$Q_{M/M/c} = \frac{c\rho^{c+1}}{(1-\rho^c)} \quad (6.21)$$

$$Q_{G/G/1} = \frac{\rho^2(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2)}{2(1-\rho)} \quad (6.22)$$

После подстановки выражений (6.20), (6.21) и (6.22) в (6.19) получаем следующее выражение для вычисления среднего числа заявок в очереди СМО G/G/c:

$$Q_{G/G/c} = \frac{c\rho^{c+1}(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2)}{2(1-\rho^c)} \quad (6.23)$$

Тогда среднее число заявок в СМО типа G/G/c (в очереди и на обслуживании) следует вычислять по следующей формуле:

$$L_{G/G/c} = Q_{G/G/c} + c\rho = \frac{c\rho^{c+1}(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2 - 2) + 2c\rho}{2(1-\rho^c)} \quad (6.24)$$

## Глава 7. Аналитические модели СОУ в виде СМО с ожиданием

### 7.1. Марковские системы массового обслуживания с ожиданием

Наибольшее применение среди марковских СМО с ожиданием, при проведении анализа СОУ, получили СМО вида М/М/1 и М/М/2. Показатели оценки качества их функционирования приведены в Табл.7.1

Таблица 7.1

Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/1 и М/М/2

№	СМО М/М/1	СМО М/М/2
1	Загрузка обслуживающего аппарата	
	$\rho = \lambda / \mu$	$\rho = \lambda / (2 \cdot \mu)$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата	
	$P_0 = 1 - \rho$	$P_0 = (1 - \rho) / (1 + \rho)$
3	Вероятность, что в СМО, $i$ - заявок	
	$P_i = P_0 \cdot \rho^i$	$P_i = (\rho^i / 2^i i!) P_0$ если $i = 1, 2$ $P_i = \frac{\rho^i}{2^i \cdot 2!} \cdot P_0$ если $i = 3, 4, 5, \dots$
4	Среднее число заявок в очереди на обслуживание	
	$Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$	$Q = \frac{2 \cdot \rho^3}{1 - \rho^2}$
5	Среднее число заявок в СМО, в очереди и на обслуживании	
	$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$	$L = \frac{2 \cdot \rho}{1 - \rho^2}$
6	Дисперсия числа заявок в очереди СМО	
	$D_Q = \frac{\rho^2(1 + \rho - \rho^2)}{(1 - \rho)^2}$	$D_Q = \frac{2\rho^3(1 + 2\rho - \rho^3)}{(1 - \rho^2)^2}$
7	Дисперсия числа заявок в СМО	
	$D_L = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$	$D_L = \frac{2\rho \cdot (1 + \rho^2)}{(1 - \rho^2)^2}$
8	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО	
	$W = \frac{\rho}{(1 - \rho) \cdot \mu}$	$W = \frac{\rho^2}{(1 - \rho^2) \cdot \mu}$
9	Среднее время пребывания заявок в СМО	
	$T = \frac{1}{(1 - \rho) \cdot \mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$	$T = \frac{1}{(1 - \rho^2) \cdot \mu}$

Пример 7.1 Сравнить два варианта организации работы СОУ.

Вариант 1. Работа СОУ формализована в виде двух отдельных независимых СМО вида М/М/1.

Вариант 2. Работа СОУ формализована в виде одной СМО вида М/М/2.

Решение. Сравнительные оценки вариантов работы СОУ приведены в табл. 7.2 и табл.7.3

Таблица 7.2

Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/1 и М/М/2

	Вариант 1 Две отдельных СМО М/М/1	Вариант 2 Одна СМО вида М/М/2
	$\lambda = 8 \text{ 1/с}$ $\mu = 10 \text{ 1/с}$	$\lambda = 16 \text{ 1/с}$ $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 10 \text{ 1/с}$
1	Загрузка обслуживающего аппарата СМО	
	$\rho = \lambda / \mu = 0,8$	$\rho = \lambda / (2 \cdot \mu) = 0,8$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата	
	$P_0 = 1 - \rho = 0,2$	$P_0 = (1 - \rho) / (1 + \rho) = 0,111$
3	Среднее число заявок в очереди на обслуживание	
	$Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = 3,2$ $Q_{\Sigma} = 2 \cdot Q = 6,4$	$Q = \frac{2 \cdot \rho^3}{1 - \rho^2} = 2,844$
4	Среднее число заявок в СМО, в очереди и на обслуживании	
	$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = 4$ $L_{\Sigma} = 2 \cdot L = 8$	$L = \frac{2 \cdot \rho}{1 - \rho^2} = 4,444$
5	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО	
	$W = \frac{\rho}{(1 - \rho) \cdot \mu} = 0,4 \text{ с}$	$W = \frac{\rho^2}{(1 - \rho^2) \cdot \mu} = 0,177 \text{ с}$
6	Среднее время пребывания заявок в СМО	
	$T = \frac{1}{(1 - \rho) \cdot \mu} = \frac{1}{(\mu - \lambda)} = 0,5 \text{ с}$	$T = \frac{1}{(1 - \rho^2) \cdot \mu} = 0,277 \text{ с}$

Таблица 7.3

## Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/1 и М/М/2

	Вариант 1 Две отдельных СМО М/М/1	Вариант 2 Одна СМО вида М/М/2
	$\lambda = 5 \text{ 1/с}$ $\mu = 10 \text{ 1/с}$	$\lambda = 10 \text{ 1/с}$ $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 10 \text{ 1/с}$
1	Загрузка обслуживающего аппарата СМО	
	$\rho = \lambda / \mu = 0,5$	$\rho = \lambda / (2 \cdot \mu) = 0,5$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата	
	$P_0 = 1 - \rho = 0,5$	$P_0 = (1 - \rho) / (1 + \rho) = 0,333$
3	Среднее число заявок в очереди на обслуживание	
	$Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = 0,5$ $Q_{\Sigma} = 2 \cdot Q = 1,0$	$Q = \frac{2 \cdot \rho^3}{1 - \rho^2} = 0,333$
4	Среднее число заявок в СМО, в очереди и на обслуживании	
	$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = 1$ $L_{\Sigma} = 2 \cdot L = 2$	$L = \frac{2 \cdot \rho}{1 - \rho^2} = 1,333$
5	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО	
	$W = \frac{\rho}{(1 - \rho) \cdot \mu} = 0,1 \text{ с}$	$W = \frac{\rho^2}{(1 - \rho^2) \cdot \mu} = 0,033 \text{ с}$
6	Среднее время пребывания заявок в СМО	
	$T = \frac{1}{(1 - \rho) \cdot \mu} = \frac{1}{(\mu - \lambda)} = 0,2 \text{ с}$	$T = \frac{1}{(1 - \rho^2) \cdot \mu} = 0,133 \text{ с}$

Анализ данных, приведенных в табл.7.2 и табл.7.3. показывает, что с увеличением загрузки ОА СМО, замена независимых одноканальных СМО вида М/М/1 на двухканальную СМО вида М/М/2, дает больший эффект в улучшении значений показателей функционирования системы. Вариант 2 предпочтительнее варианта 1. Так для среднего времени пребывания заявок в СМО (соответственно СОУ) имеем:

Если  $T_1, T_2$  - соответственно, среднее время пребывания заявок в СОУ для варианта 1 и варианта 2. Тогда  $\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% = \frac{\rho}{1 + \rho} \cdot 100\%$ ,  $\frac{T_1}{T_2} = 1 + \rho$

## Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/с.

1. Загрузка обслуживающего аппарата СМО ( $\rho$ ) и нагрузка СМО ( $\varphi$ )

$$\rho = \frac{\varphi}{c} = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \quad \text{где } \rho < 1 \quad (7.1)$$

$$\varphi = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{где } \varphi < c \quad (7.2)$$

2. Вероятность простоя ОА СМО:

$$P_0 = \left[ \sum_{i=0}^c \frac{\varphi^i}{i!} + \frac{\varphi^{c+1}}{c! \cdot (c - \varphi)} \right]^{-1} \quad (7.3)$$

3. Вероятность, что в СМО  $i$  - заявок, где  $i < c$

$$P_i = (\varphi^i / i!) P_0 \quad (7.4)$$

4. Вероятность, что заняты все «с» ОА и  $i$  заявок в очереди

$$P_{c+i} = \frac{\varphi^{(c+i)}}{c^i \cdot c!} \cdot P_0 \quad (7.5)$$

5. Вероятность ожидания заявкой начала обслуживания

$$P_w = 1 - \sum_{i=0}^{c-1} P_i = \frac{\varphi^c}{(c-1)! \cdot (c - \varphi)} \cdot P_0 \quad (7.6)$$

6. Среднее число заявок в очереди СМО ( $Q$ ) и в СМО ( $L$ )

$$Q = \sum_{i=c}^{\infty} (i - c) \cdot P_i = \frac{\varphi^{c+1} \cdot c \cdot P_0}{c! \cdot (c - \varphi)^2} \quad (7.7)$$

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P_i = Q + c \cdot \rho \quad (7.8)$$

7. Дисперсия числа заявок в очереди СМО ( $D_Q$ ) и в СМО ( $D_L$ )

$$D_Q = \sum_{i=1}^{\infty} (i - c)^2 \cdot P_i - Q^2 \quad (7.9)$$

$$D_L = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot P_i - L^2 \quad (7.10)$$

8. Среднее время нахождения заявок в очереди СМО ( $W$ ) и в СМО ( $T$ )

$$W = \frac{Q}{\lambda} \quad (7.11)$$

$$T = \frac{L}{\lambda} = W + \frac{1}{\mu} \quad (7.12)$$

9. Дисперсия времени нахождения заявок в очереди СМО ( $D_W$ ) и пребывания в СМО ( $D_T$ )

$$D_W = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot P_i \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 - W^2 \quad (7.13)$$

$$D_T = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^2 \cdot P_i \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 - T^2 \quad (7.14)$$

10. Вероятность, что время ожидания заявки в очереди меньше ( $t$ )

$$P(t_{ож} < t) = 1 - \rho \cdot e^{-(c\mu - \lambda) \cdot t} \quad (7.15)$$

11. Вероятность, что время пребывания заявки в СМО меньше ( $t$ )

$$P(t_{прб} < t) = 1 - e^{-(c\mu - \lambda) \cdot t} \quad (7.16)$$

**Формулы для приближенной оценки основных показателей качества функционирования многоканальных СМО вида М/М/с**

Среднее число заявок в очереди СМО М/М/с:

$$Q_{M/M/c} = \frac{C \cdot \rho^{c+1}}{1 - \rho^c} \quad (7.17)$$

Среднее число заявок в СМО М/М/с (в очереди и на обслуживании):

$$L_{M/M/c} = Q + c \cdot \rho = \frac{C \cdot \rho}{1 - \rho^c} \quad (7.18)$$

Среднее время ожидания заявок в очереди СМО М/М/с:

$$W_{M/M/c} = \frac{\rho^c}{(1 - \rho^c) \cdot \mu} \quad (7.19)$$

: Среднее время пребывания заявок в СМО М/М/с

$$T_{M/M/c} = W + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{(1 - \rho^c) \cdot \mu} \quad (7.20)$$

$t_0 = 1/\mu$  - среднее время обслуживания заявок в одном ОА СМО.

Наибольшее практическое применение имеют формулы (7.18) и (7.20).

При  $c = 1$  и  $c = 2$  все формулы являются точными.

Погрешность результатов, получаемых с помощью формул (7.18) и (7.20), составляет следующие значения:

- в области  $3 \leq c \leq 50$  и  $\rho < 0,7$  менее 5%;
- в области  $3 \leq c \leq 50$  и  $0,7 \leq \rho \leq 0,9$  от 5% до 10%.

Для уменьшения погрешности результатов, получаемых с помощью формул (7.18) и (7.20), предложены выражения, аппроксимирующие число облучиваемых аппаратов ( $c$ ) и заменяющие его на ( $c^*$ ). В этом случае погрешность результатов составляет менее 1%. Некоторые, наиболее важные значения ( $c^*$ ), аппроксимирующие соответствующие значения числа ( $c$ ), приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4.

Значения  $c^*$ , аппроксимирующие значения  $c$ .

$c$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,7$	$\rho = 0,9$
$c = 1$	1	1	1	1	1
$c = 2$	2	2	2	2	2
$c = 3$	2,8633	2,8519	2,8745	2,9146	2,9683
$c = 4$	3,6563	3,6033	3,6439	3,7425	3,8974
$c = 5$	4,4090	4,2888	4,3346	4,4954	4,7860
$c = 10$	7,9025	7,2325	7,1239	7,5032	8,6791
$c = 15$	11,211	9,8281	9,3775	9,7929	11,861
$c = 20$	14,444	12,278	11,389	11,709	14,548
$c = 25$	17,634	14,649	13,264	13,399	16,882
$c = 30$	20,799	16,968	15,049	14,936	18,950
$c = 40$	27,077	21,518	18,446	17,713	22,513
$c = 50$	33,314	24,079	21,668	20,232	25,538

## 7.2. Немарковские системы массового обслуживания с ожиданием

В разделе 6.3. для немарковских СМО G/G/c, используя метод инвариантов отношения, были получены простые аналитические выражения для оценки среднего числа заявок в очереди СМО и СМО, которые соответственно имеют следующий вид:

$$Q_{G/G/c} = \frac{c\rho^{c+1}(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2)}{2(1-\rho^c)} \quad (7.21)$$

$$L_{G/G/c} = Q_{G/G/c} + c\rho = \frac{c\rho^{c+1}(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2 - 2) + 2c\rho}{2(1-\rho^c)} \quad (7.22)$$

При этом среднее время пребывания заявок в очереди СМО и в СМО (в очереди и на обслуживании), используя формулы Литтла, определяют на основании следующих выражений:

$$W_{G/G/c} = \frac{Q_{G/G/c}}{\lambda} = \frac{Q_{G/G/c}}{\rho \cdot \mu \cdot c} = \frac{\rho^c (v_{\text{вх}}^2 + v_0^2)}{2(1-\rho^c) \cdot \mu} \quad (7.23)$$

$$T_{G/G/c} = \frac{L_{G/G/c}}{\lambda} = \frac{L_{G/G/c}}{\rho \cdot \mu \cdot c} = \frac{\rho^c (v_{\text{вх}}^2 + v_0^2 - 2) + 2}{2(1-\rho^c) \cdot \mu} \quad (7.24)$$

Для СМО M/M/1, СМО M/M/2 и СМО M/G/1 выражения (7.21) – (7.24) дают точные результаты,

Была проведена оценка погрешности выражения (7.22) для среднего числа заявок в СМО, по сравнению с результатами имитационного моделирования. В имитационной модели, при задании функции распределения интервалов времени входного потока заявок и функции распределения интервалов времени обслуживания было использовано гамма-распределение, позволяющее получать коэффициенты вариации соответствующих времен в широком диапазоне из изменения.

Изменяемые параметры имитационной модели, т.е. факторы, и уровни их варьирования, приведены ниже:

$c = 1; 4; 7; 10.$  (четыре уровня варьирования)

$\rho = 0,3; 0,5; 0,7; 0,9.$  (четыре уровня варьирования)



$v_{\text{вх}}^2 = 0,5; 1; 2$ . (три уровня варьирования)

$v_0^2 = 0,5; 1; 2$ . (три уровня варьирования)

Оценка погрешности аналитической модели, по сравнению с имитационной, при пуассоновском входном потоке и экспоненциальном распределении времени обслуживания в зависимости от числа каналов и их загрузки, приведена ниже в табл. 7.5., а для СМО G/G/c в табл. 7.6.

Таблица 7.5

Сравнение результатов аналитического и имитационного моделирования СМО М/М/с

Загрузка канала $\rho$	Значения $\Delta_L = \frac{L_{\text{им}} - L_{\text{ан}}}{L_{\text{им}}} \cdot 100\%$ при $v_{\text{вх}}^2 = v_0^2 = 1$			
	Количество каналов обслуживания			
	$c = 1$	$c = 4$	$c = 7$	$c = 10$
$\rho = 0,3$	- 0,23	- 0,5	0,02	- 0,003
$\rho = 0,5$	0,2	- 1,84	- 1,4	- 0,7
$\rho = 0,7$	0,05	- 3,13	- 4,64	- 4,25
$\rho = 0,9$	0,08	-2,28	- 5,75	- 7,8

Таблица 7.6

Сравнение результатов аналитического и имитационного моделирования СМО G/G/c.

$\rho$	$v_{\text{вх}}^2$	Значения $\Delta_L = \frac{L_{\text{им}} - L_{\text{ан}}}{L_{\text{им}}} \cdot 100\%$							
		$c = 1$		$c = 4$		$c = 7$		$c = 10$	
		$v_0^2 = 0,5$	$v_0^2 = 2$	$v_0^2 = 0,5$	$v_0^2 = 2$	$v_0^2 = 0,5$	$v_0^2 = 2$	$v_0^2 = 0,5$	$v_0^2 = 2$
0,3	0,5	7,4	9,5	0,5	0,08	0,01	- 0,09	0,01	- 0,07
	2	- 12,2	- 12,8	- 3,81	- 3,63	- 0,75	- 0,94	- 0,17	- 0,31
0,5	0,5	7,91	7,55	0,82	0,7	- 0,08	- 0,81	- 0,1	- 0,52
	2	- 10,0	- 9,48	- 8,65	- 8,85	- 5,06	- 5,37	- 2,53	- 2,91
0,7	0,5	6,4	4,18	1,2	0,93	- 0,8	- 1,8	- 1,0	- 3,2
	2	- 6,68	- 5,8	- 11,13	- 10,4	- 10,36	- 12,7	- 9,65	- 11,1
0,9	0,5	2,06	1,4	1,15	0,2	- 1,6	- 4,26	- 3,2	- 6,75
	2	- 1,56	- 3,4	- 6,4	- 5,45	- 10,26	- 10,7	- 12,67	- 14,3

Анализ данных, приведенных в табл.7.5, показывает, что среднее число заявок в СМО М/М/с (при  $1 \leq c \leq 10$  и  $0,3 \leq \rho \leq 0,9$ ), полученное с помощью аналитической модели меньше, чем с помощью имитационной модели. При этом различие составляет менее 8%.

Анализ результатов, приведенных в табл.7.6, позволяет выявить области функционирования СМО G/G/c, в которых различие среднего числа заявок полученного с помощью аналитической и имитационной моделей составляет соответственно менее 5%, или находится в границах 5% - 10% или более 10%.

Аналитические выражения для оценки дисперсии числа заявок в очереди и в СМО M/M/c, полученные на основе метода аналогий, приведены в табл 7.7

Таблица 7.7

Оценка дисперсии числа заявок в очереди СМО и в СМО M/M/c.

Тип СМО	Дисперсия числа заявок в очереди СМО	Дисперсия числа заявок в СМО
M/M/1	$D_Q = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}$	$D_L = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$
M/M/2	$D_Q = \frac{2\rho^3(1+2\rho-\rho^3)}{(1-\rho^2)^2}$	$D_L = \frac{2\rho \cdot (1+\rho^2)}{(1-\rho^2)^2}$
M/M/c	$D_Q = \frac{c\rho^{c+1}(1+c\rho-\rho^{c+1})}{(1-\rho^c)^2}$	$D_L = \frac{(1+(c-1) \cdot \rho^c) \cdot c\rho}{(1-\rho^c)^2}$

Пример 7.2. Сравнить три варианта СОУ, формализуемых соответственно в виде СМО M/M/1, СМО M/E<sub>2</sub>/1 и СМО E<sub>2</sub>/E<sub>2</sub>/1. Определить основные показатели их функционирования. Результаты сранения представить в виде таблицы. Интенсивность входного потока заявок  $\lambda = 4$  1/час, а интенсивность обслуживания заявок  $\mu = 5$  1/час.

Решение. Для трех рассматриваемых вариантов число обслуживающих аппаратов СМО одинаковое ( $c=1$ ), а загрузка ОА  $\rho = \lambda/\mu = 4/5 = 0,8$

Среднее время обслуживания заявок  $t_0 = 1/\mu = 0,2$  час

Варианты различаются только ф.р. интервалов времени входного потк заявок и ф.р. интервалов времени обслуживания.

Оценки основных показателей функционирования рассматриваемых СМО, проведенные по формулам (7.21) – (7.24), приведены в табл.7.8.

Таблица 7.8

Сравнение вариантов функционирования СМО.

Показатель СМО	Вариант 1 СМО M/M/1	Вариант 2 СМО M / E <sub>2</sub> / 1	Вариант 3 СМО E <sub>2</sub> / E <sub>2</sub> / 1
$v_{bx}^2$	1	1	0,5
$v_o^2$	1	0,5	0,5
$Q_i$	$Q_1 = 3,2$	$Q_2 = 2,4$	$Q_3 = 1,6$
$L_i$	$L_1 = 4$	$L_2 = 3,2$	$L_3 = 2,4$
$W_i$ (час)	$W_1 = 0,8$	$W_2 = 0,6$	$W_3 = 0,4$
$T_i$ (час)	$T_1 = 1$	$T_2 = 0,8$	$T_3 = 0,6$

Анализ данных, приведенных в табл. 7.8. наглядно показывает, как регулярность входного потока заявок и регулярность их обслуживания улучшает основные показатели функционирования СМО.

## Глава 8. Аналитические модели СОУ в виде СМО с отказами и ограниченной длиной очереди.

### 8.1. Системы массового обслуживания с отказами

Для анализа компонент СОУ, у которых отсутствуют места для ожидания клиентами начала обслуживания, при условии, что все сотрудники заняты обслуживанием клиентов и свободных сотрудников нет, используют многоканальные СМО с отказами, т. е. СМО вида  $M/M/c/0$  и  $G/G/c/0$ . Схема СМО  $M/M/c/0$  и граф её состояний соответственно приведены на Рис.8.1. и Рис.8.2.

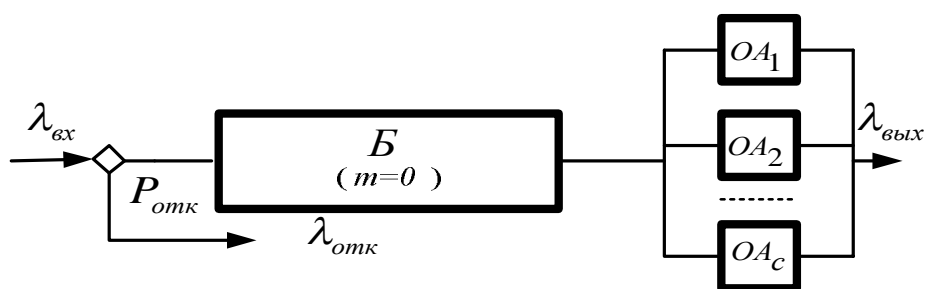


Рис.8.1 Схема СМО  $M/M/c/0$ .

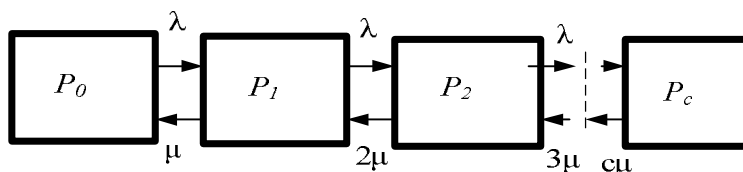


Рис.8.2 Граф состояний СМО  $M/M/c/0$ .

С учетом графа состояний СМО и выполнения условия нормировки вероятностей её состояний, для СМО  $M/M/c/0$ , используя метод марковских случайных процессов, подробно рассмотренный в разделе 6.1, была составлена система линейных алгебраических уравнений, для определения вероятностей состояний СМО. Решение СЛАУ позволило вычислить вероятности состояний СМО и определить основные показатели её работы в стационарном режиме.

## Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/с/0

1. Загрузка СМО  $\varphi = \frac{\lambda}{\mu}$  (8.1)

2. Загрузка обслуживающего аппарата СМО  $\rho = \frac{\varphi}{c} = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$  (8.2)

3. Вероятность простоя СМО

$$P_0 = \left[ 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2!} + \dots + \frac{\varphi^c}{c!} \right]^{-1} = \left[ \sum_{i=0}^c \frac{\varphi^i}{i!} \right]^{-1} \quad (8.3)$$

4. Вероятность, что в СМО,  $i$  - заявок

$$P_i = \frac{\varphi^i}{i!} P_0, \quad 0 \leq i \leq c \quad (8.4)$$

5. Вероятность отказа заявкам в обслуживании

$$P_{отк} = P_c = \frac{\varphi^c}{c!} P_0 \quad (8.5)$$

6. Интенсивность потока заявок, поступающих в СМО на обслуживание

$$\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda \quad (8.6)$$

7. Коэффициент использования ОА СМО

$$U = \lambda_c / (c \cdot \mu) = (1 - P_{отк}) \cdot \rho \quad (8.7)$$

8 Среднее число занятых ОА в составе СМО

$$k_{зан} = U \cdot c = (1 - P_{отк}) \cdot \varphi \quad (8.8)$$

9. Среднее число заявок в очереди на обслуживание.  $Q = 0$  (8.9)

10. Среднее число заявок в СМО, в очереди и на обслуживании

$$L = Q + c \cdot U = c \cdot U \quad (8.10)$$

11. Среднее время пребывания заявок в очереди СМО.  $W = 0$  (8.11)

12. Среднее время пребывания заявок в СМО  $T = 1/\mu = t_0$  (8.12)

13. Относительная пропускная способность СМО

$$q = (1 - P_{отк}) \quad (8.13)$$

14. Абсолютная пропускная способность СМО

$$A = q \cdot \lambda \quad (8.14)$$

### Пример 8.1

Определить минимальное число сотрудников фирмы, которые обеспечивают такое обслуживание клиентов, при котором не менее 85% клиентов будут обслужены (только менее чем 15% клиентам будет отказано в обслуживании). Поток клиентов является пуассоновским, обслуживание клиентов подчиняется экспоненциальному закону. Интенсивность поступления клиентов в фирму  $\lambda = 9$  клиентов/ч, а интенсивность их обслуживания сотрудниками  $\mu = 3$  клиента/ч.

Решение.

По формуле (8.1) определяем загрузку системы  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9}{3} = 3$

Результаты расчетов по формулам (8.2) – (8.14), приведены в табл. 8.1

Таблица 8.1

Показатели оценки работы сотрудников фирмы

Характеристики обслуживания	Число каналов обслуживания (сотрудников)					
	$C=1$	$C=2$	$C=3$	$C=4$	$C=5$	$C=6$
Параметр $\rho = \lambda / \mu$	3	1,5	1,0	0,75	0,6	0,5
Простой сотрудников $P_0$	0,25	0,1177	0,0769	0,061	0,0534	0,0515
Вероятность отказа в обслуживании $P_{отк} = \frac{\rho^c}{c!} P_0$	0,75	0,53	0,346	0,206	0,108	0,052
Загрузка сотрудника $U = (1 - P_{отк})\rho$	0,75	0,705	0,654	0,6	0,535	0,474
Среднее число занятых сотрудников $k_{зан} = U \cdot c$	0,75	1,410	1,962	2,4	2,675	2,844
Относительная пропускная способность СМО $q = 1 - P_{отк}$	0,25	0,47	0,654	0,794	0,892	0,948
Абсолютная пропускная способность СМО $A = q \cdot \lambda$ (клиентов/ч)	2,25	4,23	5,88	7,14	8,02	8,53
Вариант, отвечающий заданию					(*)	

Вариант решения, для которого  $C=5$ , отвечает условию поставленной задачи, поскольку в этом случае пропускная способность системы составляет 89,2% и больше требуемой. Поэтому для организации запланированного режима работы фирмы требуется иметь пять сотрудников.

## 8.2. Системы массового обслуживания с ограниченной длиной очереди

Для анализа компонент СОУ, у которых ограничено число мест для ожидания клиентами начала обслуживания, при условии, что все сотрудники заняты обслуживанием клиентов и свободных сотрудников нет, используют многоканальные СМО с ограниченной длиной очереди, т. е. СМО вида М/М/с/т. и G/G/с/т. Схема СМО М/М/с/т и граф её состояний соответственно приведены на Рис.8.3. и Рис.8.4.

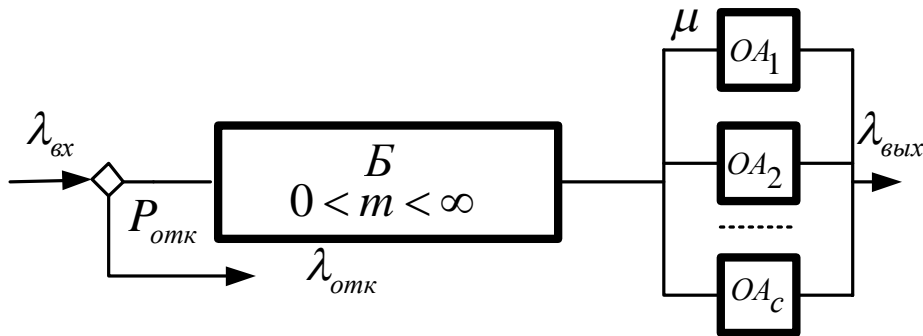


Рис.8.3 Схема СМО М/М/с/т

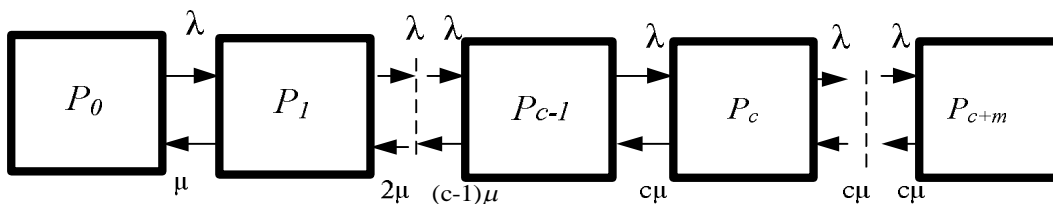


Рис.8.4 Граф состояний СМО М/М/с/т.

С учетом графа состояний СМО и выполнения условия нормировки вероятностей её состояний, для СМО М/М/с/т, используя метод марковских случайных процессов, подробно рассмотренный в разделе 6.1, была составлена система линейных алгебраических уравнений, для определения вероятностей состояний СМО. Решение СЛАУ позволило вычислить вероятности состояний СМО и определить основные показатели её работы в стационарном режиме.

### Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/С/т:

1. Загрузка СМО 
$$\varphi = \frac{\lambda}{\mu} \tag{8.15}$$

2 Загрузка обслуживающего аппарата СМО

$$\rho = \frac{\varphi}{c} = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \quad (8.16)$$

3. Вероятность простоя СМО

$$P_0 = \left[ \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\varphi^i}{i!} + \frac{\varphi^c (1 - \rho^{m+1})}{c! (1 - \rho)} \right]^{-1} \quad (8.17)$$

4. Вероятность, что в СМО,  $i$  - заявок

$$P_i = \frac{\varphi^i}{i!} P_0 \quad \text{где } 1 \leq i \leq c \quad (8.18)$$

$$P_i = \frac{\varphi^i}{c! \cdot c^{i-c}} P_0 \quad \text{где } c \leq i \leq (c + m) \quad (8.19)$$

5. Вероятность отказа заявкам в обслуживании

$$P_{отк} = P_{m+c} = \frac{\varphi^{c+m}}{c! \cdot c^m} P_0 \quad (8.20)$$

6. Интенсивность потока заявок, поступающих в СМО на обслуживание

$$\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda \quad (8.21)$$

7. Коэффициент использования ОА для СМО с ограниченной очередью

$$U = \lambda_c / (c \cdot \mu) = (1 - P_{отк}) \cdot \rho \quad (8.22)$$

8. Среднее число заявок в очереди на обслуживание

$$Q = \sum_{i=c+1}^{c+m} (i-c) \cdot P_i = \frac{\varphi^{c+m}}{c! \cdot c} \left[ \frac{1 - \rho^m [(m+1) - m\rho]}{(1-\rho)^2} \right] P_0 \quad (8.23)$$

9. Среднее число заявок в СМО, в очереди и на обслуживании

$$L = \sum_{i=1}^{c+m} i \cdot P_i = Q + c \cdot U \quad (8.24)$$

10. Среднее время нахождения заявок в очереди СМО

$$W = \frac{Q}{\lambda_c} = \frac{\varphi^c}{c! \cdot c \cdot \mu} \left[ \frac{1 - \rho^m [(m+1) - m\rho]}{(1-\rho)^2} \right] P_0 \quad (8.25)$$

11. Среднее время пребывания заявок в СМО

$$T = L / \lambda_c \quad (8.26)$$

12. Относительная пропускная способность СМО

$$q = (1 - P_{отк}) \quad (8.27)$$

13. Абсолютная пропускная способность СМО

$$A = q \cdot \lambda \quad (8.28)$$

Для часто используемых в практической деятельности СМО данного вида, показатели оценки качества их работы приведены в табл. 8.2.- табл. 8.4.



Таблица 8.2

## Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/1/м

№	Показатель СМО
1	Загрузка обслуживающего аппарата $\rho = \lambda / \mu$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата $P_0 = \frac{(1 - \rho)}{(1 - \rho^{m+2})}$
3	Вероятность, что в СМО, $i$ - заявок $P_i = \frac{(1 - \rho) \cdot \rho^i}{(1 - \rho^{m+2})}$
4	Вероятность отказа заявкам в обслуживании $P_{отк} = P_{m+1} = \frac{(\rho^{m+1} - \rho^{m+2})}{(1 - \rho^{m+2})}$
5	Интенсивность потока обслуженных заявок $\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda$
6	Коэффициент использования обслуживающего аппарата $U = \lambda_c / \mu = (1 - P_{отк}) \cdot \rho$
7	Среднее число заявок в очереди на обслуживание $Q = \frac{\rho^2 \cdot [1 - \rho^m \cdot (m+1) + m \cdot \rho^{m+1}]}{(1 - \rho^{m+2}) \cdot (1 - \rho)}$
8	Среднее число заявок в СМО $L = Q + U = \frac{\rho \cdot [1 - (m+2)\rho^{m+1} + (m+1) \cdot \rho^{m+2}]}{(1 - \rho^{m+2}) \cdot (1 - \rho)}$
9	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО $W = \frac{Q}{\lambda_c} = \left[ \frac{\rho}{(1 - \rho)} - \frac{(m+1) \cdot \rho^{m+1}}{(1 - \rho^{m+1})} \right] \cdot \frac{1}{\mu}$
10	Среднее время пребывания заявок в СМО $T = \frac{L}{\lambda_c} = \left[ \frac{1}{(1 - \rho)} - \frac{(m+1) \cdot \rho^{m+1}}{(1 - \rho^{m+1})} \right] \cdot \frac{1}{\mu}$

Таблица 8.3

## Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/2/м

№	Показатель СМО
1	Загрузка обслуживающего аппарата $\rho = \frac{\varphi}{2} = \frac{\lambda}{2\mu}$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата $P_0 = \frac{(1-\rho)}{(1+\rho-2\rho^{m+3})}$
3	Вероятность, что в СМО, $i$ - заявок $P_i = 2 \cdot \rho^i \cdot P_0$
4	Вероятность отказа заявкам в обслуживании $P_{отк} = P_{m+2} = \frac{(2\rho^{m+2} - 2\rho^{m+3})}{(1+\rho-2\rho^{m+3})}$
5	Интенсивность потока обслуженных заявок $\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda = \frac{(1+\rho-2\rho^{m+2})}{(1+\rho-2\rho^{m+3})} \cdot \lambda$
6	Коэффициент использования обслуживающего аппарата $U = \lambda_c / 2\mu = (1 - P_{отк}) \cdot \rho$
7	Среднее число заявок в очереди на обслуживание $Q = \frac{2 \cdot (m \cdot \rho^{m+4} - m \cdot \rho^{m+3} - \rho^{m+3} + \rho^3)}{(1-\rho) \cdot (1+\rho-2\rho^{m+3})}$
8	Среднее число заявок в СМО $L = Q + 2U = \frac{2 - 2(m+3) \cdot \rho^{m+2} + 2(m+2) \cdot \rho^{m+3}}{(1-\rho) \cdot (1+\rho-2\rho^{m+3})} \cdot \rho$
9	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО $W = \frac{Q}{\lambda_c} = \frac{m\rho^{m+3} - m\rho^{m+2} - \rho^{m+2} + \rho^2}{(1-\rho) \cdot (1+\rho-2\rho^{m+2}) \cdot \mu}$
10	Среднее время пребывания заявок в СМО $T = \frac{L}{\lambda_c} = \frac{(m+2)\rho^{m+3} - (m+3)\rho^{m+2} + 1}{(1-\rho) \cdot (1+\rho-2\rho^{m+2}) \cdot \mu}$

Таблица 8.4

Показатели оценки качества функционирования СМО  
М/М/1/м и М/М/2/м при  $\rho = 1$

№	СМО М/М/1/м	СМО М/М/2/м
1	Вероятность отказа заявкам в обслуживании	
	$P_{отк} = 1/(m + 2)$	$P_{отк} = 2/(2m + 5)$
2	Коэффициент использования обслуживающего аппарата	
	$U = \frac{(m + 1)}{(m + 2)}$	$U = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)}$
3	Интенсивность потока обслуженных заявок	
	$\lambda_c = \frac{(m + 1)}{(m + 2)} \cdot \lambda$	$\lambda_c = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)} \cdot \lambda$
4	Среднее число заявок в очереди на обслуживание	
	$Q = \frac{m \cdot (m + 1)}{2 \cdot (m + 2)}$	$Q = \frac{m \cdot (m + 1)}{(2m + 5)}$
5	Среднее число заявок в СМО	
	$L = \frac{(m + 1)}{2}$	$L = \frac{(m + 2) \cdot (m + 3)}{(2m + 5)}$
6	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО	
	$W = \frac{m}{2 \cdot \mu}$	$W = \frac{m \cdot (m + 1)}{(2m + 3) \cdot 2 \cdot \mu}$
7	Среднее время пребывания заявок в СМО	
	$T = \frac{(m + 2)}{2 \cdot \mu}$	$T = \frac{(m + 2) \cdot (m + 3)}{(2m + 3) \cdot 2 \cdot \mu}$
8	Относительная пропускная способность СМО	
	$q = \frac{(m + 1)}{(m + 2)}$	$q = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)}$
9	Абсолютная пропускная способность СМО	
	$A = \frac{(m + 1)}{(m + 2)} \cdot \lambda$	$A = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)} \cdot \lambda$

### Пример 8.2

Сравнить два варианта организации работы сотрудников фирмы с клиентами, приведенных на рис. 8.5, и выбрать наиболее предпочтительный вариант.

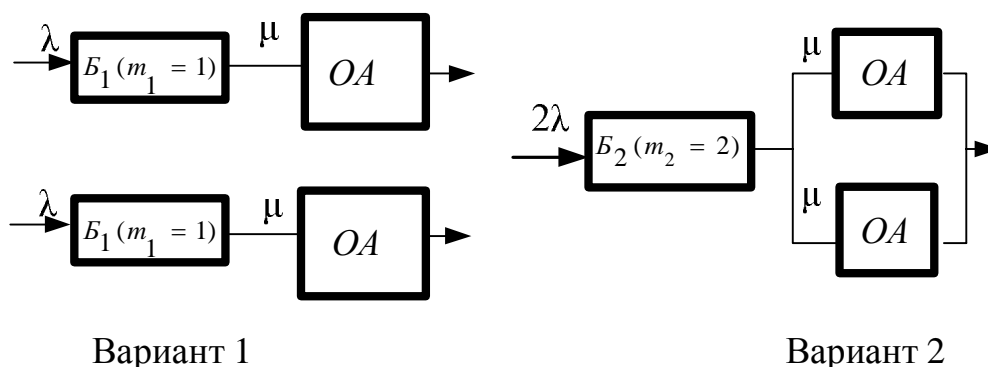


Рис.8.5. Формализованные схемы двух вариантов работы фирмы

#### Вариант В1.

Формализованная схема работы сотрудников фирмы представляет собой две отдельные одноканальные СМО типа М/М/1/1, в каждую из которых поступает поток заявок, распределенный по закону Пуассона, обслуживание заявок соответствует экспоненциальному закону.

Интенсивность поступления заявок в СМО соответствует потоку клиентов в фирму и составляет  $\lambda_1 = 6$  клиентов/ч, а интенсивность обслуживания заявок соответствует интенсивности обслуживания клиентов сотрудниками фирмы и составляет  $\mu = 6$  клиентов/ч. В каждой СМО имеется одно место в очереди на обслуживание. Поэтому, если клиент обращается в фирму, сотрудник фирмы обслуживает клиента, а в очереди на обслуживание уже имеется клиент, т.е. очередь заполнена полностью, то клиент получает отказ в обслуживании и покидает систему.

#### Вариант В2.

Формализованная схема работы сотрудников фирмы представляет собой двухканальную СМО типа М/М/2/2. В СМО поступает поток заявок, распределенный по закону Пуассона, который соответствует потоку клиентов, обслуживание заявок соответствует обслуживанию клиентов и подчиняется экспоненциальному закону. Интенсивность поступления заявок в СМО соответствует интенсивности поступления клиентов в фирму  $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 12$  клиентов/ч, а интенсивность обслуживания заявок соответствует интенсивности обслуживания клиентов сотрудниками фирмы  $\mu_2 = \mu_1 = 6$

клиентов/ч. В СМО имеется два места в очереди на обслуживание. Поэтому, если клиент обращается в фирму, оба сотрудника обслуживают клиентов, а в очереди на обслуживание имеется два клиента, т.е. очередь заполнена полностью, то клиент получает отказ в обслуживании и покидает систему.

Решение.

Результаты расчетов, проведенные по формулам табл. 8.4, даны в табл. 8.5

Таблица 8.5

Показатели оценки качества обслуживания клиентов сотрудниками фирмы

Показатели обслуживания	Вариант В1 Две СМО1 типа М/М/1/5	Вариант В2 СМО2 типа М/М/2/10
Интенсивность входного потока СМО	$\lambda_1 = 6$ клиент/ч	$\lambda_2 = 12$ клиент/ч
Интенсивность обслуживания ОА СМО	$\mu_1 = 6$ клиент/ч	$\mu_2 = 6$ клиент/ч
Число мест в очереди на обслуживание	$m_1 = 1$	$m_2 = 2$
Вероятность отказа клиентам в обслуживании	$P_{отк1} = 1/(m_1 + 2) = 0,333$ $P_{отк1} = 2P_{отк1} = 0,666$ $P_{отк1} = 66,6\%$	$P_{отк2} = 2/(2m + 5) = 0,222$ $P_{отк2} = 22,2\%$
Количество клиентов, которым отказано в обслуживании	$\lambda_{отк1} = \lambda_1 P_{отк1} = 3,996$ клиент/ч	$\lambda_{отк2} = \lambda_2 P_{отк2} = 2,664$ клиент/ч
Количество клиентов, которые обслужены сотрудниками фирмы	$\lambda_{обс1} = 2\lambda_1 - \lambda_{отк1} = 8$ клиент/ч	$\lambda_{обс2} = \lambda_2 - \lambda_{отк2} = 9,336$ клиент/ч

Вариант В2 по сравнению с вариантом В1 имеет следующие преимущества:

- число обслуженных клиентов увеличилось на 16,7 %;

$$\Delta_{обс} = \frac{\lambda_{обс2} - \lambda_{обс1}}{\lambda_{обс1}} = \frac{9,336 - 8}{8} = 0,167$$

- число клиентов которым отказано в обслуживании уменьшилось на 33,4%;

$$\Delta_{отк} = \frac{\lambda_{отк1} - \lambda_{отк2}}{\lambda_{отк1}} = \frac{4 - 2,664}{4} = 0,334$$

- среднее время пребывания клиента в очереди уменьшилось на 0,72 мин.;

Вариант В1  $W_{вар1} = \frac{m}{2 \cdot \mu} = \frac{1}{2 \cdot 6} = 0,0833 \text{ ч} = 5 \text{ мин}$

Вариант В2.  $W_{вар2} = \frac{m_2 \cdot (m_2 + 1)}{(2m_2 + 3) \cdot 2 \cdot \mu} = \frac{2 \cdot (2 + 1)}{7 \cdot 2 \cdot 6} = 0,0714 \text{ ч} = 4,28 \text{ мин}$

- среднее время пребывания клиента в системе уменьшилось на 0,72 мин.;

Вариант 1  $T_{вар1} = W_{вар1} + 1/\mu = 5 + 10 = 15 \text{ мин}$

Вариант 2  $T_{вар2} = W_{вар2} + 1/\mu = 4,28 + 10 = 14,28 \text{ мин}$

### Пример 8.3

Сравнить два варианта организации работы фирмы, приведенные на рис. 8.5, и выбрать наиболее предпочтительный. Исходные данные соответствуют примеру 8.2. Отличие состоит в числе мест в очереди. Варианту 1 соответствует СМО М/М/1/5, а Варианту 2 соответствует СМО М/М/2/10.

Решение.

Результаты расчетов, проведенные по формулам табл. 8.4, даны в табл. 8.6

Таблица 8.6

Показатели оценки качества обслуживания клиентов сотрудниками фирмы

Характеристики обслуживания	Вариант В1 Две СМО1 типа М/М/1/5	Вариант В2 СМО2 типа М/М/2/10
Интенсивность входного потока СМО	$\lambda_1 = 6 \text{ клиент/ч}$	$\lambda_2 = 12 \text{ клиент/ч}$
Интенсивность обслуживания СМО	$\mu_1 = 6 \text{ клиент/ч}$	$\mu_2 = 6 \text{ клиент/ч}$
Число мест в очереди на обслуживание	$m_1 = 5$	$m_2 = 10$
Вероятность отказа клиентам в обслуживании	$P_{отк1} = 1/(m_1 + 2) = 0,1428$ $P_{отк1} = 2P_{отк1} = 0,2856$ $P_{отк1} = 28,56\%$	$P_{отк2} = 2/(2m + 5) = 0,08$ $P_{отк2} = 8\%$
Количество клиентов, которым отказано в обслуживании	$\lambda_{отк1} = \lambda_1 P_{отк1} = 1,714$ клиент/ч	$\lambda_{отк2} = \lambda_2 P_{отк2} = 0,96$ клиент/ч
Количество клиентов, которые обслужены сотрудниками фирмы	$\lambda_{обс1} = 2\lambda_1 - \lambda_{отк1} = 10,286$ клиент/ч	$\lambda_{обс2} = \lambda_2 - \lambda_{отк2} = 11,04$ клиент/ч

Вариант В2 по сравнению с вариантом В1 имеет следующие преимущества:

- число обслуженных клиентов увеличилось на 7,33 % ;

$$\Delta_{обс} = \frac{\lambda_{обс2} - \lambda_{обс1}}{\lambda_{обс1}} = \frac{11,04 - 10,286}{10,286} = 0,0733$$

- число клиентов которым отказано в обслуживании уменьшилось на 44%;

$$\Delta_{отк} = \frac{\lambda_{отк1} - \lambda_{отк2}}{\lambda_{отк1}} = \frac{1,714 - 0,96}{1,714} = 0,44$$

- среднее время пребывания клиента в очереди уменьшилось на 1,11 мин.;

Вариант В1  $W_{вар1} = \frac{m}{2 \cdot \mu} = \frac{6}{2 \cdot 6} = 0,5 \text{ ч} = 30 \text{ мин}$

Вариант В2  $W_{вар2} = \frac{m_2 \cdot (m_2 + 1)}{(2m_2 + 3) \cdot 2 \cdot \mu} = \frac{12 \cdot (12 + 1)}{27 \cdot 2 \cdot 6} = 0,482 \text{ ч} = 28,89 \text{ мин}$

- среднее время пребывания клиента в системе уменьшилось на 1,11 мин.;

Вариант 1  $T_{вар1} = W_{вар1} + 1/\mu = 30 + 10 = 40 \text{ мин}$

Вариант 2  $T_{вар2} = W_{вар2} + 1/\mu = 28,89 + 10 = 38,89 \text{ мин}$

### Анализ СМО М/М/с/т при загрузке $\rho=1$

Для СМО М/с/т при  $\rho=1$  методом аппроксимации получены следующие аналитические выражения для  $3 \leq c \leq 50$ :

$$P_{отк}^* \approx \frac{1}{m+3+(c-3) \cdot 0,1667} \approx \frac{6}{c+6m+15}$$

$$m \geq \frac{6 - P_{отк}^* \cdot (c+15)}{6 \cdot P_{отк}^*}$$

$$c \geq \frac{6 - P_{отк}^* (6m+15)}{P_{отк}^*}$$

Приведённые выражения могут быть использованы при выборе варианта решения оптимизационных задач.

Для СМО М/М/1/т для оценки требуемой ёмкости буфера при заданной вероятности отказов заявкам в обслуживании, справедливо выражение:

$$m \geq \frac{\lg \frac{\varepsilon}{1 - \rho + \varepsilon \rho}}{\lg \rho} - 1, \text{ где } \varepsilon = P_{отк}.$$

## Глава 9. Аналитические модели СОУ в виде СМО с разными классами заявок и приоритетами в обслуживании

Компоненты СОУ, в которые поступают разнородные заявки клиентов, существенно отличающиеся интенсивностью их появления и временами обслуживания, обычно представляют в виде Ф-схем СМО с разными классами заявок. При этом, учитывая требования, предъявляемые к времени обработки этих заявок, используют как беспriorитетный, так и приоритетный варианты обработки заявок. Заявки различают по степени их важности и объединяют в классы (группы) разной степени приоритетности обработки. Заявки, входящие в более приоритетные классы, обслуживают в первую очередь.

### 9.1. Системы массового обслуживания с разными классами заявок при отсутствии приоритетов в их обслуживании

Ф-схема беспriorитетной СМО вида  $M^{(n)} / E_k^{(n)} / 1$ , в которую поступают заявки  $n$  классов, имеющие разные времена обработки, приведена на Рис. 9.1. Заявки поступают в один общий буфер и их обслуживание происходит в порядке поступления.

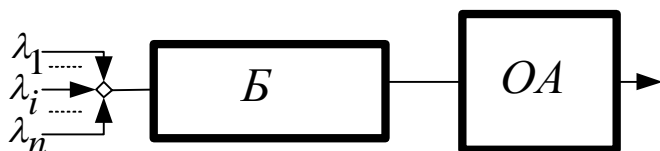


Рис. 9.1 Ф-схема беспriorитетной СМО с разными классами заявок.

Исходными данными для анализа рассматриваемых СМО являются.

$\lambda_i$  - интенсивность входного потока заявок  $i$ -го типа в СМО,  $i=1, \dots, n$ ;

$n$  - число типов заявок, поступающих в СМО;

$\mu_i$  - интенсивность обслуживания заявок  $i$ -го типа в СМО;

$t_i$  - среднее время обслуживания заявок  $i$ -го типа в СМО;

$k_{\varepsilon i}$  - параметр Эрланга ф.р. времени обслуживания заявок  $i$ -го типа в СМО;

$v_i^2 = 1/k_{\varepsilon i}^2$  - квадрат коэффициента вариации интервалов времени обслуживания заявок  $i$ -го типа в СМО;



Порядок расчета основных показателей функционирования бесприоритетных СМО вида  $M^{(n)} / E_k^{(n)} / 1$  с разными классами заявок.

1 Определяют загрузку СМО заявками каждого типа, общую загрузку СМО и условие стационарного режима работы СМО, соответственно по формулам:

$$\rho_i = \lambda_i / \mu_i \quad (9.1)$$

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i < 1 \quad (9.2)$$

Если условие (9.2) выполняется, то переходят к следующему этапу, иначе выполняют действия, обеспечивающие выполнение этого условия. Такими действиями могут быть:

- уменьшение интенсивности поступления в СМО одного или нескольких потоков заявок;
- увеличение интенсивности обслуживания одного или нескольких потоков заявок;
- уменьшение числа потоков заявок, поступающих в СМО.

2. Определяют вторые моменты времени обработки заявок в СМО по формуле:

$$t_i^{(2)} = \frac{k_{\text{э}i} + 1}{k_{\text{э}i}} \cdot t_i^2 = (1 + v_i^2) \cdot t_i^2 \quad (9.3)$$

3. Определяют среднее время пребывания заявок в очереди СМО, общее для всех типов заявок, по формуле:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot t_i^{(2)}}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot t_i \cdot (1 + v_i^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} \quad (9.4)$$

4. Определяют среднее время пребывания заявок каждого типа в СМО.

$$T_i = W + t_i \quad (9.5)$$

5. Определяют средние времена обработки и пребывания заявок в СМО.

$$t_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} t_i \quad (9.6)$$

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} T_i \quad (9.7)$$

6. Определяют среднее число заявок в очереди СМО и в СМО, соответственно по формулам:

$$Q = \lambda \cdot W \quad (9.8)$$

$$L = \lambda \cdot T \quad (9.9)$$

7. Проверка результатов анализа СМО

$$T = W + t_0 \quad (9.10)$$

Пример 9.1

Сравнить два варианта СОУ, определить основные показатели их работы. Варианты СОУ представлены в виде Ф-схем СМО. Вариант 1 - СМО  $M^{(2)} / M^{(2)} / 1$ , Вариант 2 - СМО  $M^{(2)} / E_5^{(2)} / 1$ . Исходные данные вариантов и результаты расчетов, проведенные по формулам (9.1) – (9.10), приведены в Табл. 9.1.

Таблица 9.1

Исходные данные и показатели работы вариантов СОУ.

Название	Вариант 1 $M^{(2)} / M^{(2)} / 1$		Вариант 2 $M^{(2)} / E_5^{(2)} / 1$	
Исходные данные вариантов				
Тип заявок	Тип 1	Тип 2	Тип 1	Тип 2
$\lambda_i$ (1/ч)	1	1	1	1
$\mu_i$ (1/ч)	2	4	2	4
$t_i = 1 / \mu_i$ (ч)	0,5	0,25	0,5	0,25
$k_{\partial i}$	1	1	5	5
$v_i^2 = 1 / k_{\partial i}$	1	1	0,2	0,2
Результаты расчетов вариантов				
$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$	2		2	
$\rho_i$	0,5	0,25	0,5	0,25
$\rho = \rho_1 + \rho_2$	0,75		0,75	
$W$ (ч)	1,25		0,75	
$T_i = W + t_i$ (ч)	1,75	1,5	1,25	1,0
$T = \sum_{i=1}^2 (\lambda_i / \lambda) T_i$ (ч)	1,625		1,125	
$Q$	2,5		1,5	
$L$	3,25		2,25	

Анализ результатов, приведенных в табл.9.1 показывает, что с увеличением параметра Эрланга ф.р. интервалов времени обслуживания заявок в СМО, существенно улучшаются показатели её работы.

### Пример 9.2

Определить основные показатели СОУ, работа которой представлена в виде Ф-схемы СМО с двумя классами заявок и беспriorитетной их обработкой и имеет символическое обозначение  $M^{(2)} / M^{(2)} / 1$ .

Исходные данные приведены в Табл. 9.2.

Таблица 9.2

Исходные данные к примеру 9.2

Исходные данные	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\mu_1$	$k_{s1}$	$\mu_2$	$k_{s2}$
	2	2	8	1	4	1

Решение.

В СМО поступают два пуассоновских потока заявок, обслуживание которых подчинено экспоненциальному закону. Заявки обслуживаются в порядке поступления, согласно дисциплине первый пришел- первым обслужен (ПППО).

Далее приведены результаты расчетов по формулам (9.1) – (9.10).

1. Средние времена обслуживания заявок в СМО:

$$t_1 = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ с} \qquad t_2 = \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ с}$$

2. Квадраты коэффициентов вариаций интервалов времени обслуживания заявок в СМО:

$$v_1^2 = \frac{1}{k_{s1}} = \frac{1}{1} = 1; \qquad v_2^2 = \frac{1}{k_{s2}} = \frac{1}{1} = 1$$

При параметре  $K = 1$  распределение Эрланга является экспоненциальным.

3. Вторые и третьи моменты времени обслуживания заявок.

$$t_1^{(2)} = \frac{k_1 + 1}{k_1} \cdot t_1^2 = 2 \cdot 0,125^2 = 0,03125 \text{ с}^2$$

$$t_1^{(3)} = \frac{(k_1 + 1) \cdot (k_1 + 2)}{k_1} \cdot t_1^3 = 6 \cdot 0,125^3 = 0,0117 \text{ с}^3$$

$$t_2^{(2)} = \frac{k_2 + 1}{k_2} \cdot t_2^2 = 2 \cdot 0,25^2 = 0,125 \text{ с}^2$$

$$t_2^{(3)} = \frac{(k_2 + 1) \cdot (k_2 + 2)}{k_2} \cdot t_2^3 = 6 \cdot 0,25^3 = 0,09375 \text{ с}^3$$

4. Загрузка ОА каждым входным потоком заявок:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \lambda_1 \cdot t_1 = 2 \cdot 0,125 = 0,25$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \lambda_2 \cdot t_2 = 2 \cdot 0,25 = 0,5$$

5. Суммарная загрузка ОА СМО заявками двух классов:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0,25 + 0,5 = 0,75 < 1, \quad )$$

Система находится в стационарном режиме функционирования,

6. Суммарный входной поток заявок в СМО:

$$\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 2 = 4 \text{ з/с}$$

7. Среднее время обслуживания заявок в СМО:

$$t_0 = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot t_i = \frac{2}{4} \cdot 0,125 + \frac{2}{4} \cdot 0,25 = 0,1875 \text{ с}$$

8. Второй момент времени обслуживания заявок в СМО:

$$t_0^{(2)} = \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot t_i^2$$

$$t_0^{(2)} = \frac{2}{4} \cdot 0,03125 + \frac{2}{4} \cdot 0,125 = 0,015625 + 0,0625 = 0,078 \text{ с}^2.$$

9. Среднее время пребывания заявок в очереди СМО:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^2 \rho_i \cdot t_i \cdot (1 + \nu_i^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,25 \cdot 0,125 \cdot 2 + 0,5 \cdot 0,25 \cdot 2}{2 \cdot 0,25} = 0,625 \text{ с}.$$

10. Среднее время пребывания заявок каждого типа в СМО:

$$T_1 = W + t_1 = 0,625 + 0,125 = 0,75 \text{ с}.$$

$$T_2 = W + t_2 = 0,625 + 0,25 = 0,875 \text{ с}$$

Среднее время пребывания заявок в СМО:

$$T = \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot T_i = \frac{0,75 + 0,875}{2} = 0,8125 \text{ с}$$

Проверка расчетов:

$$T = W + t_0 = 0,625 + 0,1875 = 0,8125 \text{ с}$$

12. Среднее число заявок в очереди и в СМО:

$$Q = \lambda \cdot W = 4 \cdot 0,625 = 2,5$$

$$L = \lambda \cdot T = 4 \cdot 0,8125 = 3,25$$

Проверка расчетов:

$$L = Q + \rho = 2,5 + 0,75 = 3,25$$

## 9.2. Системы массового обслуживания с относительными приоритетами

В СМО с относительными приоритетами при поступлении заявки более высокого приоритета, она не прерывает начатого обслуживания заявки более низкого приоритета, а ожидает завершения её обслуживания. Для формализованного описания работы СОУ в виде СМО с относительными приоритетами используют символическое обозначение СМО следующего вида:  $M^{(n)} / G^{(n)} / 1 / \infty / \text{отн} / \infty$ . Схема СМО с относительными приоритетами обработки заявок приведена на Рис.9.2

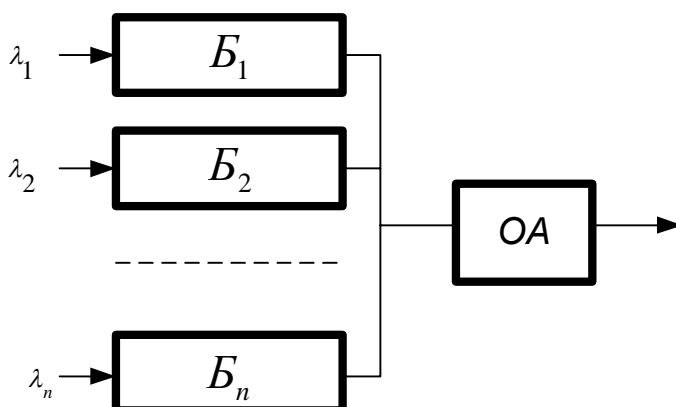


Рис. 9.2 Ф-схема СМО с относительными приоритетами обработки заявок..

Среднее время пребывания заявок  $k$ -го приоритетного класса в очереди СМО  $M^{(n)}/G^{(n)}/1/\infty/отн/\infty$  с относительными приоритетами обслуживания заявок (при поступлении в СМО  $n$ -классов заявок), когда входной поток заявок пуассоновский, а обслуживание заявок соответствует произвольной ф.р. временн обслуживания, определяют из следующего выражения:

$$W_k = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i t_i (1 + v_i^2)}{2 \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^k \rho_i \right)} \quad (9.11)$$

$W_k$  - среднее время пребывания заявок  $k$ -го приоритета в очереди СМО;

$k$  – номер приоритетного класса обработки заявок в СМО,  $k = \overline{1, n}$

1 – высший приоритет,  $n$  – низший приоритет;

$t_i$  - среднее время обслуживания заявок  $i$ -го приоритетного класса;

$\rho_i$  - загрузка ОА заявками  $i$ -го приоритета класса;

$v_i^2$  - квадрат коэффициента вариации интервалов времени обслуживания заявок  $i$ -го приоритета класса.

Если входной поток пуассоновский, а обслуживание подчиняется экспоненциальному закону, то  $v_i^2 = 1$ , и формула (9.1) упрощается.

Для двух классов приоритетов заявок имеем:

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} \quad (9.12)$$

$$W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} \quad (9.13)$$

Для трех классов приоритетов заявок имеем:

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1)} \quad (9.14)$$

$$W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} \quad (9.15)$$

$$W_3 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2)(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)} \quad (9.16)$$

### Пример 9.3

Работа СОУ представлена в виде СМО с относительными приоритетами. В СМО поступает два пуассоновских потока заявок соответственно с интенсивностями  $\lambda_A$  и  $\lambda_B$ . Времена обслуживания заявок распределены по экспоненциальному закону, соответственно с интенсивностями  $\mu_A$  и  $\mu_B$ .

Следует назначить относительные приоритеты входящим в СМО на обслуживание потокам заявок в соответствии с критерием минимизации суммарного среднего времени ожидания заявок обоих классов в очереди на обслуживание, который имеет следующий вид:

$$W = \min_{i,j} (W_{Ai} + W_{Bj}) \quad (9.17)$$

Где  $W_{Ai}$  - среднее время нахождения в очереди заявок типа А, если им назначен относительный приоритет  $i$  при обслуживании;

$W_{Bj}$  - среднее время нахождения в очереди заявок типа В, если им назначен относительный приоритет  $j$  при обслуживании.

- вариант В1, заявки типа А имеют относительный приоритет перед заявками типа В;

- вариант В2, заявки типа В имеют относительный приоритет перед заявками типа А.

Сравниваем эти два альтернативных варианта в соответствии с заданным критерием и выбираем среди них наилучший вариант.

Исходные данные и результаты расчетов, проведенных по формулам (9.12) и (9.13) для относительных приоритетов, приведены в табл. 9.3

Таблица 9.3

Сравнительный анализ вариантов назначения относительных приоритетов.

Вариант В1	Вариант В2
Исходные данные (относительные приоритеты)	
$\lambda_1 = \lambda_A = 0,3 \text{ 1/с}$ $\lambda_2 = \lambda_B = 0,25 \text{ 1/с}$ $\mu_1 = \mu_A = 1 \text{ 1/с}$ $\mu_2 = \mu_B = 0,5 \text{ 1/с}$	$\lambda_1 = \lambda_B = 0,25 \text{ 1/с}$ $\mu_1 = \mu_B = 0,5 \text{ 1/с}$ $\lambda_2 = \lambda_A = 0,3 \text{ 1/с}$ $\mu_2 = \mu_B = 1 \text{ 1/с}$
$\rho_1 = \lambda_1 / \mu_1 = 0,3$ $\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 0,5$ $\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0,8$	$\rho_1 = \lambda_1 / \mu_1 = 0,5$ $\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 0,3$ $\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0,8$
Результаты расчетов (относительные приоритеты)	
$W_1 = \frac{0,3 \cdot 1 + 0,5 \cdot 2}{(1 - 0,3)} = 1,857 \text{ с}$	$W_1 = \frac{0,5 \cdot 2 + 0,3 \cdot 1}{(1 - 0,5)} = 2,6 \text{ с}$
$W_2 = \frac{0,3 \cdot 1 + 0,5 \cdot 2}{(1 - 0,3) \cdot (1 - 0,3 - 0,5)} = 9,286 \text{ с}$	$W_2 = \frac{0,5 \cdot 2 + 0,3 \cdot 1}{(1 - 0,5) \cdot (1 - 0,5 - 0,3)} = 13,0 \text{ с}$
$W_{B1} = W_1 + W_2 = 1,857 + 9,286 = 11,143 \text{ с}$	$W_{B2} = W_1 + W_2 = 2,6 + 13,0 = 15,6 \text{ с}$

Поскольку  $W_{B1} < W_{B2}$ , то вариант В1 предпочтительнее варианта В2.

Заявкам типа А следует назначить относительный приоритет по отношению к заявкам типа В при их обработке в ОА СМО..

### 9.3. Системы массового обслуживания с абсолютными приоритетами

В СМО с абсолютными приоритетами при поступлении заявки более высокого приоритета, она прерывает начатое обслуживание заявки более низкого приоритета. Для формализованного описания работы СОУ в виде СМО с абсолютными приоритетами используют символическое обозначение СМО следующего вида:  $M^{(n)} / G^{(n)} / 1 / \infty / abc / \infty$ . Схема СМО с абсолютными приоритетами обработки заявок приведена на Рис.9.2



Среднее время пребывания заявок  $k$ -го приоритетного класса в очереди СМО  $M^{(n)}/G^{(n)}/1/\infty/abc/\infty$  с абсолютными приоритетами обслуживания заявок (при поступлении в СМО  $n$ -классов заявок), когда входной поток заявок пуассоновский, а обслуживание заявок соответствует произвольной ф.р. временн обслуживания, определяют из следующего выражения:

$$W_k = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \rho_i t_k}{\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i\right)} + \frac{\sum_{i=1}^k \rho_i t_i (1 + v_i^2)}{2 \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i\right)} \quad (9.18)$$

Для СМО М/М/1 и двух классов приоритетов заявок формулы имеют вид:

для первого класса (приоритета) заявок:

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1}{(1 - \rho_1)} \quad (9.19)$$

для второго класса (приоритета) заявок:

$$W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} \quad (9.20)$$

Для СМО М/М/1 и трех классов приоритетов заявок формулы имеют вид:

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1}{(1 - \rho_1)} \quad (9.21)$$

$$W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} \quad (9.22)$$

$$W_3 = \frac{(\rho_1 + \rho_2) \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2)(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)} \quad (9.23)$$

### Пример 9.4

Рассмотреть предыдущий пример для случая назначения абсолютных приоритетов рассматриваемым двум типам заявок, поступающим на обслуживание в ОА.

Исходные данные и результаты расчетов, проведенных по ранее приведенным формулам для абсолютных приоритетов, даны в табл.9.4

Таблица 9.4

Сравнительный анализ вариантов назначения абсолютных приоритетов.

Вариант В1	Вариант В2
Исходные данные (абсолютные приоритеты)	
$\lambda_1 = \lambda_A = 0,3 \text{ 1/c}$ $\lambda_2 = \lambda_B = 0,25 \text{ 1/c}$ $\mu_1 = \mu_B = 0,5 \text{ 1/c}$	$\lambda_1 = \lambda_B = 0,25 \text{ 1/c}$ $\mu_1 = \mu_B = 0,5 \text{ 1/c}$ $\lambda_2 = \lambda_A = 0,3 \text{ 1/c}$ $\mu_2 = \mu_B = 1 \text{ 1/c}$
$\rho_1 = \lambda_1 / \mu_1 = 0,3$ $\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 0,5$ $\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0,8$	$\rho_1 = \lambda_1 / \mu_1 = 0,5$ $\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 0,3$ $\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0,8$
Результаты расчетов (абсолютные приоритеты)	
$W_1 = \frac{0,3 \cdot 1}{(1-0,3)} = 0,429 \text{ c}$	$W_1 = \frac{0,5 \cdot 2}{(1-0,5)} = 2,0 \text{ c}$
$W_2 = \frac{0,3 \cdot 2}{(1-0,3)} + \frac{0,3 \cdot 1 + 0,5 \cdot 2}{(1-0,3) \cdot (1-0,3-0,5)}$ $W_2 = 10,143 \text{ c}$	$W_2 = \frac{0,5 \cdot 1}{(1-0,5)} + \frac{0,5 \cdot 2 + 0,3 \cdot 1}{(1-0,5) \cdot (1-0,5-0,3)}$ $W_2 = 14,0 \text{ c}$
$W_{B1} = W_1 + W_2 = 0,429 + 10,143 = 10,572 \text{ c}$	$W_{B2} = W_1 + W_2 = 2,0 + 14,0 = 16,0 \text{ c}$

Поскольку  $W_{B1} < W_{B2}$ , то вариант В1 предпочтительнее варианта В2.

Заявкам типа А следует назначить абсолютный приоритет по отношению к заявкам типа В при их обработке в ОА СМО.

### 9.4. Закон сохранения времени пребывания заявок в очереди СМО

Согласно закону сохранения среднего времени пребывания заявок в очереди СМО (закон Клейнрока), имеем:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i W_i = \rho \cdot W \quad (9.24)$$

Где  $n$  - количество классов заявок, поступающих в СМО;

$\rho_i$  – загрузка СМО заявками  $i$ -ого класса (приоритета);

$W_i$  - среднее время пребывания заявок  $i$ -ого класса в СМО;

$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i$  - суммарная загрузка СМО заявками всех классов;

$W$  – среднее время пребывания заявок в очереди СМО при беспriorитетной системе обслуживания

$T_i$  - среднее время пребывания заявок  $i$ -ого класса в СМО

$$T_i = W_i + t_i \quad (9.25)$$

Пример 9.5. Провести сравнение результатов примеров (9.3) и (9.4)

Решение. Сравнительный анализ результатов вариантов беспriorитетной и приоритетной обработки двух классов заявок в СМО приведен в Табл. 9.5.

Таблица 9.5

Сравнительный анализ вариантов назначения приоритетов.

Без приоритетов	Вариант 1	Вариант 2
$\lambda_1 = 0,3$ заявки/с	$\lambda_1 = 0,3$ 1/с $\mu_1 = 1$ 1/с	$\lambda_1 = 0,25$ 1/с $\mu_1 = 0,5$ 1/с
$\lambda_2 = 0,25$ заявки/с	$\lambda_2 = 0,25$ 1/с $\mu_2 = 0,5$ 1/с	$\lambda_2 = 0,3$ 1/с $\mu_2 = 1$ 1/с
$\mu_1 = 1$ 1/с	Относительные приоритеты	Относительные приоритеты
$\mu_2 = 0,5$ 1/с		
$\rho_1 = \lambda_1 / \mu_1 = 0,3$	$W_1 = 1,857$ с	$W_1 = 2,6$ с
$\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 0,5$	$W_2 = 9,286$ с	$W_2 = 13$ с
$\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0,8$	Абсолютные приоритеты	Абсолютные приоритеты
$W = 6,5$ с	$W_1 = 0,429$ с	$W_1 = 2$ с
	$W_2 = 10,143$ с	$W_2 = 14$ с

### Пример 9.6.

Провести проверку результатов примеров (9.3) и (9.4), на соответствие их закону сохранения времени пребывания заявок в очереди СМО.

Решение. Беспriorитетная обработка

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot t_i \cdot (1 + v_i^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot t_i}{(1 - \rho)} = \frac{0,3 \cdot 1 + 0,5 \cdot 2}{(1 - 0,8)} = 6,5$$

$$\rho \cdot W = 0,8 \cdot 6,5 = 5,2$$

Относительные приоритеты (вариант 1):

$$\rho_1 \cdot W_1 + \rho_2 \cdot W_2 = 0,3 \cdot 1,857 + 0,5 \cdot 9,286 = 5,2$$

Абсолютные приоритеты (вариант 1):

$$\rho_1 \cdot W_1 + \rho_2 \cdot W_2 = 0,3 \cdot 0,429 + 0,5 \cdot 10,143 = 5,2$$

Поскольку  $\rho_1 \cdot W_1 + \rho_2 \cdot W_2 = \rho \cdot W$ , то результаты примеров (9.3) и (9.4) корректны и имеет место их соответствие закону сохранения времени пребывания заявок в очереди СМО (закону Клейнрока).

### 9.5. Правила задания приоритетов при обработке заявок в СМО М/М/1

Анализ данных, приведенных в Табл.9.5, показывает, что неправильное задание приоритетов приводит к тому, что времена пребывания в очереди СМО и пребывания в СМО заявок 1-ого и 2-ого классов приоритетов увеличиваются.

Для правильного задания заявкам приоритетов при их обработке в СМО, следует соблюдать следующие правила:

1. Приоритеты заявкам следует задавать так, чтобы для  $k$ -ого приоритетного класса заявок выполнялось условие:  $t_k < t_{k+1}$

Тогда относительные приоритеты дают лучше результаты, чем беспriorитетная дисциплина обслуживания, а абсолютные приоритеты дают лучше результаты чем относительные.

2. При учете стоимости штрафа за время пребывания заявки  $k$ -го приоритета в СМО, приоритеты следует назначать с учетом выполнения условия

$$(c_k / t_k) > (c_{k+1} / t_{k+1})$$

где:  $t_k$  – среднее время обслуживания заявки  $k$ -ого приоритета;

$C_k$  – штраф за время пребывания в СМО заявки  $k$ -ого приоритета за единицу времени пребывания.

3. Абсолютные приоритеты дают лучше результаты чем относительные, если выполняется условие:

$$(c_k / t_k) > (c_{k+1} / t_{k+1 \text{ дообсл}})$$

$$t_{k+1 \text{ дообсл}} = t_{k+1}^{(2)} / 2t_{k+1} = t_{k+1}$$

### 9.6. СМО с комбинированными приоритетами

Работу компонент СОУ часто представляют в виде Ф-схем СМО с комбинированными приоритетами. В этом случае в СМО при обработке разных классов заявок используют как относительные, так и абсолютные приоритеты. Наиболее распространенным является следующий вариант:

- СМО вида  $M / M / 1 / \infty / \text{комб} / \infty$ ;
- заявки 1-го класса имеют абсолютный приоритет перед заявками 2-го и 3-го классов;
- заявки 2-го класса имеют относительный приоритет перед заявками 3-го класса.

При таком варианте работы СМО средние времена пребывания заявок в очереди СМО и средние времена пребывания заявок в СМО определяют из следующих выражений:

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1}{(1 - \rho_1)} \quad (9.26)$$

$$W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} \quad (9.27)$$

$$W_3 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2) \cdot (1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)} \quad (9.28)$$

**Пример 9.6.** Определить показатели функционирования СМО вида  $M/M/1/\infty/комб/\infty$  при обработке трех приоритетных классов заявок. Исходные данные и результаты решения приведены в табл.9.6.

Таблица 9.6.

Исходные данные и результаты решения

Показатели СМО	Заявки 1-го приоритета	Заявки 2-го приоритета	Заявки 3-го приоритета
Исходные данные			
Приоритет	абсолютный	Относительный	Отсутствует
$\lambda_i$ (1/ч)	1/20	1/4	1/8
$t_i = 1/\mu_i$ (ч)	1	1	4
Результаты решения			
$\rho_i = \lambda_i \cdot t_i$	0,05	0,25	0,5
$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$	$\rho = 0,8 < 1$ СМО стационарном режиме		
$W_i$	0,053	3,5	16,6
$T_i = W_i + t_i$	1,053	4,5	20,6
$W$ без приоритетов	11,5 (ч)		
$T_i$ без приоритетов	12,5 (ч)	12,5 (ч)	15,5 (ч)

### 9.7. Двухканальные СМО с приоритетами

Компоненты СОУ часто при формализации их работы представляют в виде двухканальных СМО с относительными или абсолютными приоритетами, с пуассоновскими входными потоками заявок и экспоненциальными временами их обслуживания, двумя и тремя классами заявок. Для расчета показателей функционирования двухканальных СМО с приоритной обработкой заявок используют метод инвариантов отношения, позволяющий получить простые аналитические выражения. Согласно этому методу справедливы следующие выражения, устанавливающие взаимосвязь между беспriorитетными СМО вида  $M/M/1$  и  $M/M/2$  и приоритетными СМО с относительными приоритетами вида  $M/M/1/\infty/Отн/\infty$  и  $M/M/2/\infty/Отн/\infty$ , а также с абсолютными приоритетами вида  $M/M/1/\infty/Абс/\infty$  и  $M/M/1/\infty/Абс/\infty$ .

$$\frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}} = \frac{W_{M/M/2/\infty/отн/\infty}}{W_{M/M/1/\infty/отн/\infty}} \quad (9.29)$$

$$\frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}} = \frac{W_{M/M/2/\infty/абс/\infty}}{W_{M/M/1/\infty/абс/\infty}} \quad (9.30)$$

После преобразований из этих выражений получаем:

$$W_{M/M/2/\infty/отн/\infty} = W_{M/M/1/\infty/отн/\infty} \cdot \frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}} \quad (9.31)$$

$$W_{M/M/2/\infty/абс/\infty} = W_{M/M/1/\infty/абс/\infty} \cdot \frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}} \quad (9.32)$$

Для СМО М/М/1 и М/М/2, с дисциплиной обслуживания первый пришел – первым обслужен, простые выражения для одного класса заявок приведены в Табл. 9.6.

Таблица 9.6

Выражения для анализа СМО М/М/1 и М/М/2 в случае одного класса заявок

Показатели СМО	СМО типа М/М/1	СМО типа М/М/2
Загрузка одного ОА СМО	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu}$
Среднее число заявок в очереди на обслуживание	$Q_1 = \frac{\rho^2}{1-\rho}$	$Q_2 = \frac{2 \cdot \rho^3}{1-\rho^2}$
Среднее число заявок в СМО (в очереди и на обслуживании)	$L_1 = \frac{\rho}{1-\rho}$	$L_2 = \frac{2 \cdot \rho}{1-\rho^2}$
Среднее время пребывания заявок в очереди.	$W_1 = \frac{Q_1}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho) \cdot \mu}$	$W_2 = \frac{Q_2}{\lambda} = \frac{\rho^2}{(1-\rho^2) \cdot \mu}$
Среднее время пребывания заявок в СМО .	$T_1 = \frac{L_1}{\lambda} = \frac{1}{(1-\rho) \cdot \mu}$	$T_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{1}{(1-\rho^2) \cdot \mu}$

При этом следует иметь в виду, что справедливы следующие выражения:

- среднее время обслуживания заявок в СМО  $t = 1/\mu$
- среднее число заявок в очереди:  $Q = \lambda \cdot W$
- среднее число заявок в СМО  $L = \lambda \cdot T$
- среднее время пребывания заявок в СМО  $T = W + t$

### Пример 9.7.

СОУ включает салон оперативной полиграфии, который состоит из двух дизайнерских рабочих станций и двух цифровых печатных машин. От клиентов поступают срочные и обычные заказы (заявки) соответственно с интенсивностями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  на изготовление малотиражной полиграфической продукции. Обслуживание каждой заявки включает две последовательные стадии: работа дизайнера и работа оператора печатной машины. Срочные заявки имеют абсолютный приоритет перед обычными при их выполнении на дизайнерских рабочих станциях, и относительный приоритет при обслуживании на печатных машинах. Срочные и обычные заявки обслуживают дизайнеры рабочих станций соответственно с интенсивностями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . С такими же интенсивностями эти заявки обслуживают и операторы печатных машин. Поток заявок считаем пуассоновским, а их обслуживание подчиняется экспоненциальному закону. Требуется определить для каждого класса заявок (срочные и обычные) среднее время ожидания в очереди на каждой стадии и среднее время их пребывания на каждой стадии и в салоне в целом. Исходные данные.

$$\lambda_1 = 2 \text{ заявки/час} \text{ и } \lambda_2 = 3 \text{ заявки/час} \quad \mu_1 = 5 \text{ заявок/час} \text{ и } \mu_2 = 2,5 \text{ заявки/час}$$

Средние значения времени обслуживания заявок первого ( $t_1$ ) и второго ( $t_2$ )

классов в любом аппарате соответственно равны ( $t_1 = 1/\mu_1 = 0,2 \text{ час}$ ) и

$$(t_2 = 1/\mu_2 = 0,4 \text{ час})$$

Работа салона по выполнению заявок клиентов представляется в виде двухфазной, двухканальной системы массового обслуживания. Первая фаза соответствует работе дизайнеров, а вторая работе операторов цифровых печатных машин, поэтому СМО первой фазы типа  $M/M/2/\infty/Абс/\infty$ , а СМО второй фазы  $M/M/2/\infty/Отн/\infty$



Решение.

1) Определяем загрузку одного аппарата СМО (одной рабочей станции или одной цифровой печатной машины) заявками первого и второго классов

$$\text{соответственно } \rho_1 = \frac{\lambda_1}{2 \cdot \mu_1} = \frac{2}{2 \cdot 5} = 0,2 \quad \text{и} \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{2 \cdot \mu_2} = \frac{3}{2 \cdot 2,5} = 0,6$$

Общая загрузка одного аппарата заявками двух классов равна  $\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0,8$

2) Определяем временные характеристики функционирования отдельных фаз рассматриваемой двухфазной системы обслуживания, учитывая приведенные ранее рекомендации по порядку расчета. Рассчитанные значения временных характеристик приведены в табл.2

Таблица 2

Временные характеристики одной фазы рассматриваемой двухфазной СМО

Обслуживание заявок в фазе СМО	Среднее время ожидания заявок в очереди (час)		Среднее время пребывания заявок в СМО (час)	
	Для всех заявок	Для заявок i-го класса	Для всех заявок	Для заявок i-го класса
Абсолютные приоритеты	0,502	1 кл 0,022	0,822	1 кл 0,222
		2 кл 0,822		2 кл 1,222
Относительные приоритеты	0,528	1 кл 0,154	0,848	1 кл 0,354
		2 кл 0,776		2 кл 1,176
Без приоритетов	0,620	1 кл 0,620	0,940	1 кл 0,820
		2 кл 0,620		2 кл 1,020

На основании данных, приведенных, в табл.2, составлена табл.3, в которой приведены результаты сравнительного анализа временных характеристик различных вариантов организации обработки заявок клиентов в салоне оперативной полиграфии

Таблица 3

Сравнительный анализ временных характеристик различных вариантов организации обработки заявок клиентов в салоне оперативной полиграфии

Обслуживание заявок дизайнерами	Обслуживание заявок в машине	Среднее время выполнения заявок (час)		
		У дизайнеров	В печатной машине	В салоне
Абсолютные приоритеты	Относительные приоритеты	1 кл 0,222	1 кл 0,354	1 кл 0,576
		2 кл 1,222	2 кл 1,176	2 кл 2,398
Относительные приоритеты	Относительные приоритеты	1 кл 0,354	1 кл 0,354	1 кл 0,708
		2 кл 1,176	2 кл 1,176	2 кл 2,352
Без приоритетов	Без приоритетов	1 кл 0,820	1 кл 0,820	1 кл 1,640
		2 кл 1,020	2 кл 1,020	2 кл 2,040

Анализ данных, приведенных в табл.3, показывает

1. Правильное назначение приоритетов позволяет уменьшить как среднее время ожидания заявок в очереди, так и среднее время их пребывания в системе
2. Назначение срочным заявкам абсолютных приоритетов при обслуживании дизайнерами и относительных приоритетов при обслуживании операторами печатных машин позволяет уменьшить среднее время выполнения этих заявок в салоне по сравнению с отсутствием приоритетного обслуживания более чем на один час. При этом среднее время выполнения в салоне обычных заявок увеличивается примерно на 20 минут

**Часть 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ  
ОРГАНИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ВИДЕ РАЗОМКНУТЫХ  
СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

**Глава 10. Аналитические модели СОУ в виде разомкнутых  
линейных сетей массового обслуживания**

Работу СОУ, предназначенную для последовательной распределенной обработки потоков запросов от клиентов, обычно представляют в виде разомкнутых многофазных сетей массового обслуживания, состоящих из набора последовательно соединенных однофазных СМО. При этом возможны различные виды взаимной связи отдельных СМО и различные виды потоков заявок, циркулирующих в СеМО.

**10.1 Композиция и декомпозиция потоков заявок в СеМО**

**Композиция потоков заявок** - это объединение нескольких потоков заявок в один общий поток, как правило в поток, поступающий на вход СМО. Схема объединения нескольких потоков в один поток приведена на Рис.10.1

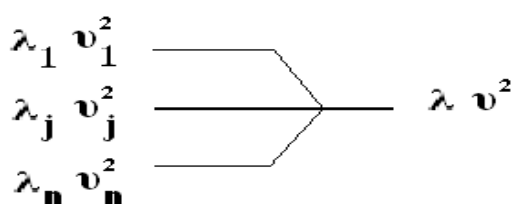


Рис. 10.1. Объединение нескольких потоков заявок в один поток

- $\lambda_j$  - интенсивность  $j$ -го входного потока заявок;
- $v_j^2$  - квадрат коэффициента вариации интервалов времени  $j$ -го потока;
- $n$  - число входных потоков заявок;
- $\lambda$  - интенсивность выходного потока заявок;

-  $v^2$  - квадрат коэффициента вариации интервалов времени выходного потока заявок.

Параметры выходного потока определяют из следующих выражений:

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j \quad (10.1)$$

$$v^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot v_j^2}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}. \quad (10.2)$$

Пример 10.1

Известны параметры трёх пуассоновских входных потоков заявок:

$$\lambda_1 = 2 \text{ 1/ мин}, \quad \lambda_2 = 3 \text{ 1/ мин}, \quad \lambda_3 = 5 \text{ 1/ мин}.$$

$$v_1^2 = v_2^2 = v_3^2 = 1.$$

Необходимо определить параметры выходного потока заявок.

Решение.

Тогда, квадраты коэффициентов вариации интервалов времени между заявками этих потоков соответственно равны. Требуется определить параметры выходного потока.

Решение.

Используя формулы (10.1) и (10.2) получаем:

Интенсивность выходного потока заявок

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 3 + 5 = 10 \text{ 1/ мин}.$$

Квадрат коэффициента вариации интервалов времени между заявками выходного потока:

$$v^2 = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{10} = 1$$

Правило 1. Если несколько Пуассоновских потоков объединяют в один поток, то поток также будет Пуассоновским.

**Декомпозиция потоков заявок** – это разбиение входного потока заявок на несколько выходных потоков, как показано на Рис.10.2.

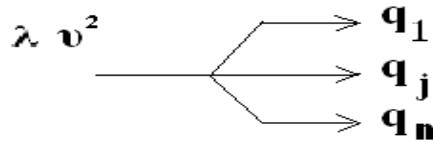


Рис. 10.2.. Разбиение потока заявок на несколько выходных потоков  
На входе системы имеем поток заявок с двумя параметрами:

- $\lambda$  - интенсивность входного потока заявок;
- $v^2$  - квадрат коэффициента вариации интервалов времени между входными заявками..

Выходными параметрами являются:

- $n$  – количество потоков, на которое разбивается входной поток заявок;
- $q_j$  - вероятность поступления заявок в  $j$ -ый выходной поток ( $j=1, \dots, n$ ).

Параметры выходного потока определяют из следующих формул:

$$\lambda_j = \lambda \cdot q_j, \tag{10.3}$$

$$v_j^2 = v^2 \cdot q_j + (1 - q_j). \tag{10.4}$$

При этом должно быть выполнено следующее условие:

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1, \tag{10.5}$$

### Пример 10.2

Интенсивность входного потока заявок  $\lambda = 10$  1/мин. а квадрат коэффициента вариации интервалов времени между заявками  $v^2 = 1$ . Поток разбивается на три потока с вероятностями  $q_1 = 0.2$ ,  $q_2 = 0.3$ ,  $q_3 = 0.5$ .

Необходимо определить параметры выходных потоков.

Решение.

1. По формуле (10.3) определяем интенсивности выходных потоков заявок.

$$\lambda_1 = \lambda \cdot q_1 = 2 \text{ 1/мин}$$

$$\lambda_2 = \lambda \cdot q_2 = 3 \text{ 1/мин}$$

$$\lambda_3 = \lambda \cdot q_3 = 5 \text{ 1/мин}$$

2. По формуле (10.4) определяем квадраты коэффициентов вариации интервалов времени между заявками в каждом потоке:

$$v_1^2 = 1 \cdot 0,2 + (1 - 0,2) = 1$$

$$v_2^2 = 1 \cdot 0,3 + (1 - 0,3) = 1$$

$$v_3^2 = 1 \cdot 0,5 + (1 - 0,5) = 1$$

Правило 2. Если Пуассоновский поток вероятностно распределяется по нескольким потокам, то каждый из потоков также будет Пуассоновским.

## **10.2. Расчет параметров потоков заявок в многофазной сети массового обслуживания**

Согласно теореме Джексона последовательно соединенные СМО, входящие в состав разомкнутой СеМО, можно рассматривать независимо друг от друга. При этом, однако, следует помнить, что параметры выходного потока предыдущей СМО являются параметрами входного потока последующей СМО.

Поэтому при исследовании многофазной СеМО ее следует разбить на отдельные фазы (отдельные СМО) и для каждой из них последовательно, начиная с первой СМО, определять параметры входного и выходного потоков заявок. При этом для каждой СМО, функционирующей в стационарном режиме без отказов, справедливо следующее выражение:

$$\lambda_{\text{вых}i} = \lambda_{\text{вх}i}. \quad (10.6)$$

Для  $i$ -ой СМО вида G/G/1, для вычисления  $v_{\text{вых}i}^2$  следует использовать один из следующих способов:

$$\text{Способ 1} \quad v_{выхi}^2 = v_{вxi}^2 + \rho_i^2 \cdot (v_{oi}^2 - v_{вxi}^2) \quad (10.7)$$

$$\text{Способ 2} \quad v_{выхi}^2 = (1 - \rho_i) \cdot v_{вxi}^2 + \rho_i \cdot v_{oi}^2 - \rho_i^2 + \rho_i \quad (10.8)$$

$$\text{Способ 3} \quad v_{выхi}^2 = v_{вxi}^2 + 2\rho_i v_{oi}^2 - \rho_i^2 \cdot (v_{вxi}^2 + v_{oi}^2) \quad (10.9)$$

В зависимости от требований, предъявляемых к расчету  $v_{выхi}^2$ , следует выбирать тот способ расчета, который обеспечивает оптимистическую, пессимистическую или среднюю оценку этого параметра.

### Пример 10.3

Для пяти вариантов однофазной СМО G/G/1 оценить параметры  $v_{выхi}^2$  выходного потока, используя предложенные три способа оценки, и сравнить полученные результаты. Исходные данные приведены ниже в табл.10.1.

Таблица 10.1

#### Исходные данные к примеру 10.3

№ Варианта	Тип СМО	Параметры i-ой СМО		
		$v_{вxi}^2$	$v_{oi}^2$	$\rho_i$
Вариант 1	M/M/1	1	1	0,5
Вариант 2	M/M/1	1	1	0,8
Вариант 3	$M / E_2 / 1$	1	0,5	0,5
Вариант 4	$E_2 / E_2 / 1$	0,5	0,5	0,5
Вариант 5	$E_2 / E_2 / 1$	0,5	0,5	0,8

Результаты расчетов приведены в табл.10.2

Таблица 10.2

#### Результаты расчётов к примеру 10.3

№ Варианта	Тип СМО	Значения параметра i-ой СМО $v_{выхi}^2$		
		Способ 1	Способ 2	Способ 3
Вариант 1	M/M/1	1	1,25	1,5
Вариант 2	M/M/1	1	1,16	1,32
Вариант 3	$M / E_2 / 1$	0,875	1	1,125
Вариант 4	$E_2 / E_2 / 1$	0,5	0,75	0,75

Вариант 5	$E_2 / E_2 / 1$	0,5	0,66	0,66
-----------	-----------------	-----	------	------

Анализ результатов, приведенных в табл.10.2, поясняет, что способ 1 – оптимистическая оценка, способ 2 – средняя оценка, способ 3 – пессимистическая оценка.

### **10.3. Расчет показателей функционирования разомкнутых многофазных линейных СеМО**

Исходными данными для оценки показателей функционирования многофазной СеМО являются:

- состав СеМО (n - количество СМО, входящих в ее состав, номера СМО в порядке их последовательного соединения);
- архитектура СеМО (последовательность соединения отдельных СМО, при этом в каждой СМО отсутствуют обратные связи);
- параметры входного потока заявок, входящих в первую СМО ( $\lambda$  - интенсивность потока заявок,  $V^2$  - квадрат коэффициента вариации интервалов времени между заявками);
- параметры потоков заявок, входящих в каждую СМО из других СеМО (интенсивности входящих потоков заявок и квадраты коэффициентов вариации интервалов времени между заявками каждого потока);
- вероятности выхода заявок в другие СеМО после их обслуживания каждой СМО в составе рассматриваемой СеМО;
- параметры обслуживания заявок в каждой СМО в составе рассматриваемой СеМО (интенсивности обслуживания заявок и квадраты коэффициентов вариации интервалов времени обслуживания).

#### **Порядок расчета показателей функционирования многофазной СеМО**

Этап 1. Определяют параметры  $\lambda$  и  $V^2$  входного потока заявок в первую СМО (СМО 1), используя метод композиции потоков.

Этап 2. Определяют показатели функционирования СМО 1:



- загрузку ОА СМО и условие стационарного режима работы СМО;

$$\rho_i = \lambda_i / \mu_i < 1 \quad (10.10)$$

- среднее количество заявок в очереди, используя формулу Файнберга;

$$Q_i = \frac{\rho_i^2 (v_{\text{exi}}^2 + v_{\text{oi}}^2)}{2(1 - \rho_i)} \quad (10.11)$$

- среднее количество заявок в СМО (в очереди и на обслуживании)

$$L_i = Q_i + \rho_i \quad (10.12)$$

- среднее время ожидания заявок в очереди;

$$W_i = Q_i / \lambda_i \quad (10.13)$$

- среднее время пребывания заявок в СМО 1;

$$T_i = L_i / \lambda_i \quad (10.14)$$

- интенсивность и квадрат коэффициента вариации интервалов времени выходного потока, используя один из способов (10.7) – (10.9);

- интенсивность и квадрат коэффициента вариации интервалов времени выходного потока, поступающего на вход следующей СМО;

Этап 3. Последовательно повторяют этап 2 и этап 3 для каждой СМО, входящей в состав рассматриваемой СеМО.

Этап 4. Определяют показатели функционирования СеМО, на основе показателей функционирования отдельных СМО, входящих в ее состав.

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (10.15)$$

$$L = \sum_{i=1}^n L_i \quad (10.16)$$

$$W = \sum_{i=1}^n W_i \quad (10.17)$$

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \quad (10.18)$$

Этап 5. Составляют сводную таблицу результатов расчета и на основе полученных данных вырабатывают рекомендации по реорганизации архитектуры СеМО с целью улучшения характеристик её работы.

Примечание. Для СМО  $E_k / E_k / 1$  параметр  $k$  потока Эрланга и квадрат коэффициента вариации интервалов времени между поступающими заявками или интервалов времени обслуживания, связаны соотношением  $k = 1/v^2$ .  
(10.19)

#### Пример 10.4

Определить показатели функционирования двухфазной СеМО, Ф-схема которой представляет собой две последовательно соединенные одноканальные СМО. Каждая СМО представляет собой СМО вида G/G/1. Согласно теореме Джексона, такую двухфазную СМО можно рассматривать как совокупность двух отдельных однофазных СМО.

Поэтому, например, двухфазную СМО, представленную на рис.10.3 можно рассматривать как совокупность двух однофазных СМО, приведенных на рис.10.4:

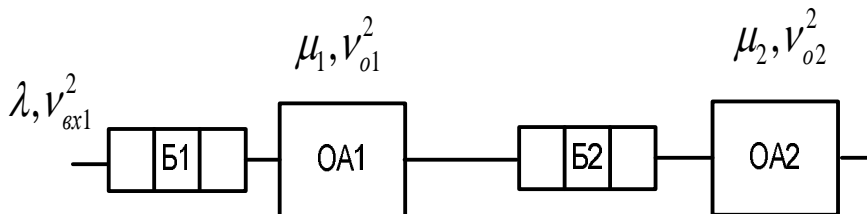


Рис.10.3 Двухфазная сеть массового обслуживания

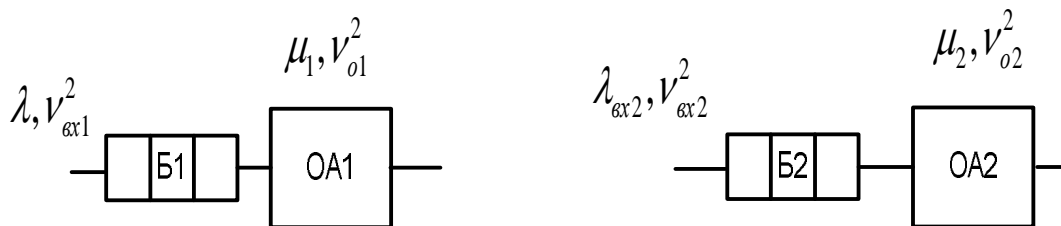


Рис. 10.4. Однофазные СМО, входящие в состав двухфазной сети.

Поскольку отказа заявок при обслуживании в системе нет, то интенсивность потока заявок не изменяется, и  $\lambda_{ex2} = \lambda$ .

Исходные данные:

$$\lambda = 8 \text{ 1/с} \quad \nu_{ex1}^2 = 1$$

$$\mu_1 = 10 \text{ 1/с} \quad v_{o1}^2 = 1 \quad \mu_2 = 9,4 \text{ 1/с} \quad v_{o2}^2 = 0,5$$

Оценку работы СеМО проводим согласно формул (10.10)-(10.18)

Определяем показатели функционирования СМО 1:

- загрузка ОА СМО 1

$$\rho_1 = \lambda_1 / \mu_1 = 8/10 = 0,8$$

- среднее количество заявок в очереди:

$$Q_1 = \frac{\rho_1^2(v_{ex1}^2 + v_{o1}^2)}{2(1 - \rho_1)} = \frac{0,8^2(1+1)}{2(1-0,8)} = 3,2$$

- среднее количество заявок в СМО (в очереди и на обслуживании)

$$L_1 = Q_1 + \rho_1 = 3,2 + 0,8 = 4$$

- среднее время ожидания заявок в очереди;

$$W_1 = \frac{Q_1}{\lambda_1} = \frac{3,2}{8} = 0,4 \text{ с}$$

- среднее время пребывания заявок в СМО 1;

$$T_1 = \frac{L_1}{\lambda_1} = \frac{4}{8} = 0,5 \text{ с}$$

- интенсивность выходного потока из СМО 1;

$$\lambda_{вых1} = \lambda_{ex1} = \lambda = 8 \text{ 1/с}$$

- квадрат коэффициента вариации интервалов времени выходного потока;

$$v_{вых1}^2 \cong v_{ex1}^2 + \rho_1^2(v_{o1}^2 - v_{ex1}^2) = 1$$

Определяем показатели функционирования СМО 2:

- интенсивность входного потока в СМО 2

$$\lambda_{ex2} = \lambda_{вых1} = 8 \text{ 1/с}$$

- квадрат коэффициента вариации интервалов времени входного потока в СМО 2;

$$v_{ex2}^2 = v_{вых1}^2 = 1$$

- загрузка ОА СМО 2;

$$\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 8 / 9,4 = 0,85$$

- среднее количество заявок в очереди СМО 2:

$$Q_2 = \frac{\rho_2^2 (v_{вх2}^2 + v_{о2}^2)}{2(1 - \rho_2)} = \frac{0,85^2 (1 + 0,5)}{2(1 - 0,85)} = 3,6125$$

- среднее количество заявок в СМО (в очереди и на обслуживании);

$$L_2 = Q_2 + \rho_2 = 3,6125 + 0,85 = 4,4625$$

- среднее время ожидания заявок в очереди;

$$W_2 = \frac{Q_2}{\lambda_2} = \frac{3,6125}{8} = 0,4515 \text{ с}$$

- среднее время пребывания заявок в СМО 2;

$$T_2 = \frac{L_2}{\lambda_2} = \frac{4,4625}{8} = 0,558 \text{ с}$$

- интенсивность выходного потока из СМО 2;

$$\lambda_{вых2} = \lambda_{вх2} = \lambda = 8 \text{ 1/с}$$

- квадрат коэффициента вариации интервалов времени выходного потока из СМО 2;

$$v_{вых2}^2 \cong v_{вх2}^2 + \rho_2^2 (v_{о2}^2 - v_{вх2}^2) = 1 + 0,85^2 (0,5 - 1) = 0,64$$

Определяют показатели функционирования СеМО:

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = 3,2 + 3,6125 = 6,8125$$

$$L = \sum_{i=1}^n L_i = 4 + 4,4625 = 8,4625$$

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = 0,4 + 0,4515 = 0,8515 \text{ с}$$

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = 0,5 + 0,558 = 1,058 \text{ с}$$

## Глава 11. Аналитические модели СОУ в виде разомкнутых сетей массового обслуживания с обратными связями

Сети массового обслуживания с обратными связями широко используют на практике, как для анализа Ф-схем работы СОУ в режиме документооборота и обслуживания информационно-вычислительных систем, так и для оценки показателей функционирования аппаратно-программных средств, в частности каналов связи.

Исходными данными для анализа СеМО с обратными связями являются:

- $n$  - количество СМО, входящих в состав исследуемой СеМО;
- $\lambda$  - интенсивность потоков заявок, поступающих в СеМО;
- $c_i$  -  $i=1..n$ , количество идентичных ОА в составе  $i$ -той СМО;
- $\mu_i = 1/t_i$  - ( $i=1..n$ ) интенсивность обслуживания заявок в ОА  $i$ -ой СМО;
- $P_{ij}$  - вероятность перехода заявки от  $i$ -той СМО на вход  $j$ -той СМО.

Порядок расчёта показателей работы СМО с обратными связями.

1. Составляют систему линейных уравнений потоков заявок, поступающих на вход каждой  $i$ -той СМО ( $i=1..n$ ) в составе исследуемой СеМО. Количество уравнений равно количеству СМО в составе СеМО. Каждое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_{ij} \quad (11.1)$$

2. Проводят во всех уравнениях замену обозначения  $\lambda_j$  на обозначение  $\lambda_j = \lambda \alpha_j$ , где  $\alpha_j$  - количество проходов заявки через  $j$ -ю СМО за время пребывания этой заявки в исследуемой СеМО.

Делят все уравнения на  $\lambda$  и получают систему уравнений:

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_{ij} \quad (11.2)$$

3. Решают полученную систему линейных уравнений и определяют численные значения  $\alpha_j$ . ( $j=1..n$ ).

4. Определяют  $\rho_i$  - загрузку каждого ОА  $i$ -той СМО:

$$\rho_i = \lambda_i / \mu_i c_i < 1 \quad (11.3)$$

Проверяют условие стационарного режима для каждой  $i$ -той СМО.

Если это условие выполняется,  $\rho_i < 1$  ( $i=1..n$ ), то проводят расчёт показателей функционирования каждой  $i$ -той СМО в составе СеМО.

Если условия стационарности не выполняются, то для соответствующих СМО необходимо выполнить одно из следующих действий:

- увеличить количество ОА в составе СМО;
- увеличить производительность каждого ОА в составе СМО;
- уменьшить вероятности потоков заявок, поступающих в СМО.

5. Определяют показатели функционирования каждой СМО в составе СеМО, используя выражения (11.4) – (11.7).

При этом, согласно теореме Джексона, каждую СМО рассматривают независимо от других СМО, но с учетом параметров потоков заявок, поступающих на её вход от всех СМО, представляя её в виде М/М/с (в частном случае М/М/1).

Среднее число заявок в очереди  $i$ -той СМО:

$$Q_i = \frac{C_i \cdot \rho_i^{C_i+1}}{1 - \rho_i^{C_i}} \quad (11.4)$$

Среднее число заявок в  $i$ -той СМО:

$$L_i = \frac{C_i \cdot \rho_i}{1 - \rho_i^{C_i}} \quad (11.5)$$

Среднее время пребывания заявок в очереди  $i$ -той СМО;

$$W_i = \frac{\alpha_i \rho_i^{C_i}}{(1 - \rho_i^{C_i}) \cdot \mu_i} \quad (11.6)$$

Среднее время пребывания заявок в  $i$ -той СМО (в очереди и на обслуживании)

$$T_i = \frac{\alpha}{(1 - \rho_i^{c_i}) \cdot \mu_i} \quad (11.7)$$

6. Определяют показатели функционирования исследуемой СеМО.

$$Q = \sum_1^n Q_i \quad (11.8)$$

$$L = \sum_1^n L_i \quad (11.9)$$

$$W = \sum_1^n W_i \quad (11.10)$$

$$T = \sum_1^n T_i \quad (11.11)$$

Рассмотрим методику анализа СеМО с обратными связями на примерах.

**Пример 11.1** Определить показатели функционирования СМО М/М/1 с обратной связью, приведенную на Рис.11.1

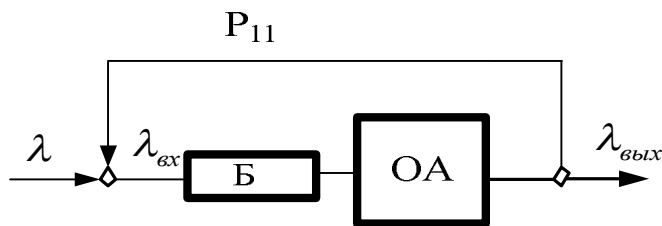


Рис. 11.1 СМО М/М/1 с обратной связью.

Исходные данные:  $\lambda = 4$  1/час,  $\mu = 10$  1/час,  $t_0 = 1/\mu = 0,1$  час

$p_{11} = 0,5$  - вероятность повторного обращения заявок на вход СМО.

Решение.

Расчет показателей работы СМО проводим по формулам (11.1)- (11.7):

1. Определяем интенсивность потока заявок, поступающего на вход СМО.

$$\lambda_{ex} = \lambda + \lambda_{ex} \cdot p$$

$$\text{Решаем уравнение и получаем: } \lambda_{ex} = \frac{\lambda}{1 - p_{11}} = \frac{4}{1 - 0,5} = 8 \text{ 1/час}$$

2. Определяем число проходов заявкой буфера и ОА за время её пребывания в СМО.

$$\alpha = \frac{1}{1 - p_{11}} = \frac{1}{1 - 0,5} = 2$$

Два раза заявка проходит через буфер и ОА за время пребывания в СМО .

3. Определяем загрузку ОА СМО.

$$\rho = \frac{\lambda_{\text{ex}}}{\mu} = \alpha \cdot \lambda \cdot t_0 = 2 \cdot 4 \cdot 0,1 = 0,8$$

где  $t_0$  - среднее время обслуживания заявки,  $t_0 = 1/\mu = 0,1$  час

СМО находится в стационарном режиме работы, поскольку  $\rho < 1$

4. Определяем среднее число заявок в очереди СМО.

$$Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{0,64}{1 - 0,8} = 3,2$$

5. Определяем среднее число заявок в СМО.

$$L = Q + \rho = 4$$

6. Определяем среднее время пребывания заявок в очереди СМО за один проход, используя формулу Литтла:  $Q = \lambda_{\text{ex}} \cdot W$  Имеем:

$$W = \frac{Q}{\lambda_{\text{ex}}} = \frac{3,2}{8} = 0,4 \text{ час}$$

Среднее время пребывания заявок в очереди СМО за два прохода

$$W_{\text{смо}} = W \cdot \alpha = 0,4 \cdot 2 = 0,8 \text{ час}$$

$$\text{Или } W = \frac{\rho \cdot t_0 \cdot \alpha}{1 - \rho} = \frac{0,8 \cdot 0,1 \cdot 2}{0,2} = 0,8 \text{ час}$$

7. Определяем среднее время пребывания заявок в СМО за один проход, используя формулу Литтла:  $L = \lambda_{\text{ex}} \cdot T$  Имеем:

$$T = \frac{L}{\lambda_{\text{ex}}} = \frac{4}{8} = 0,5 \text{ час}$$

Среднее время пребывания заявок в СМО за два прохода

$$T_{\text{смо}} = T \cdot \alpha = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ час}$$

$$\text{Или } T = T_V = \frac{t_0 \cdot \alpha}{1 - \rho} = \frac{0,1 \cdot 2}{0,2} = 1 \text{ час}$$



**Пример 11.2.** Определить показатели функционирования разомкнутой двухфазной СеМО с обратными связями, приведенную на Рис.11.2.

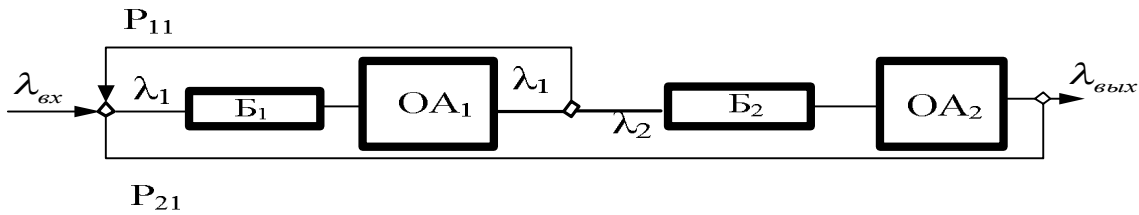


Рис. 11.2 Разомкнутая двухфазная СеМО с обратными связями.

Исходные данные: СеМО включает две одинаковые СМО вида М/М/1.

Входной поток заявок в СеМО поступает на вход СМО-1  $\lambda_{\text{вх}} = \lambda = 2$  1/час ,

Интенсивности обслуживания заявок в СМО -1 и СМО-2  $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 10$  1/час ,

$t_0$  - среднее время обслуживания заявок .  $t_0 = 1/\mu = 0,1$  час

$p_{11} = 0,5$  ;  $p_{21} = 0,2$  вероятности повторного обращения заявок в СМО-1

Решение.

Расчет показателей работы СеМО проводим по формулам (11.1)- (11.7):

1. Определяем интенсивности потоков заявок  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , соответственно поступающие на вход СМО-1 и СМО-2. При этом интенсивности потоков заявок, поступающих на вход каждой СМО, равны интенсивностям выходных потоков заявок из этих СМО, поскольку отказов заявкам в обслуживании нет.

Для СМО-2 имеем:  $\lambda_2 = \lambda + \lambda_2 \cdot p_{21}$  , поскольку  $\lambda_{\text{вх}} = \lambda_{\text{вых}} = \lambda$

Решаем уравнение и получаем:  $\lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - p_{21}} = \frac{2}{1 - 0,2} = 2,5$  1/час

Для СМО-1 имеем:  $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_1 \cdot p_{11}$

Решаем уравнение и получаем:

$\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{1 - p_{11}} = \frac{\lambda}{(1 - p_{21}) \cdot (1 - p_{11})} = \frac{2}{(1 - 0,5) \cdot (1 - 0,2)} = 5$  1/час

2. Определяем число проходов заявками СМО-1 и СМО-2 за время их пребывания в СеМО.

$$\alpha_1 = \frac{1}{(1-p_{11}) \cdot (1-p_{21})} = \frac{1}{(1-0,5) \cdot (1-0,2)} = 2,5$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{(1-p_{21})} = \frac{1}{(1-0,2)} = 1,25$$

В среднем 2,5 раза заявки обрабатываются в СМО-1 (проходят через буфер Б1 и ОА1) и 1,25 раза в СМО-2 (проходят через буфер Б2 и ОА2) за время их пребывания в двухфазной СеМО.

3. Определяем загрузку ОА1 СМО-1 и ОА2 СМО-2.

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \frac{5}{10} = 0,5 \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \frac{2,5}{10} = 0,25$$

СМО-1 и СМО-2 в стационарном режиме работы, поскольку  $\rho_1 < 1$  и  $\rho_2 < 1$

4. Определяем среднее число заявок в очереди СМО-1 и СМО-2.

$$Q_1 = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} = \frac{0,25}{1-0,5} = 0,5 \quad Q_2 = \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2} = \frac{0,0625}{1-0,25} = 0,0833$$

5. Определяем среднее число заявок в СМО-1 и СМО-2.

$$L_1 = Q_1 + \rho_1 = 0,5 + 0,5 = 1 \quad L_2 = Q_2 + \rho_2 = 0,083 + 0,25 = 0,333$$

8. Определяем среднее время пребывания заявок в очереди СМО-1 и

СМО-2 за один проход, используя формулу Литтла:  $Q_i = \lambda_i \cdot W_i$ . Имеем:

$$W_1 = \frac{Q_1}{\lambda_1} = \frac{0,5}{5} = 0,1 \text{ час} \quad W_2 = \frac{Q_2}{\lambda_2} = \frac{0,083}{2,5} = 0,033 \text{ час}$$

Среднее время пребывания заявок в очереди СМО- $i$  за  $\alpha_i$  проходов

$$W_{смo1} = W_1 \cdot \alpha_1 = 0,1 \cdot 2,5 = 0,25 \text{ час}$$

$$W_{смo2} = W_2 \cdot \alpha_2 = 0,033 \cdot 1,25 = 0,0412 \text{ час}$$

9. Определяем среднее время пребывания заявок в СМО- $i$  за  $\alpha_i$  проходов,

используя формулу Литтла:  $L_i = \lambda_i \cdot T_i$  Имеем:

$$T_1 = \frac{L_1}{\lambda_1} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ час} \quad T_2 = \frac{L_2}{\lambda_2} = \frac{0,333}{2,5} = 0,133 \text{ час}$$

Среднее время пребывания заявок в СМО- $i$  за  $\alpha_i$  проходов

$$T_{смo1} = T_1 \cdot \alpha_1 = 0,2 \cdot 2,5 = 0,5 \text{ час}$$

$$T_{смo2} = T_2 \cdot \alpha_2 = 0,133 \cdot 1,25 = 0,166 \text{ час}$$

10. Определяем показатели работы СеМО.

$$Q_{семо} = Q_{смo1} + Q_{смo2} = Q_1 + Q_2 = 0,5 + 0,083 = 0,583$$

$$L_{семо} = L_{смo1} + L_{смo2} = L_1 + L_2 = 1 + 0,333 = 1,333$$

$$W_{семо} = W_{смo1} + W_{смo2} = 0,25 + 0,041 = 0,291 \text{ час}$$

$$T_{семо} = T_{смo1} + T_{смo2} = 0,5 + 0,166 = 0,666 \text{ час}$$

**Пример 11.3.** Определить показатели функционирования разомкнутой двухфазной СеМО с обратными связями, приведенную на Рис.11.3.

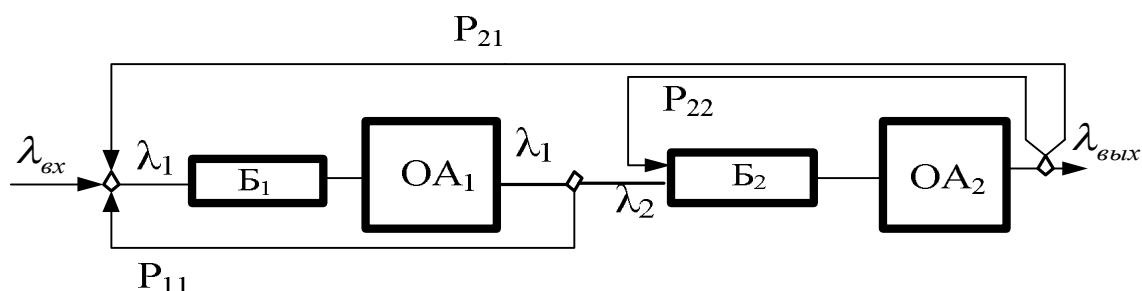


Рис. 11.3 Разомкнутая двухфазная СеМО с обратными связями.

Исходные данные: СеМО включает две одинаковые СМО вида М/М/1.

Входной поток заявок в СеМО поступает на вход СМО-1  $\lambda_{вх} = \lambda = 2 \text{ 1/час}$ ,

Интенсивности обслуживания заявок в СМО -1 и СМО-2  $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 10 \text{ 1/час}$ ,

$t_0$  - среднее время обслуживания заявок .  $t_0 = 1/\mu = 0,1 \text{ час}$

$p_{11} = 0,2$ ;  $p_{21} = 0,2$  вероятности повторного обращения заявок на вход СМО-1

$p_{22} = 0,3$  вероятность повторного обращения заявок на вход СМО-2

Решение.

Расчет показателей работы СеМО проводим по формулам (11.1)- (11.7):

1. Определяем интенсивности потоков заявок  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , соответственно поступающие на вход СМО-1 и СМО-2. При этом интенсивности потоков заявок, поступающих на вход каждой СМО, равны интенсивностям выходных потоков заявок из этих СМО, поскольку отказов заявкам в обслуживании нет.

Для СМО-2 имеем:  $\lambda_2 = \lambda + \lambda_2 \cdot p_{21} + \lambda_2 \cdot p_{22}$ , поскольку  $\lambda_{\text{вх}} = \lambda_{\text{вых}} = \lambda$

$$\text{Решаем уравнение и получаем: } \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - p_{21} - p_{22}} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ 1/час}$$

Для СМО-1 имеем:  $\lambda_1 = \lambda + \lambda_2 \cdot p_{22} + \lambda_1 \cdot p_{11}$

Решаем уравнение и получаем:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda \cdot (1 - p_{21})}{(1 - p_{21} - p_{22}) \cdot (1 - p_{11})} = \frac{2 \cdot (1 - 0,2)}{(1 - 0,2 - 0,3) \cdot (1 - 0,2)} = 4 \text{ 1/час}$$

2. Определяем число проходов заявками СМО-1 и СМО-2 за время их пребывания в СеМО.

$$\alpha_1 = \frac{(1 - p_{21})}{(1 - p_{21} - p_{22}) \cdot (1 - p_{11})} = \frac{0,8}{(1 - 0,2 - 0,3) \cdot (1 - 0,2)} = 2$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{1 - p_{21} - p_{22}} = \frac{1}{0,5} = 2$$

В среднем два раза заявки обрабатываются в СМО-1 (два раза проходят через буфер Б1 и ОА1) и 2 раза в СМО-2 (два раза проходят через буфер Б2 и ОА2) за время их пребывания в двухфазной СеМО.

3. Определяем загрузку ОА1 СМО-1 и ОА2 СМО-2.

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \frac{4}{10} = 0,4 \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \frac{4}{10} = 0,4$$

СМО-1 и СМО-2 в стационарном режиме работы, поскольку  $\rho_1 < 1$  и  $\rho_2 < 1$

4. Определяем среднее число заявок в очереди СМО-1 и СМО-2.

$$Q_1 = \frac{\rho_1^2}{1 - \rho_1} = \frac{0,16}{1 - 0,4} = 0,266 \quad Q_2 = \frac{\rho_2^2}{1 - \rho_2} = \frac{0,16}{1 - 0,4} = 0,266$$

5. Определяем среднее число заявок в СМО-1 и СМО-2.

$$L_1 = Q_1 + \rho_1 = 0,266 + 0,4 = 0,666$$

$$L_2 = Q_2 + \rho_2 = 0,266 + 0,4 = 0,666$$

9. Определяем среднее время пребывания заявок в очереди СМО-1 и

СМО-2 за один проход, используя формулу Литтла:  $Q_i = \lambda_i \cdot W_i$ . Имеем:

$$W_1 = \frac{Q_1}{\lambda_1} = \frac{0,266}{4} = 0,0665 \text{ час} \quad W_2 = \frac{Q_2}{\lambda_2} = \frac{0,266}{4} = 0,0665 \text{ час}$$

Среднее время пребывания заявок в очереди СМО- $i$  за  $\alpha_i$  проходов

$$W_{смo1} = W_1 \cdot \alpha_1 = 0,0665 \cdot 2 = 0,133 \text{ час}$$

$$W_{смo2} = W_2 \cdot \alpha_2 = 0,0665 \cdot 2 = 0,133 \text{ час}$$

9. Определяем среднее время пребывания заявок в СМО- $i$  за  $\alpha_i$  проходов,

используя формулу Литтла:  $L_i = \lambda_i \cdot T_i$ . Имеем:

$$T_1 = \frac{L_1}{\lambda_1} = \frac{0,666}{4} = 0,1665 \text{ час} \quad T_2 = \frac{L_2}{\lambda_2} = \frac{0,666}{4} = 0,1665 \text{ час}$$

Среднее время пребывания заявок в СМО- $i$  за  $\alpha_i$  проходов

$$T_{смo1} = T_1 \cdot \alpha_1 = 0,1665 \cdot 2 = 0,333 \text{ час}$$

$$T_{смo2} = T_2 \cdot \alpha_2 = 0,1665 \cdot 2 = 0,333 \text{ час}$$

10. Определяем показатели работы СеМО.

$$Q_{семо} = Q_{смo1} + Q_{смo2} = Q_1 + Q_2 = 0,266 + 0,266 = 0,532$$

$$L_{семо} = L_{смo1} + L_{смo2} = L_1 + L_2 = 0,666 + 0,666 = 1,333$$

$$W_{семо} = W_{смo1} + W_{смo2} = 0,133 + 0,133 = 0,266 \text{ час}$$

$$T_{семо} = T_{смo1} + T_{смo2} = 0,333 + 0,333 = 0,666 \text{ час}$$

## Глава 12. Аналитические модели СОУ в виде разомкнутых разветвлённых сетей массового обслуживания

Типовая Ф-схема разомкнутой многофазной СеМО приведена на Рис.12.1. Для определения показателей работы этой СеМО следует использовать методику анализа разомкнутых СеМО, приведенную в главе 11, включающую формулы 11.1 – 11.11.

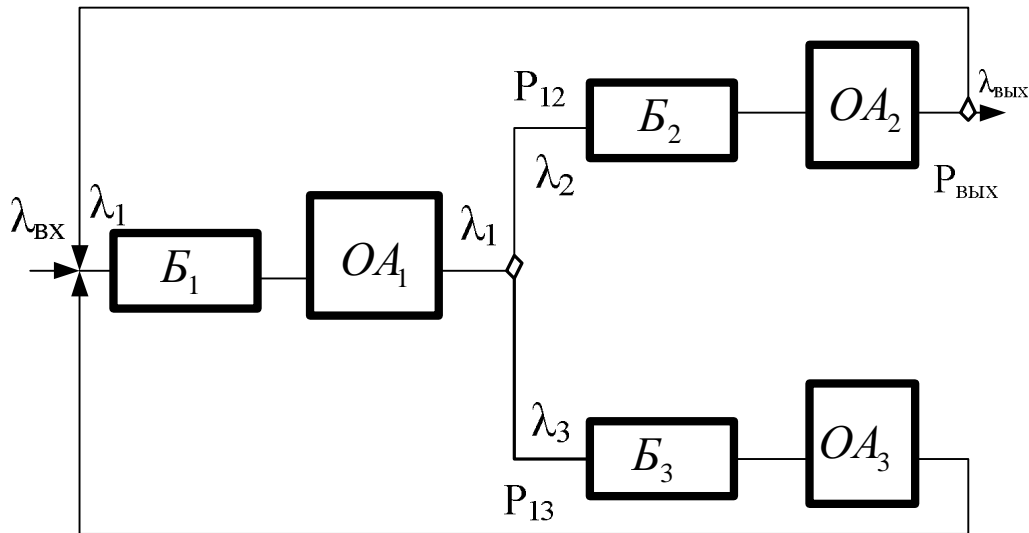


Рис. 12.1. Ф-схема разомкнутой сети массового обслуживания.

### Пример 12.1.

Определить показатели функционирования разомкнутой разветвленной СеМО, Ф-схема которой приведена на Рис.12.1.

Исходные данные.

СеМО включает три СМО: СМО-1, СМО-2 и СМО-3, каждая вида М/М/1.

$\lambda_{вх} = \lambda = 1$  1/час - интенсивность входного потока заявок в СеМО.

$\mu_i$  - интенсивность обслуживания заявок в  $i$ -той СМО.

$$\mu_1 = 10 \text{ 1/час} \quad \mu_2 = 8 \text{ 1/час} \quad \mu_3 = 5 \text{ 1/час}$$

$P_{ij}$  - вероятность перехода заявок из  $i$ -той СМО в  $j$ -тую СМО в процессе их

нахождения в СеМО.  $P_{12} = 0,75$      $P_{13} = 0,25$      $P_{21} = 0,5$

$P_{вых} = 0,5$  - вероятность выхода заявок из СеМО.

### Решение.

1. Составляем систему уравнений, описывающую связи потоков заявок в СеМО.

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda + \lambda_2 P_{21} + \lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_1 P_{12} \\ \lambda_3 = \lambda_1 P_{13} \end{cases} \quad (12.1)$$

Где:  $\lambda_i$  - интенсивность потока заявок, поступающих на вход в  $i$ -той СМО (в буфер) и выходящих из этой СМО.

Вводим обозначение:  $\lambda_i = \alpha_i \cdot \lambda$

$\alpha_i$  – число входов заявки в  $i$ -тую СМО за время её пребывания в СеМО.

Используя введенные обозначения, преобразуем систему уравнений к виду:

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda = \lambda + \alpha_2 \lambda P_{21} + \alpha_3 \lambda \\ \alpha_2 \lambda = \alpha_1 \lambda P_{12} \\ \alpha_3 \lambda = \alpha_1 \lambda P_{13} \end{cases} \quad (12.2)$$

Сокращаем уравнения (12.2) на  $\lambda$  и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 + \alpha_2 P_{21} + \alpha_3 \\ \alpha_2 = \alpha_1 P_{12} \\ \alpha_3 = \alpha_1 P_{13} \end{cases} \quad (12.3)$$

2. Решаем систему уравнений (12.3) и находим значения  $\alpha_i$  и  $\lambda_i$ :

После подстановки в первое уравнение получаем:

$$\alpha_1 = 1 + 0,5 \cdot 0,75\alpha_1 + 0,25 \cdot \alpha_1$$

Далее получаем:  $\alpha_1 = 2,67$                        $\alpha_2 = 2$                        $\alpha_3 = 0,67$

Находим интенсивности входных потоков заявок в каждую СМО.

$$\lambda_1 = \alpha_1 \lambda = 2,67 \text{ 1/час} , \quad \lambda_2 = \alpha_2 \lambda = 2 \text{ 1/час} , \quad \lambda_3 = \alpha_3 \lambda = 0,67 \text{ 1/час}$$

3 Определяем загрузку каждой СМО:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = 0,267 , \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0,25 , \quad \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = 0,134$$

Поскольку условие  $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1$  выполняется для всех СМО в составе СеМО,

то существует стационарный режим и можно найти показатели работы всех СМО, а также СеМО в целом.

Если хотя бы одно из  $\rho_i \geq 1$ , то стационарный режим не существует и для перехода в такой режим необходимо выполнить одно из следующих действий:

- уменьшить интенсивность входного потока  $\lambda$ , так чтобы  $\rho_i < 1$ ;
- увеличить производительность  $\mu_i$  в  $i$ -ой СМО, чтобы  $\rho_i < 1$ ;
- уменьшить поток заявок в данную СМО за счет перераспределения вероятностей перехода  $P_{ij}$ .

#### 4. Определяем показатели функционирования всех СМО в составе СеМО

Результаты расчетов заносим в табл.12.1

#### 5. Определяем показатели функционирования СеМО

Результаты расчетов заносим в табл.12.1 (последний столбец).

Таблица 12.1

Сводная таблица характеристик функционирования СМО в составе СеМО

Показатели работы СМО	СМО 1	СМО 2	СМО 3	СеМО
$\alpha_i$	2,67	2	0,67	_____
$\lambda_i$ (1/час)	2,67	2	0,67	_____
$\mu_i$ (1/час)	10	8	5	_____
$\rho_i = \lambda_i / \mu_i$	0,267	0,25	0,134	_____
$Q_i = \frac{\rho_i^2}{1 - \rho_i}$	0,097	0,083	0,021	0,2
$L_i = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i}$	0,364	0,333	0,155	0,852
$W_i = \frac{\rho_i}{(1 - \rho_i)\mu_i}$ (час)	0,0364	0,0416	0,0309	0,107
$(W_i \cdot \alpha_i)$ (час)	0,0972	0,0833	0,0207	0,2
$T_i = \frac{1}{(1 - \rho_i)\mu_i}$ (час)	0,136	0,166	0,230	0,531
$(T_i \cdot \alpha_i)$ (час)	0,364	0,333	0,135	0,852



### Пример 12.2.

Определить показатели функционирования разомкнутой многоканальной СеМО, Ф-схема которой приведена на Рис.12.2.

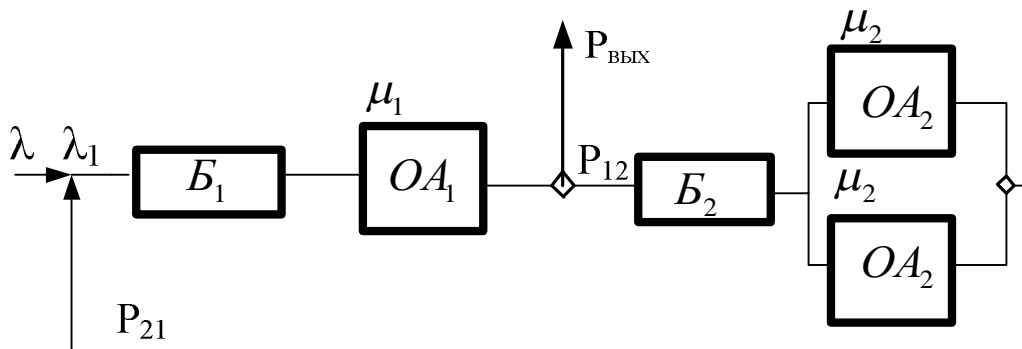


Рис. 12.2. Ф-схема разомкнутой многоканальной СеМО.

Исходные данные.

СеМО включает две СМО: СМО-1 вида М/М/1, а СМО-2 вида М/М/2.

$\lambda_{вх} = \lambda = 1$  1/час - интенсивность входного потока заявок в СМО-1.

$\mu_i$  - интенсивность обслуживания заявок в  $i$ -той СМО.

$\mu_1 = 2,5$  1/час  $\mu_2 = \mu_{21} = \mu_{22} = 0,25$  1/час

$P_{ij}$  - вероятность перехода заявок из  $i$ -той СМО в  $j$ -тую СМО в процессе их

нахождения в СеМО.  $P_{12} = 0,2$   $P_{21} = 1$

$P_{вых} = 0,8$  - вероятность выхода заявок из СеМО после обслуживания в СМО-1.

**Решение.**

1. Составляем систему уравнений, описывающую связи потоков заявок в СеМО.

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda + \lambda_2 \\ \lambda_2 = \lambda_1 P_{12} \end{cases} \quad (12.4)$$

Где:  $\lambda_i$  - интенсивность потока заявок, поступающих на вход в  $i$ -той СМО (в буфер) и выходящих из этой СМО.

Вводим обозначение:  $\lambda_i = \alpha_i \cdot \lambda$

$\alpha_i$  - число входов заявки в  $i$ -тую СМО за время её пребывания в СеМО.

Используя введенные обозначения, преобразуем систему уравнений к виду:

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda = \lambda + \alpha_2 \lambda \\ \alpha_2 \lambda = \alpha_1 \lambda P_{12} \end{cases} \quad (12.5)$$

Сокращаем уравнения (12.5) на  $\lambda$  и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 + \alpha_2 \\ \alpha_2 = \alpha_1 P_{12} \end{cases} \quad (12.6)$$

2. Решаем систему уравнений (12.6) и находим значения  $\alpha_i$  и  $\lambda_i$ :

После подстановки в первое уравнение получаем:  $\alpha_1 = 1 + 0,2 \cdot \alpha_1$

Далее получаем:  $\alpha_1 = 1,25$                        $\alpha_2 = 0,25$

Находим интенсивности входных потоков заявок в каждую СМО.

$$\lambda_1 = \alpha_1 \lambda = 1,25 \text{ 1/час} \quad , \quad \lambda_2 = \alpha_2 \lambda = 0,25 \text{ 1/час}$$

3 Определяем загрузку каждой СМО в составе СеМО:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{1,25}{2,5} = 0,5 \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{2 \cdot \mu_2} = \frac{0,25}{2 \cdot 0,25} = 0,5$$

Поскольку условие  $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1$  выполняется для каждой СМО в составе

СеМО, то существует стационарный режим и можно найти показатели работы всех СМО, а также СеМО в целом.

Если хотя бы одно из  $\rho_i \geq 1$ , то стационарный режим не существует и для перехода в такой режим необходимо выполнить рекомендации примера 12.1.

4. Определяем показатели функционирования всех СМО в составе СеМО

Среднее число заявок в очереди каждой СМО:

$$Q_1 = \frac{\rho_{11}^2}{1 - \rho_{11}} = \frac{0,25}{1 - 0,5} = 0,5 \quad Q_2 = \frac{2\rho_2^3}{1 - \rho_2^2} = \frac{2 \cdot (0,5)^3}{1 - (0,5)^2} = 0,333$$

Среднее число заявок в каждой СМО:

$$L_1 = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} = \frac{0,5}{1 - 0,5} = 1 \quad L_2 = \frac{2 \cdot \rho_2}{1 - \rho_2^2} = \frac{2 \cdot 0,5}{1 - 0,25} = 1,333$$

Среднее время нахождения заявок в очереди каждой СМО за время пребывания в СеМО:

$$W_1 = \alpha_1 \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)\mu_1} = 1,25 \cdot \frac{0,5}{(1-0,5) \cdot 2,5} = 0,5 \text{ час}$$

$$W_2 = \alpha_2 \frac{\rho_2^2}{(1-\rho_2^2)\mu_2} = 0,25 \cdot \frac{0,25}{(1-0,25) \cdot 0,25} = 0,333 \text{ час}$$

Среднее время пребывания заявок в каждой СМО:

$$T_1 = \alpha_1 \frac{1}{(1-\rho_i)\mu_i} = 1,25 \cdot \frac{1}{(1-0,5) \cdot 2,5} = 1 \text{ час}$$

$$T_2 = \alpha_2 \frac{1}{(1-\rho_2^2)\mu_2} = 0,25 \cdot \frac{1}{(1-0,25) \cdot 0,25} = 1,333 \text{ час}$$

5. Определяем показатели функционирования СеМО

Результаты расчетов заносим в табл.12.2.

Таблица 12.2

Сводная таблица результатов решения примера 12.2

Компонент СеМО	$\alpha_i$	$\lambda_i$	$\rho_i$	$Q_i$	$L_i$	$W_i$ (час)	$T_i$ (час)
СМО1 $\mu = 2,5$ 1/час	1,25	1,25	0,5	0,5	1,0	0,5	1,0
СМО2 $\mu = 0,25$ 1/час	0,25	0,25	0,5	0,333	1,333	0,333	1,333
СеМО	—	1	-	0,833	2,333	0,833	2,333

### Глава 13. Аналитические модели СОУ в виде разомкнутых сетей массового обслуживания с отказами

Ф-схема фрагмента типовой разомкнутой линейной многофазной сети массового обслуживания с отказами в обслуживании поступающих заявок, используемая при анализе и исследовании СОУ, приведена на Рис.13.1. СеМО состоит из нескольких последовательно соединённых СМО. СМО имеют ограниченный размер входной буферной памяти для приема поступающих заявок ( $0 \leq m < \infty$ ). В СеМО поступает пуассоновский поток заявок, а обслуживание заявок в каждой СМО соответствует экспоненциальному закону.

Для оценки основных показателей функционирования таких СеМО и СМО, входящих в их состав, используют в основном два подхода:

- подход «графа состояний». Строят граф состояний СеМО и составляют систему уравнений, описывающую связи потоков заявок в СеМО, решая её определяют вероятности состояний СеМО и СМО и показатели их работы;
- подход «подсистем». Рассматривают СеМО как последовательную связь отдельных подсистем, т.е. СМО с ограниченной длиной очереди, пуассоновским входным потоком и экспоненциальным обслуживанием, например, вида М/М/1/м или М/М/2/м, и используют простые аналитические выражения для проведения расчетов.

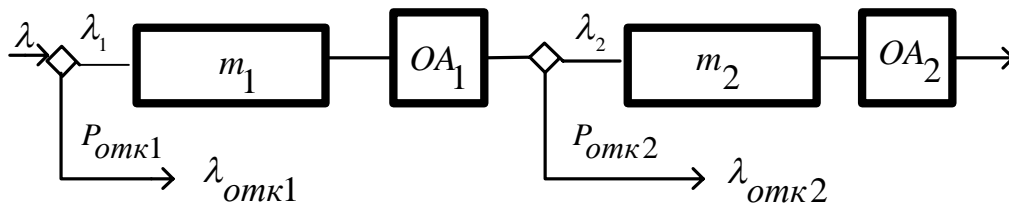


Рис. 13.1 Ф-схема фрагмента разомкнутой линейной СеМО с отказами.

### 13.1. Разомкнутые сети массового обслуживания на основе СМО с отказами.

Ф-схема фрагмента разомкнутой линейной многофазной сети массового обслуживания, построенная на основе СМО с отказами вида М/М/1/0, используемая при анализе и исследовании СОУ, приведена на Рис.13.2.

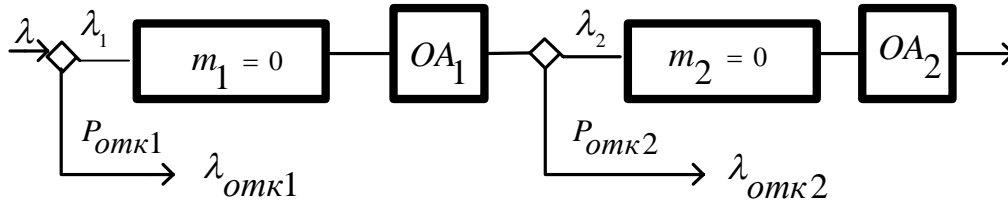


Рис. 13.2 Ф-схема разомкнутой СеМО на основе двух СМО М/М/1/0.

Рассмотрим на примерах порядок расчёта основных показателей функционирования СеМО и СМО, входящих в их состав, при использовании метода «граф состояний» и метода «подсистем».

#### Пример 13.1.

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой представлена на Рис.13.2. в виде Ф-схемы разомкнутой линейной двухфазной СеМО с отказами. СеМО состоит из двух СМО: СМО-1 и СМО-2. Входной поток заявок, поступающий в буфер СМО-1, пуассоновский, а обслуживание заявок в ОА1 СМО-1 и в ОА2 СМО-2 соответствует экспоненциальному закону. Размеры входных буферов СМО-1 и СМО-2 для приема поступающих заявок равны нулю, т.е.  $m_1 = m_2 = 0$  (входные буфера отсутствуют).

Необходимо определить показатели работы СеМО методом «граф состояний» и методом «подсистем», и сравнить полученные результаты.

Исходные данные.

$\lambda_{вх} = \lambda = 1$  1/час - интенсивность входного потока заявок в СМО-1.

$\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1$  1/час - интенсивность обслуживания заявок в СМО-1 и СМО-2.

$P_{12} = 1$  - вероятность перехода заявок в СеМО из СМО -1 в СМО-2.

**Решение.** Расчет показателей работы СеМО методом «граф состояний».

1. Для СеМО, Ф-схема которой дана на Рис.13.2. составляем граф состояний, который приведен на Рис.13.3.

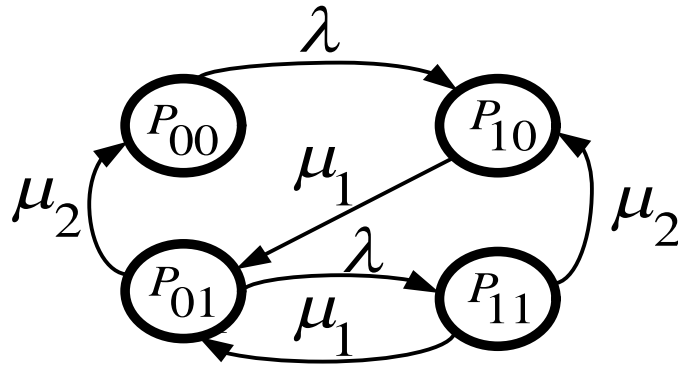


Рис. 13.3 Граф состояний двухфазной рассматриваемой СеМО с отказами.  
 $P_{ij}$  – вероятность, что в СМО-1  $i$ - заявок, а в СМО-2  $j$ - заявок.

2. Составляем систему уравнений, описывающую связи потоков заявок в СеМО в стационарном режиме её функционирования, решаем её с учетом условия нормировки вероятности этих состояний (13.2).

$$\begin{cases} P_{00} \cdot \lambda = P_{01} \cdot \mu_2 \\ P_{10} \cdot \mu_1 = P_{00} \cdot \lambda + P_{11} \cdot \mu_2 \\ P_{01} \cdot (\mu_2 + \lambda) = P_{10} \cdot \mu_1 + P_{11} \cdot \mu_1 \\ P_{11} \cdot (\mu_1 + \mu_2) = P_{01} \cdot \lambda \end{cases} \quad (13.1)$$

Условие нормировки вероятностей состояний рассматриваемой СеМО имеет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{ij} = 1 \quad (13.2)$$

Согласно исходных данных, имеем:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu = \lambda$  (13.3)

Согласно выражения (13.3) выражение (13.1) упрощается и принимает вид:

$$\begin{cases} P_{00} = P_{01} \\ P_{10} = P_{00} + P_{11} \\ 2 \cdot P_{01} = P_{10} + P_{11} \\ 2 \cdot P_{11} = P_{01} \end{cases} \quad (13.4)$$

Решаем систему уравнений (13.4) с учетом условия (13.2) и получаем значения вероятностей состояний рассматриваемой СеМО в стационарном режиме её работы при заданном наборе исходных данных. Имеем:

$$P_{00} = 0,25 \quad P_{01} = 0,25 \quad P_{10} = 0,375 \quad P_{11} = 0,125$$

3. Определяем основные показатели работы рассматриваемой СеМО.

$$\text{Загрузка ОА1 в СМО-1: } \rho_1 = \lambda / \mu_1 = 1/1 = 1$$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-1:

$$P_{отк1} = P_{10} + P_{11} = 0,375 + 0,125 = 0,5$$

Интенсивность потока заявок, которым отказано в обслуживании в СМО-1:

$$\lambda_{отк1} = P_{отк1} \cdot \lambda = 0,5 \cdot 1 = 0,5 \text{ 1/час}$$

Интенсивность потока заявок, который поступает в СМО-2:

$$\lambda_2 = \lambda - \lambda_{отк1} = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ 1/час}$$

$$\text{Загрузка ОА2 в СМО-2: } \rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 0,5/1 = 0,5$$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-2:

$$P_{отк2} = P_{01} + P_{11} = 0,25 + 0,125 = 0,375$$

Интенсивность потока заявок, которым отказано в обслуживании в СМО-2:

$$\lambda_{отк2} = P_{отк2} \cdot \lambda_2 = 0,375 \cdot 0,5 = 0,1875 \text{ 1/час}$$

Интенсивность потока заявок, который выходит из СМО-2:

$$\lambda_{вых} = \lambda_2 - \lambda_{отк2} = 0,5 - 0,1875 = 0,3125 \text{ 1/час}$$

**Решение.** Расчет показателей работы СеМО методом «подсистем».

В СеМО, Ф-схема которой приведена на Рис.13.1., выделяем две последовательно соединенные подсистемы: подсистема 1 – это СМО-1 и подсистема 2 – это СМО-2. Каждую подсистему представляем в виде СМО М/М/1/м. Расчет показателей работы этих СМО подробно рассмотрен в главе 8. Расчет проводим по формулам, приведенным в табл. 8.2 и табл.8.4.

$$\text{Загрузка ОА1 в СМО-1: } \rho_1 = \lambda / \mu_1 = 1/1 = 1$$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-1 при  $\rho_1 = 1$ :

$$P_{отк1} = 1/(m + 2) = 0,5$$

Интенсивность потока заявок, который поступает в СМО-2:

$$\lambda_2 = \lambda - \lambda_{отк1} = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ 1/час}$$

Загрузка ОА2 в СМО-2:  $\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 0,5 / 1 = 0,5$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-2:

$$P_{отк2} = \frac{(\rho_2^{m+1} - \rho_2^{m+2})}{(1 - \rho_2^{m+2})} = \frac{\rho_2}{(1 + \rho_2)} = \frac{0,5}{(1 + 0,5)} = 0,333$$

Интенсивность потока заявок, которым отказано в обслуживании в СМО-2:

$$\lambda_{отк2} = P_{отк2} \cdot \lambda_2 = 0,333 \cdot 0,5 = 0,1667 \text{ 1/час}$$

Интенсивность потока заявок, который выходит из СМО-2:

$$\lambda_{вых} = \lambda_2 - \lambda_{отк2} = 0,5 - 0,1667 = 0,3333 \text{ 1/час}$$

Метод «подсистем» приближенный, поскольку считают, что поток заявок в СМО-2 пуассоновский. Реально он не пуассоновский, но близкий к нему.

Метод «подсистем» по сравнению с методом «граф состояний», при заданных исходных данных, дает:

- уменьшение значения  $P_{отк2}$  на 11,2%;
- Уменьшение значения  $\lambda_{отк2}$  на 11,2%
- увеличение значения  $\lambda_{вых}$  на 6,65%



**13.2. Разомкнутые сети массового обслуживания  
на основе СМО с отказами и СМО ограниченной длины очереди**  
Ф-схема разомкнутой линейной двухфазной СеМО, в которой СМО-1

вида М/М/1/0, а СМО-2 вида М/М/1/1 приведена на Рис.13.4.

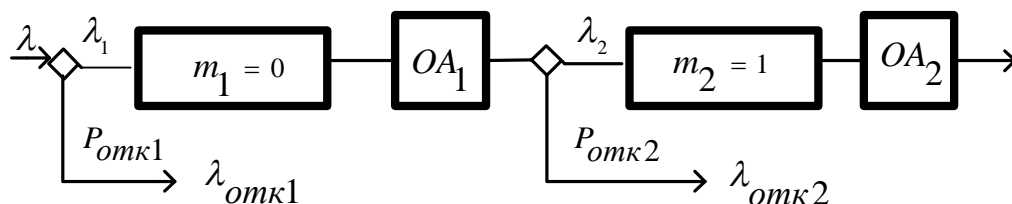


Рис. 13.4 Ф-схема разомкнутой СеМО на основе СМО М/М/1/0 и М/М/1/1

Рассмотрим на примере порядок расчёта основных показателей работы двухфазной СеМО, построенной на основе СМО М/М/1/0 и М/М/1/1 при использовании метода «граф состояний» и метода «подсистем».

**Пример 13.2.**

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой приведена на Рис.13.4. в виде Ф-схемы разомкнутой линейной двухфазной СеМО, состоящей из СМО вида М/М/1/0 и М/М/1/1.. Входной поток заявок, поступающий в СМО-1, пуассоновский, а обслуживание заявок в СМО-1 и в СМО-2 соответствует экспоненциальному закону. Размеры входных буферов СМО-1 и СМО-2, для приёма поступающих заявок, равны .  $m_1 = 0$  ,  $m_2 = 1$ .

Необходимо определить показатели работы СеМО методом «граф состояний» и методом «подсистем», и сравнить полученные результаты.

Исходные данные.

$\lambda_{ex} = \lambda = 1$  1/час - интенсивность входного потока заявок в СМО-1.

$\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1$  1/час - интенсивность обслуживания заявок в СМО-1 и СМО-2.

$P_{12} = 1$  – вероятность перехода заявок в СеМО из СМО -1 в СМО-2.

**Решение.** Расчет показателей работы СеМО методом «граф состояний».

1. Для СеМО, Ф-схема которой дана на Рис.13.4. составляем граф состояний, который приведен на Рис.13.5.

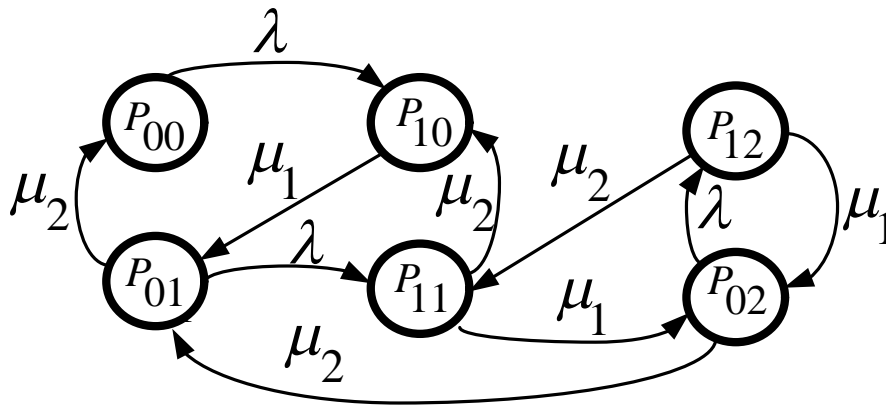


Рис. 13.5 Граф состояний двухфазной СеМО из СМО М/М/1/0 и М/М/1/1

$P_{ij}$  – вероятность, что в СМО-1  $i$ - заявок, а в СМО-2  $j$ - заявок.

2. Составляем систему уравнений (13.5), описывающую связи потоков заявок в СеМО в стационарном режиме её функционирования, решаем её с учетом условия нормировки вероятности этих состояний (13.6).

$$\begin{cases} P_{00} \cdot \lambda = P_{01} \cdot \mu_2 \\ P_{01} \cdot (\lambda + \mu_2) = P_{10} \cdot \mu_1 + P_{02} \cdot \mu_2 \\ P_{10} \cdot \mu_1 = P_{00} \cdot \lambda + P_{11} \cdot \mu_2 \\ P_{11} \cdot (\mu_1 + \mu_2) = P_{01} \cdot \lambda + P_{12} \cdot \mu_2 \\ P_{12} \cdot (\mu_1 + \mu_2) = P_{02} \cdot \lambda \\ P_{02} \cdot (\lambda + \mu_2) = P_{12} \cdot \mu_1 + P_{11} \cdot \mu_1 \end{cases} \quad (13.5)$$

Условие нормировки вероятностей состояний рассматриваемой СеМО имеет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 P_{ij} = 1 \quad (13.6)$$

Согласно исходных данных, имеем:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu = \lambda$

Согласно исходных данных выражения (13.5) упрощается и принимает вид:

$$\begin{cases} P_{00} = P_{01} \\ 2 \cdot P_{01} = P_{10} + P_{02} \\ P_{10} = P_{00} + P_{11} \\ 2 \cdot P_{11} = P_{01} + P_{12} \\ 2 \cdot P_{12} = P_{02} \\ 2 \cdot P_{02} = P_{12} + P_{11} \end{cases} \quad (13.7)$$

Решаем систему уравнений (13.7) с учетом условия (13.6) и получаем значения вероятностей состояний рассматриваемой СеМО в стационарном режиме её работы при заданном наборе исходных данных. Имеем:

$$P_{00} = P_{00}, \quad P_{01} = P_{00}, \quad P_{02} = 0,4P_{00}, \quad P_{10} = 1,6P_{00}, \quad P_{11} = 0,6P_{00}, \quad P_{12} = 0,2P_{00}$$

Поскольку  $\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 P_{ij} = 4,8P_{00} = 1$ , то  $P_{00} = 1/4,8 = 0,20833$

Поэтому имеем:

$$P_{00} = 0,2083, \quad P_{01} = 0,2083, \quad P_{02} = 0,0833, \quad P_{10} = 0,3333, \quad P_{11} = 0,125, \quad P_{12} = 0,0416$$

### 3. Определяем основные показатели работы рассматриваемой СеМО.

Загрузка ОА1 в СМО-1:  $\rho_1 = \lambda / \mu_1 = 1/1 = 1$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-1:

$$P_{отк1} = P_{10} + P_{11} + P_{12} = 0,3333 + 0,125 + 0,0416 = 0,5$$

Интенсивность потока заявок, которым отказано в обслуживании в СМО-1:

$$\lambda_{отк1} = P_{отк1} \cdot \lambda = 0,5 \cdot 1 = 0,5 \text{ 1/час}$$

Интенсивность потока заявок, который поступает в СМО-2:

$$\lambda_2 = \lambda - \lambda_{отк1} = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ 1/час}$$

Загрузка ОА2 в СМО-2:  $\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 0,5/1 = 0,5$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-2:

$$P_{отк2} = P_{02} + P_{12} = 0,0833 + 0,0416 = 0,125$$

Интенсивность потока заявок, которым отказано в обслуживании в СМО-2:

$$\lambda_{отк2} = P_{отк2} \cdot \lambda_2 = 0,125 \cdot 0,5 = 0,0625 \text{ 1/час}$$

Интенсивность потока заявок, который выходит из СМО-2:

$$\lambda_{вых} = \lambda_2 - \lambda_{отк2} = 0,5 - 0,0625 = 0,4375 \text{ 1/час}$$

**Решение.** Расчет показателей работы СеМО методом «подсистем».

В СеМО, Ф-схема которой приведена на Рис.13.4., выделяем две последовательно соединенные подсистемы: подсистема 1 – это СМО-1 и подсистема 2 – это СМО-2. Подсистему 1 представляем в виде СМО М/М/1/0, а подсистему 2 в виде СМО М/М/1/1. Расчет показателей работы этих СМО подробно рассмотрен в главе 8. Расчет проводим по формулам, приведенным в табл. 8.2 и табл.8.4.

Загрузка ОА1 в СМО-1:  $\rho_1 = \lambda / \mu_1 = 1/1 = 1$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-1 при  $\rho_1 = 1$ :

$$P_{отк1} = 1/(m + 2) = 0,5$$

Интенсивность потока заявок, который поступает в СМО-2:

$$\lambda_2 = \lambda - \lambda_{отк1} = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ 1/час}$$

Загрузка ОА2 в СМО-2:  $\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 0,5/1 = 0,5$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-2:

$$P_{отк2} = \frac{(\rho_2^{m+1} - \rho_2^{m+2})}{(1 - \rho_2^{m+2})} = \frac{(\rho_2^2 - \rho_2^3)}{(1 - \rho_2^3)} = \frac{0,25 - 0,125}{(1 - 0,125)} = 0,1428$$

Интенсивность потока заявок, которым отказано в обслуживании в СМО-2:

$$\lambda_{отк2} = P_{отк2} \cdot \lambda_2 = 0,1428 \cdot 0,5 = 0,0714 \text{ 1/час}$$

Интенсивность потока заявок, который выходит из СМО-2:

$$\lambda_{вых} = \lambda_2 - \lambda_{отк2} = 0,5 - 0,0714 = 0,4286 \text{ 1/час}$$

Метод «подсистем» приближенный, поскольку считают, что поток заявок в СМО-2 пуассоновский. Реально он не пуассоновский, но близкий к нему.

Метод «подсистем» по сравнению с методом «граф состояний», при заданных исходных данных, дает:

- увеличение значения  $P_{отк2}$  на 14,2 %;
- увеличение значения  $\lambda_{отк2}$  на 14,2%
- уменьшение значения  $\lambda_{вых}$  на 2,1%

Рассмотрим ещё один типовой вариант СОУ, когда организация её работы представлена в виде Ф-схемы разомкнутой линейной двухфазной СеМО, в которой СМО-1 вида М/М/1/1, а СМО-2 вида М/М/1/0. Ф-схема приведена на Рис.13.6.

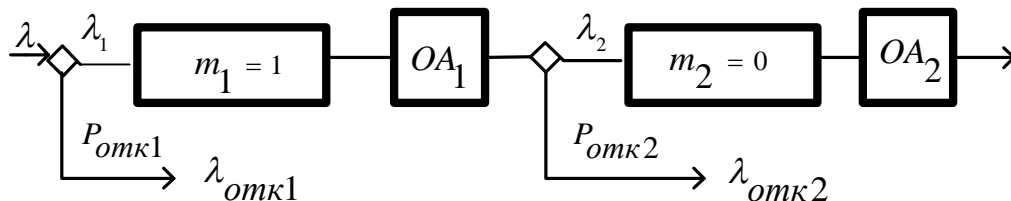


Рис. 13.6 Ф-схема разомкнутой СеМО на основе СМО М/М/1/1 и М/М/1/0

Рассмотрим на примере порядок расчёта основных показателей работы двухфазной СеМО, построенной на основе СМО М/М/1/1 и М/М/1/0 при использовании метода «граф состояний» и метода «подсистем».

### Пример 13.3.

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой приведена на Рис.13.6. в виде Ф-схемы разомкнутой линейной двухфазной СеМО, состоящей из СМО вида М/М/1/1 и М/М/1/0. Входной поток заявок, поступающий в СМО-1, пуассоновский, а обслуживание заявок в СМО-1 и в СМО-2 соответствует экспоненциальному закону. Размеры входных буферов СМО-1 и СМО-2, для приёма поступающих заявок, равны  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0$ .

Необходимо определить показатели работы СеМО методом «граф состояний» и методом «подсистем», и сравнить полученные результаты.

Исходные данные.

$\lambda_{вх} = \lambda = 1$  1/час - интенсивность входного потока заявок в СМО-1.

$\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1$  1/час - интенсивность обслуживания заявок в СМО-1 и СМО-2.

$P_{12} = 1$  - вероятность перехода заявок в СеМО из СМО -1 в СМО-2.

**Решение.** Расчет показателей работы СеМО методом «граф состояний».

1. Для СеМО, Ф-схема которой дана на Рис.13.6. составляем граф состояний, который приведен на Рис.13.7.

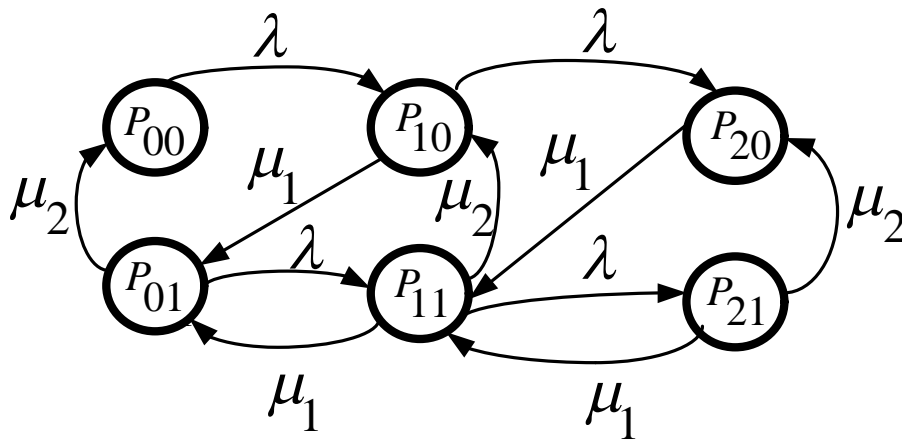


Рис. 13.7 Граф состояний двухфазной СеМО из СМО М/М/1/1 и М/М/1/0

$P_{ij}$  – вероятность, что в СМО-1  $i$ - заявок, а в СМО-2  $j$ - заявок.

2. Составляем систему уравнений (13.8), описывающую связи потоков заявок в СеМО в стационарном режиме её функционирования, решаем её с учетом условия нормировки вероятности этих состояний (13.9).

$$\begin{cases} P_{00} \cdot \lambda = P_{01} \cdot \mu_2 \\ P_{01} \cdot (\lambda + \mu_2) = P_{10} \cdot \mu_1 + P_{11} \cdot \mu_1 \\ P_{10} \cdot (\lambda + \mu_1) = P_{00} \cdot \lambda + P_{11} \cdot \mu_2 \\ P_{11} \cdot (\lambda + \mu_1 + \mu_2) = P_{01} \cdot \lambda + P_{20} \cdot \mu_1 + P_{21} \cdot \mu_1 \\ P_{20} \cdot \mu_1 = P_{10} \cdot \lambda + P_{21} \cdot \mu_2 \\ P_{21} \cdot (\mu_1 + \mu_2) = P_{11} \cdot \lambda \end{cases} \quad (13.8)$$

Условие нормировки вероятностей состояний рассматриваемой СеМО имеет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 P_{ij} = 1 \quad (13.9)$$

Согласно исходных данных, имеем:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu = \lambda$

Согласно исходных данных выражения (13.8) упрощается и принимает вид:

$$\begin{cases} P_{00} = P_{01} \\ 2P_{01} = P_{10} + P_{11} \\ 2P_{10} = P_{00} + P_{11} \\ 3P_{11} = P_{01} + P_{20} + P_{21} \\ P_{20} = P_{10} + P_{21} \\ 2P_{21} = P_{11} \end{cases} \quad (13.10)$$

Решаем систему уравнений (13.10) с учетом условия нормировки и получаем значения вероятностей состояний рассматриваемой СеМО в стационарном режиме её работы при заданном наборе исходных данных. Имеем:

$$P_{00} = P_{00}, \quad P_{01} = P_{00}, \quad P_{10} = P_{00}, \quad P_{11} = P_{00}, \quad P_{20} = 1,5P_{00}, \quad P_{21} = 0,5P_{00}$$

Поскольку  $\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 P_{ij} = 6P_{00} = 1$ , то  $P_{00} = 1/6 = 0,1666$

Поэтому имеем:

$$P_{00} = 0,1666, \quad P_{01} = 0,1666, \quad P_{02} = 0,1666, \quad P_{10} = 0,1666, \quad P_{20} = 0,25, \quad P_{21} = 0,0833$$

3. Определяем основные показатели работы рассматриваемой СеМО.

$$\text{Загрузка ОА1 в СМО-1: } \rho_1 = \lambda / \mu_1 = 1/1 = 1$$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-1:

$$P_{отк1} = P_{20} + P_{21} = 0,25 + 0,0833 = 0,3333$$

Интенсивность потока заявок, которым отказано в обслуживании в СМО-1:

$$\lambda_{отк1} = P_{отк1} \cdot \lambda = 0,3333 \cdot 1 = 0,3333 \text{ 1/час}$$

Интенсивность потока заявок, который поступает в СМО-2:

$$\lambda_2 = \lambda - \lambda_{отк1} = 1 - 0,3333 = 0,6667 \text{ 1/час}$$

$$\text{Загрузка ОА2 в СМО-2: } \rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 0,6667 / 1 = 0,6667$$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-2:

$$P_{отк2} = P_{01} + P_{11} + P_{21} = 0,1666 + 0,1666 + 0,0833 = 0,4165$$

Интенсивность потока заявок, которым отказано в обслуживании в СМО-2:

$$\lambda_{отк2} = P_{отк2} \cdot \lambda_2 = 0,4165 \cdot 0,6667 = 0,2777 \text{ 1/час}$$

Интенсивность потока заявок, который выходит из СМО-2:

$$\lambda_{вых} = \lambda_2 - \lambda_{отк2} = 0,6667 - 0,2777 = 0,389 \text{ 1/час}$$

**Решение.** Расчет показателей работы СеМО методом «подсистем».

В СеМО, Ф-схема которой приведена на Рис.13.4., выделяем две последовательно соединенные подсистемы: подсистема 1 – это СМО-1 и

подсистема 2 – это СМО-2. Подсистему 1 представляем в виде СМО М/М/1/1, а подсистему 2 в виде СМО М/М/1/0. Расчет показателей работы этих СМО подробно рассмотрен в главе 8. Расчет проводим по формулам, приведенным в табл. 8.2 и табл.8.4.

Загрузка ОА1 в СМО-1:  $\rho_1 = \lambda / \mu_1 = 1/1 = 1$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-1 при  $\rho_1 = 1$ :

$$P_{отк1} = 1/(m_1 + 2) = 0,3333$$

Интенсивность потока заявок, который поступает в СМО-2:

$$\lambda_2 = \lambda - \lambda_{отк1} = 1 - 0,3333 = 0,6667 \text{ 1/час}$$

Загрузка ОА2 в СМО-2:  $\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 0,6667 / 1 = 0,6667$

Вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО-2:

$$P_{отк2} = \frac{(\rho_2^{m+1} - \rho_2^{m+2})}{(1 - \rho_2^{m+2})} = \frac{\rho_2}{(1 + \rho_2)} = \frac{0,6667}{1,6667} = 0,4$$

Интенсивность потока заявок, которым отказано в обслуживании в СМО-2:

$$\lambda_{отк2} = P_{отк2} \cdot \lambda_2 = 0,4 \cdot 0,6667 = 0,2667 \text{ 1/час}$$

Интенсивность потока заявок, который выходит из СМО-2:

$$\lambda_{вых} = \lambda_2 - \lambda_{отк2} = 0,6667 - 0,2667 = 0,4 \text{ 1/час}$$

Метод «подсистем» приближенный, поскольку считают, что поток заявок в СМО-2 пуассоновский. Реально он не пуассоновский, но близкий к нему.

Метод «подсистем» по сравнению с методом «граф состояний», при заданных исходных данных, дает:

- уменьшение значения  $P_{отк2}$  на 4 %;
- уменьшение значения  $\lambda_{отк2}$  на 4 %
- увеличение значения  $\lambda_{вых}$  на 2,8 %



## **Часть 4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ ОРГАНИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ВИДЕ ЗАМКНУТЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

### **Глава 14. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сбалансированных сетей массового обслуживания**

#### **14.1. Основные понятия замкнутых сетей массового обслуживания**

Работу СОУ, предназначенную для последовательной и достаточно строго регламентированной обработки фиксированного набора разного вида документов, обычно представляют в виде замкнутых многофазных сетей массового обслуживания, состоящих из набора последовательно соединенных однофазных СМО.

При этом, как правило, известны: количественный состав этих документов, число этапов их обработки, возможные граничные значения времен обработки документов разного вида на этих этапах. Такой набор исходных данных легко позволяет выбрать Ф-схему СеМО, корректно отражающую процесс работы с документами рассматриваемой СОУ.

Формализованное представление режима работы СОУ с документами, в виде замкнутой СеМО, вполне логично и легко объяснимо по следующим причинам:

- замкнутые сети массового обслуживания ( СеМО) представляют собой совокупность СМО, в которых циркулирует постоянное число заявок и отсутствуют внешние источники поступления заявок, что корректно отражает многоэтапный последовательный процесс регламентированной обработки фиксированного набора документов в СОУ;
- заявки циркулируют в СеМО переходя из одной СМО в другую не покидая СеМО, а маршруты движения заявок носят вероятностный характер, что отражает возможный вероятностный процесс обработки документов в СОУ;
- структура замкнутой СеМО отражает работу подразделений СОУ, поскольку каждая СМО отражает работу конкретного подразделения СОУ со всеми присущими ему особенностями работы.

Для задания замкнутой СеМО необходимо иметь:

- список СМО входящих в состав рассматриваемой СеМО ,т.е.  $S_I$  ( $i=1,2 \dots M$ ), где  $M$ - число СМО в составе СеМО;
- количество обслуживающих аппаратов (ОА), т.е.  $(c_i)$ , входящих в состав  $i$ -ой СМО;
- функцию распределения (ф.р.) времени обслуживания заявок в обслуживающем аппарате, входящим в состав  $i$ -ой СМО, задаваемую средним значением времени обслуживания  $(t_i)$  или производительностью  $(\mu_i = 1/t_i)$  и квадратом коэффициента вариации интервалов времени обслуживания  $(v_i^2)$  ;
- количество заявок, циркулирующих в СеМО , т.е. значение  $N$  ;
- матрицу вероятности передач заявок между отдельными СМО, входящими в состав СеМО, отражающую порядок обработки информационных потоков запросов в сети, т.е.  $r_{ij}$  ( $i = 1,2 \dots M; j = 1,2 \dots M$ ).

Элемент матрицы  $r_{ij}$  задает вероятность, с которой заявка после окончания обслуживания в  $i$ -ой СМО поступает на обслуживание в  $j$ -ю СМО. При этом имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^M r_{ij} = 1 \quad i = 1,2 \dots M$$

Для упрощения проведения анализа СОУ рассматриваемого типа и большой размерности, на ранних этапах их создания или модернизации и реорганизации, работу СОУ обычно представляют в виде Ф-схемы замкнутой многофазной сбалансированной марковской СеМО, в которой времена обработки заявок в отдельных СМО распределены по экспоненциальному закону и загрузки всех СМО одинаковые.

Рассмотрим более подробно наиболее важные методы, которые используют при разработке аналитических моделей замкнутых сбалансированных СеМО для оценки основных характеристик их функционирования.

## 14.2. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сбалансированных СеМО на основе метода «граф состояний»

Рассмотрим порядок разработки аналитических моделей анализа замкнутых марковских многофазных СеМО методом «граф состояний», на примере двухфазной одноканальной СеМО

Ф-схема замкнутой двухфазной СеМО, которая состоит из двух одноканальных СМО, соединенных последовательно, приведена на Рис.14.1

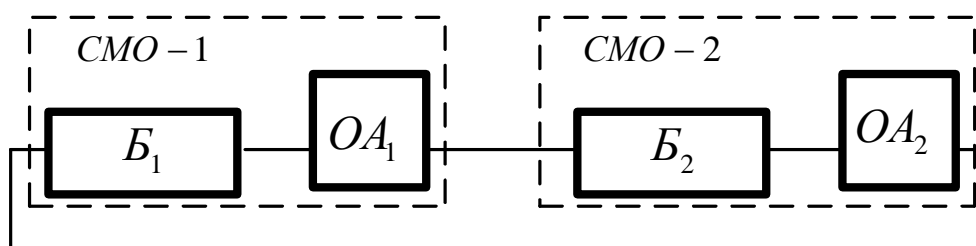


Рис.14.1 Ф-схема замкнутой двухфазной СеМО

В схеме используются следующие обозначения:

$B_1$  – буфер имитирующий очередь заявок на обслуживание в СМО-1;

$OA_1$  - обслуживающий аппарат имитирующий обработку заявок в СМО-1;

$B_2$  – буфер имитирующий очередь заявок на обслуживание в СМО-2;

$OA_2$  - обслуживающий аппарат имитирующий обработку заявок в СМО-2;

1. Для СеМО, Ф-схема которой дана на Рис.14.1. составляем граф состояний, который приведен на Рис.14.2.

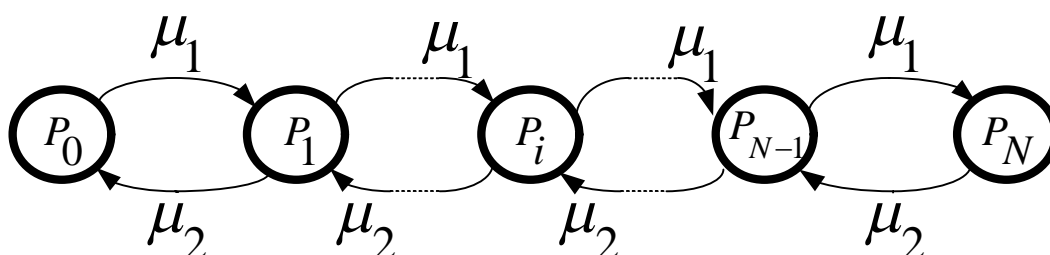


Рис.14.Граф состояний замкнутой двухфазной СеМО

В схеме «граф состояний» СеМО используем следующие обозначения

$N$  – число заявок циркулирующих в замкнутой СеМО.

$P_0$  – вероятность того, что в СМО-1  $N$  заявок, а в СМО-2 заявок нет.

$P_1$  – вероятность того, что в СМО1 ( $N-1$ ) заявок, а в СМО-2 одна заявка.



$$P_i = \alpha^i \cdot P_0 = \frac{\alpha^i - \alpha^{i+1}}{1 - \alpha^{N+1}} \quad (14.7)$$

3. Определяем основные показатели работы рассматриваемой СеМО.

Коэффициенты простоя и использования ОА  $i$ -ой СМО, связанные следующим соотношением:

$$U_i = 1 - \gamma_i \quad (14.8)$$

Где:  $\gamma_i$  – коэффициент простоя ОА  $i$ -ой СМО

$U_i$  – коэффициент использования ОА  $i$ -ой СМО.

Для СМО-1 и СМО-2 их соответственно определяют из следующих формул:

$$\gamma_1 = P_N = \frac{\alpha^N - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha^{N+1}} \quad (14.9)$$

$$U_1 = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha^{N+1}} \quad (14.10)$$

$$\gamma_2 = P_0 = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha^{N+1}} \quad (14.11)$$

$$U_2 = \frac{\alpha - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha^{N+1}} \quad (14.12)$$

Среднее число заявок в очереди СМО-1 и СМО-2 определяют по формулам:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^N (i-1) \cdot P_{N-i} \quad (14.13)$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^N (i-1) \cdot P_i \quad (14.14)$$

Среднее число заявок в СМО-1 и СМО-2 ( в очереди и на обслуживании):

$$L_1 = \sum_{i=1}^N i \cdot P_{N-i} \quad (14.15)$$

$$L_2 = \sum_{i=1}^N i \cdot P_i \quad (14.16)$$

Для определения времени ожидания заявок в очереди СМО-2 учитываем, что состояние  $P_N$  произойти не может, поэтому нужно нормировать вероятности. Подобную нормировку вероятностей состояний следует провести для СМО-1.

$$P_0/(1 - P_N) + P_1/(1 - P_N) + \dots + P_{N-1}/(1 - P_N) = 1$$

Среднее время ожиданий заявок в очереди в СМО-1 и СМО-2 соответственно определяют по формулам:

$$W_1 = p_0 \cdot t_1 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} i \cdot \alpha^{N-i} / (1 - P_0) \quad (14.17)$$

$$W_2 = p_0 \cdot t_2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} i \cdot \alpha^i / (1 - P_N) \quad (14.18)$$

Из этих формул получаем :

$$W_1 / t_1 + W_2 / t_2 = N - 1 \quad (14.19)$$

Следует иметь в виду , что

$$T_1 = W_1 + t_1 \quad , \quad (14.20)$$

$$T_2 = W_2 + t_2 \quad (14.21)$$

На основании формул (14.19) – (14.21) получаем:

$$T_1 / t_1 + T_2 / t_2 = N + 1 \quad (14.22)$$

Где:  $T_1$  – время пребывания заявок в СМО-1 (в очереди и на обслуживании).

$T_2$  – время пребывания заявок в СМО-2 (в очереди и на обслуживании)

Для частного случая, когда рассматриваемая двухфазная СеМО является сбалансированной, т. е.  $\mu_1 = \mu_2$ , ( $t_1 = t_2 = t$ ) и  $\alpha = 1$ , показатели работы СМО-1 и СМО-2 имеют одинаковые значения. Формулы (14.9) – (14.21) существенно упрощаются и принимают следующий вид:

- вероятности состояний СМО (все вероятности состояний равны):

$$P_i = \frac{1}{N+1} \quad \text{где: } i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (14.23)$$

- коэффициенты простоя и использования ОА СМО-1 и СМО-2:

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{N+1} \quad (14.24)$$

$$U = U_1 = U_2 = \frac{N}{N+1} \quad (14.25)$$

- среднее число заявок в очереди и в СМО для СМО-1 и СМО-2:

$$Q = Q_1 = Q_2 = \frac{N \cdot (N-1)}{2 \cdot (N+1)} \quad (14.26)$$

$$L = L_1 = L_2 = \frac{N}{2} \quad (14.27)$$

- среднее время нахождения заявок в очереди СМО-1 или СМО-2:

$$W = W_1 = W_2 = \frac{(N-1) \cdot t}{2} \quad (14.28)$$

- среднее время пребывания заявок в СМО-1 или СМО-2:

$$T = T_1 = T_2 = \frac{(N+1) \cdot t}{2} \quad (14.29)$$

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО

$$T_u = 2 \cdot T = (N+1) \cdot t \quad (14.30)$$

### Пример 14.1

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой двухфазной СеМО, приведенной на Рис. 14.1.

СеМО состоит из двух СМО (СМО-1 и СМО-2), в которых времена обслуживания заявок подчинены экспоненциальному закону с параметрами  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  1/час. В СеМО циркулируют четыре заявки т.е.  $N = 4$ .

Исходные данные. Число СМО в составе СеМО  $M=2$ ;

Число заявок, циркулирующих в СеМО  $N=4$ ;

Производительности ОА СМО-1 и ОА СМО-2  $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1$  1/час

Решению

1. Определяем соотношение производительности СМО-1 и СМО-2

$$\alpha = \mu_1 / \mu_2 = 1/1 = 1$$

Поскольку  $\alpha = 1$ , то двухфазная СеМО является сбалансированной и показатели работы СМО-1 и СМО-2 одинаковые.

2. Используем формулы (14.23) – (14.30) и определяем показатели работы рассматриваемой сбалансированной СеМО и входящих в неё СМО-1 и СМО-2.

- определяем средние значения времен обработки заявок в каждой СМО

$$t_1 = 1/\mu_1 = 1 \text{ час}, \quad t_2 = 1/\mu_2 = 1 \text{ час}$$

- определяем вероятность простоя ОА в каждой СМО

$$\gamma = P_0 = P_N \frac{1}{N+1} = \frac{1}{4+1} = 0,2$$

- определяем коэффициент использования ОА в каждой СМО

$$U_1 = U_2 = \frac{N}{N+1} = \frac{4}{4+1} = 0,8$$

- определяем среднее число заявок в очереди каждой СМО

$$Q_1 = Q_2 = \frac{N \cdot (N-1)}{2 \cdot (N+1)} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot (4+1)} = 1,2$$

- определяем среднее число заявок в каждой СМО

$$L_1 = L_2 = N/2 = 2$$

- определяем среднее время нахождения заявок в очереди каждой СМО

$$W_1 = W_2 = \frac{(N-1) \cdot t}{2} = \frac{(4-1) \cdot 1}{2} = 1,5 \text{ час}$$

- определяем среднее время пребывания заявок в каждой СМО

$$T_1 = T_2 = \frac{(N+1) \cdot t}{2} = \frac{(4+1) \cdot 1}{2} = 2,5 \text{ час}$$

- определяем среднее время цикла обработки заявок в СеМО

$$T_u = 2 \cdot T = (N+1) \cdot t = (4+1) \cdot 1 = 5 \text{ час}$$

### 14.3. Аналитические модели СОУ в виде замкнутой сбалансированной СеМО на основе комбинаторного анализа

Рассмотрим данный принцип разработки аналитических моделей СеМО на примере замкнутой многофазной линейной одноканальной сбалансированной СеМО, приведённой на Рис,14,3. СеМО состоит из М последовательно соединённых одноканальных СМО и в ней циркулирует N заявок. Поскольку СеМО сбалансированная, то загрузка ОА во всех СМО одинаковая.

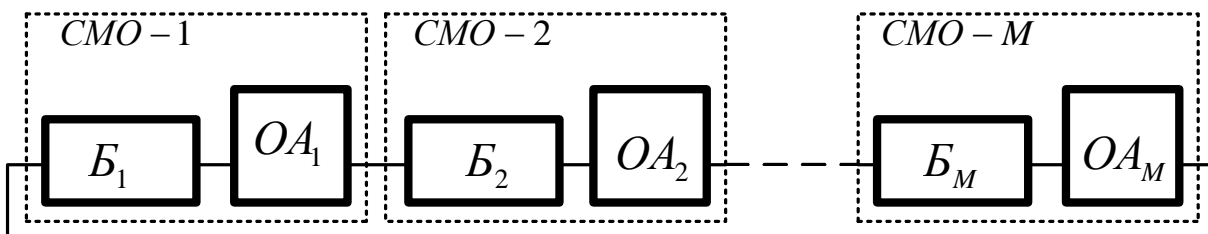


Рис. 14.3 Ф-схема замкнутой многофазной линейной одноканальной СеМО.

Пусть  $t_i$  – среднее время обработки заявок в ОА i-ой СМО. Тогда для рассматриваемой СеМО имеем  $t_1 = t_i = t_K = t$ ,



$\mu_I = \mu_i = \mu_K$  где  $\mu_i$  - интенсивность обслуживания заявок в  $i$ -ой СМО.

Рассмотрим порядок расчета основных показателей работы замкнутой сбалансированной СеМО методом комбинаторного анализа.

1. Определяют число состояний, в которых может находиться СеМО, когда  $N$  заявок распределяются по  $M$  СМО, по следующей формуле:

$$S = C_{N+M-1}^{M-1} = \frac{(N+M-1)!}{N!(M-1)!} \quad (14.31)$$

2. Поскольку все состояния равновероятны, то вероятность нахождения сбалансированной СеМО в любом состоянии равна  $P = 1/S$

3. Определяют число состояний, при которых  $N$  заявок распределяются по  $(M-1)$  СМО, т.е. когда только в одной из СМО отсутствуют заявки, по формуле:

$$S_0 = C_{N+M-2}^{M-2} = \frac{(N+M-2)!}{N!(M-2)!} \quad (14.32)$$

4. Определяют коэффициент простоя ОА СМО по следующей формуле:

$$\gamma = \frac{S_0}{S} = \frac{C_{N+M-2}^{M-2}}{C_{N+M-1}^{M-1}} = \frac{M-1}{N+M-1} \quad (14.33)$$

5. Определяют коэффициент использования ОА СМО по формуле:

$$U = 1 - \gamma = \frac{N}{N+M-1} \quad (14.34)$$

6. Среднее число заявок, находящихся в СМО (в очереди и на обслуживании) определяют по формуле :

$$L = N / K \quad (14.35)$$

7. Среднее число заявок в очереди к ОА СМО определяют по формуле :

$$Q = L - U = \frac{N}{M} - \frac{N}{N+M-1} = \frac{N \cdot (N-1)}{M \cdot (N+M-1)} \quad (14.36)$$

8. Среднее время ожидания заявок в очереди к ОА СМО (согласно формуле Литтла) определяют по формуле:

$$W = \frac{Q}{\lambda} = \frac{Q}{\mu \cdot U} = \frac{N-1}{M \cdot \mu} = \frac{(N-1) \cdot t}{M} \quad (14.37)$$

где:  $\lambda$  – интенсивность потока заявок, циркулирующих в СеМО:

$$\lambda = \mu \cdot U$$

9. Среднее время пребывания заявок в СМО (в очереди и на обслуживании) определяют по формуле:

$$T = W + t = \frac{(N + M - 1) \cdot t}{M} \quad (14.38)$$

10. Среднее время цикла обработки заявок в СеМО, т.е. среднее время их пребывания во всех СМО, определяют по формуле:

$$T_{\text{ц}} = M \cdot T = (N + M - 1) \cdot t \quad (14.39)$$

### Пример 14.2.

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой многофазной СеМО, приведенной на Рис. 14.3.

СеМО состоит из двух СМО (СМО-1 и СМО-2), в которых времена обслуживания заявок подчинены экспоненциальному закону с параметрами  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  1/час. В СеМО циркулируют четыре заявки т.е.  $N = 4$ .

Исходные данные.

Дана двухфазная СеМО, состоящая из двух одинаковых СМО с экспоненциальными временами обслуживания заявок

$M = 2$  - количество СМО в составе СеМО.

$N = 4$  - количество заявок в СеМО.

$t_1 = t_2 = t = 1$  час - среднее время обработки заявок в ОА СМО-1 и ОА СМО-2.

Решение.

Поскольку СеМО сбалансированная (имеет две одинаковые СМО), то показатели её работы можно определить формулам (14.33) –(14.39).

- коэффициенты простоя обслуживающих аппаратов в СМО-1 и СМО-2:

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{M - 1}{N + M - 1} = \frac{2 - 1}{4 + 2 - 1} = 0,2$$

-коэффициенты использования обслуживающих аппаратов в СМО-1 и СМО-2:

$$U = U_1 = U_2 = 1 - \gamma = \frac{N}{N + M - 1} = \frac{4}{4 + 2 - 1} = 0,8$$

- число заявок, находящихся в очереди и на обслуживании в СМО-1 и СМО-2:

$$L = N / M = 4 / 2 = 2$$

- число заявок в очереди СМО-1 и СМО-2:

$$Q = L - U = 2 - 0,8 = 1,2$$

- среднее время ожидания заявок в очереди СМО-1 и СМО-2:

$$W = \frac{Q}{\lambda} = \frac{(N-1) \cdot t_o}{M} = \frac{(4-1) \cdot 1}{2} = 1,5 \text{ час}$$

- среднее время пребывания заявок в СМО-1 и СМО-2:

$$T = W + t = \frac{(N+K-1) \cdot t_o}{K} = \frac{(4+2-1) \cdot 1}{2} = 2,5 \text{ час}$$

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО, т.е. в обеих СМО.

$$T_u = M \cdot T = (N+M-1) \cdot t = (4+2-1) \cdot 1 = 5 \text{ час}$$

#### 14.4 Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сбалансированных СеМО на основе метода эквивалентного преобразования

Основу метода эквивалентного преобразования представляет такая замена замкнутой СеМО разомкнутой СеМО, при которой обе СеМО в стационарном режиме работы имеют одинаковые основные показатели функционирования.

Рассмотрим применение метода эквивалентного преобразования на примере разработки аналитической модели для анализа замкнутой многофазной линейной сбалансированной марковской СеМО, Ф-схема которой приведена на Рис.14.4.

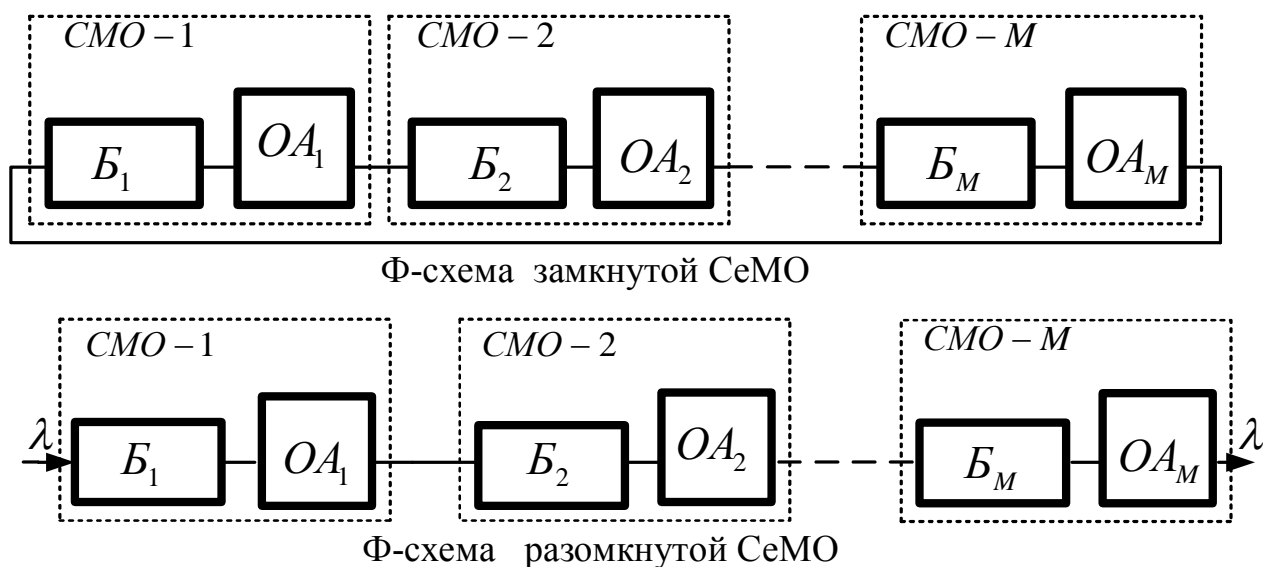


Рис. 14.4 Ф-схемы многофазной линейной одноканальной СеМО.

Рассмотрим принцип расчета основных показателей работы замкнутой сбалансированной марковской СМО методом эквивалентного преобразования

1. Определяют интенсивность потока заявок в замкнутой СМО, которая должна быть равна интенсивности потока заявок в разомкнутой СМО.

$$\lambda = \frac{N}{T_{\text{ц}}} = \frac{N}{M \cdot T} \quad (14.40)$$

Где:  $N$  - число заявок циркулирующих в замкнутой СМО

$M$  - число одинаковых СМО в составе линейной СМО

$T$  - среднее время пребывания заявок в одной СМО в составе СМО

2. Определяют интенсивность фонового потока заявок в замкнутой СМО, который, создают  $(N-1)$  заявка. Согласно теореме Райзера стационарные вероятности состояний замкнутой стохастической сети с  $N$  заявками в момент поступления заявки в  $i$ -ый узел сети совпадают со стационарными вероятностями состояний этой же сети с  $(N-1)$  заявками для произвольного момента времени.

$$\lambda_{\phi} = \frac{N-1}{T_{\text{ц}}} = \frac{N-1}{M \cdot T} \quad (14.41)$$

3. Получают формулу для оценки среднего времени пребывания заявок в марковской СМО вида  $M/M/1$  в составе разомкнутой СМО с учётом эквивалентного преобразования замкнутой СМО в разомкнутую.

$$T = \frac{t_0}{1 - \rho_{\phi}} = \frac{t_0}{1 - \lambda_{\phi} \cdot t_0} \quad (14.42)$$

4. Подставляют выражение (14.41) в (14.42), решают полученное уравнение относительно среднего времени пребывания заявок в СМО ( $T$ ) и получают:

$$T = \frac{(N + M - 1) \cdot t_0}{M} \quad (14.43)$$

Рассмотрим порядок расчета основных показателей работы замкнутой сбалансированной марковской СМО методом эквивалентного преобразования

1. Определяют среднее время пребывания заявок в СМО по формуле (14.43).

2. Определяют среднее время пребывания заявок в очереди СМО

$$W = T - t_o = \frac{(N-1) \cdot t_o}{M} \quad (14.44)$$

3. Определяют интенсивность потока заявок в СеМО, подставляя выражение (14.43) в (14.40). Получаем:

$$\lambda = \frac{N}{M \cdot T} = \frac{N}{(N+M-1) \cdot t_o} \quad (14.45)$$

4. Определяют коэффициент загрузки (использования) ОА СМО

$$U = \lambda \cdot t_o = \frac{N}{(N+M-1)} \quad (14.46)$$

5. Определяют коэффициент простоя ОА СМО

$$\gamma = 1 - U = 1 - \frac{N}{(N+M-1)} = \frac{M-1}{(N+M-1)} \quad (14.47)$$

6. Определяют среднее число заявок в СМО

$$L = N / M \quad (14.48)$$

7. Определяют среднее число заявок в очереди СМО

$$Q = L - U = \frac{N}{M} - \frac{N}{N+M-1} = \frac{N \cdot (N-1)}{M \cdot (N+M-1)} \quad (14.49)$$

8. Определяют среднее время цикла обработки заявок в СеМО.

$$T_u = M \cdot T = (N+M-1) \cdot t_o \quad (14.50)$$

### Пример 14.3.

Определить методом эквивалентного преобразования показатели функционирования СОУ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой многофазной СеМО, приведенной на Рис. 14.4. СеМО состоит из двух СМО (СМО-1 и СМО-2), в которых времена обслуживания заявок подчинены экспоненциальному закону с параметрами  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  1/час. В СеМО циркулируют четыре заявки т.е.  $N = 4$ .

Исходные данные.

СеМО с экспоненциальными временами обслуживания заявок в СМО.

$M = 2$  - количество СМО в составе СеМО.

$N = 4$  - количество заявок, циркулирующих в СеМО.

$t_1 = t_2 = t_o = 1$  час - среднее время обработки заявок в ОА СМО-1 и ОА СМО-2.

Решение.

Поскольку СеМО сбалансированная (имеет две одинаковые СМО), то показатели её работы можно определить формулам (14.43) –(14.50).

- среднее время пребывания заявок в СМО:

$$T = \frac{(N + M - 1) \cdot t_0}{M} = \frac{(4 + 2 - 1) \cdot 1}{2} = 2,5 \text{ час}$$

- среднее время пребывания заявок в очереди СМО

$$W = T - t_0 = 2,5 - 1 = 1,5 \text{ час}$$

- интенсивность потока заявок в СеМО

$$\lambda = \frac{N}{M \cdot T} = \frac{4}{2 \cdot 2,5} = 0,8 \text{ 1/час}$$

- коэффициент загрузки (использования) ОА СМО

$$U = \lambda \cdot t_0 = 0,8 \cdot 1 = 0,8 \text{ 1/час} \quad ( -$$

- коэффициент простоя ОА СМО

$$\gamma = 1 - U = 1 - 0,8 = 0,2$$

- среднее число заявок в СМО

$$L = N / M = 4 / 2 = 2$$

- среднее число заявок в очереди СМО

$$Q = L - U = 2 - 0,8 = 1,2$$

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО.

$$T_{\text{ц}} = M \cdot T = 2 \cdot 2,5 = 5 \text{ час}$$

## Глава 15. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сетей массового обслуживания на основе рекуррентного метода Базена

### 15.1. Основные понятия рекуррентного метода Базена.

Для оценки нормирующей константы и основных показателей работы замкнутых СеМО, состоящих из СМО с экспоненциальными временами обработки заявок, Базен (Buzen J.P.) предложил рекуррентный метод.

Для практического использования этого метода Ф-схема замкнутой СеМО, отражающая работу исследуемой СОУ, должна иметь следующий набор исходных данных:

- $M$  - число СМО, входящих в состава СеМО,  $m = 1, 2, \dots, M$ ;
- $c_m$  - число ОА, входящих в состав  $m$ -ой СМО;
- $N$  - число заявок, циркулирующих в СеМО:
- $t_m$  - среднее значение времени обработки заявок в  $m$ -ой СМО;
- $P_{ij}$  - вероятность перехода заявок из  $i$ -ой СМО в  $j$ -ую СМО.

Метод включает три этапа.

Этап 1. Построение Ф-схемы СеМО, отражающей работу исследуемой СОУ, и расчет, на основе заданного набора исходных данных, численных значений коэффициентов  $x_m$ , учитывающих структурно-временные параметры  $m$ -ой СМО в составе СеМО. Значения коэффициентов  $x_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) определяют по формуле:

$$x_m = \frac{t_m}{t_1} \cdot P_{1m} \cdot x_1 \quad (15.1)$$

Где  $x_1 = 1$  - коэффициент первой СМО, базовой СМО.

$t_m$  - среднее время обработки заявок в ОА  $m$ -ой СМО.

$t_1$  - среднее время обработки заявок в первой СМО, базовой СМО..

$P_{1m}$  - вероятность перехода заявок из первой СМО в  $m$ -ую СМО.

$c_m$  - число ОА в составе  $m$ -ой СМО.

**Этап 2.** Построение таблицы численных значений коэффициентов  $g(n,m)$ , используя рекуррентный способ их расчёта, при этом число строк таблицы  $n=1,2...N$ , а число столбцов таблицы  $m=1,2...M$ . Каждый столбец таблицы соответствует конкретной СМО в составе СеМО. Для нормализации вычислений первый столбец и первую строку таблицы заполняют единицами.

$$g(n,1) = g(0,m) = 1 \quad \text{где: } n=1,2...N, m=1,2...M. \quad (15.2)$$

Таблица коэффициентов  $g(n,m)$  имеет вид, приведённый в табл.15.1.

Таблица 15.1

Таблица коэффициентов  $g(n,m)$

Число заявок $n$	Число СМО в составе СеМО $m=1,2,...M$					
	1	.....	$m$	.....	$M-1$	$M$
0	1	1	1	1	1	1
1	1					
2	1					
.....	1					
$n$	1		$g(n,m)$			
.....	1					
$N-1$	1					$G(N-1)$
$N$	1					$G(N)$

Клетки таблицы коэффициентов  $g(n,m)$  последовательно заполняют числами, вычисленными по следующей формуле:

$$g(n,m) = g(n,m-1) + \frac{X_m}{A_m} \left[ g(n-1,m) + \sum_{k=0}^{A_m-2} \left( \frac{A_m-k-1}{k+1} \right) \cdot Z_m(k) \cdot g(n-k-1,m-1) \right] \quad (15.3)$$

Где:  $Z_m(k) = \begin{cases} X_m^k / k! & \text{если } 0 \leq k \leq A_m \\ X_m^k / (A_m! \cdot A_m^{k-A_m}) & \text{если } k \geq A_m \end{cases} \quad (15.4)$

$A_m = c_m$  - число идентичных ОА в  $m$ -ой СМО, входящей в СеМО.

Каждый столбец таблицы коэффициентов  $g(n,m)$  соответствует конкретной  $m$ -ой СМО и его заполняют, согласно выражению (15.3), с учетом параметров  $A_m$  и  $X_m$ , соответствующих  $m$ -ой СМО.

Расчеты, проведённые с использованием выражения (15.3) для ряда СМО, наиболее широко применяемых на практике, позволили существенно упростить формулы вычисления коэффициентов  $g(n,m)$  для этих СМО.



Для одноканальных СМО, когда  $A_m = c_m = 1$ , кроме СМО-1, коэффициенты  $g(n, m)$  вычисляют по следующей формуле:

$$g(n, m) = g(n, m-1) + x_m \cdot g(n-1, m) \quad (15.5)$$

Для двухканальных СМО, когда  $A_m = c_m = 2$ , коэффициенты  $g(n, m)$  вычисляют по следующей формуле:

$$g(n, m) = g(n, m-1) + \frac{x_m}{2} \cdot [ g(n-1, m) + g(n-1, m-1) ] \quad (15.6)$$

Для трёхканальных СМО, когда  $A_m = c_m = 3$ , коэффициенты  $g(n, m)$  вычисляют по следующей формуле:

$$g(n, m) = g(n, m-1) + \frac{x_m}{3} \cdot g(n-1, m) + \frac{2x_m}{3} \cdot g(n-1, m-1) + \frac{x_m^2}{6} \cdot g(n-2, m-1) \quad (15.7)$$

Наглядные схемы процесса вычисления коэффициентов  $g(n, m)$  для одноканальных, двухканальных и трёхканальных СМО, входящих в состав рассматриваемых СеМО, приведены на Рис.15.1- Рис. 15.3.

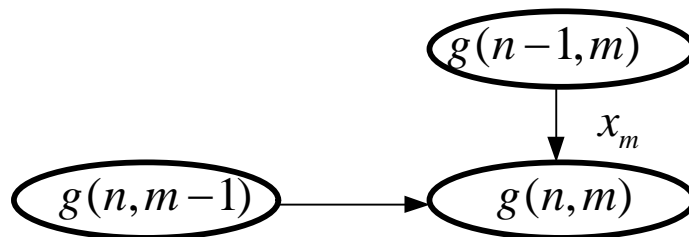


Рис.15.1 Схема вычисления коэффициентов  $g(n, m)$  для одноканальных СМО в составе СеМО

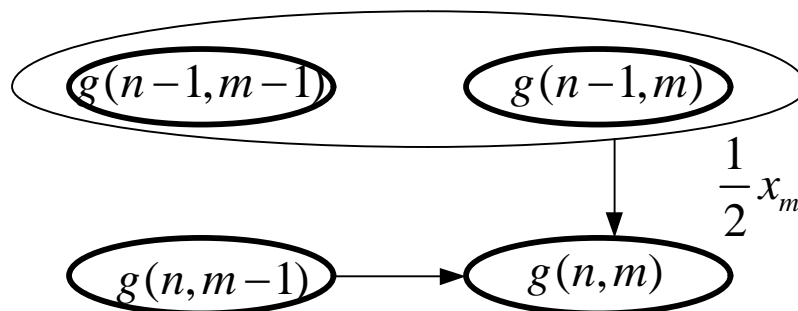


Рис.15.2 Схема вычисления коэффициентов  $g(n, m)$  для двухканальных СМО в составе СеМО.

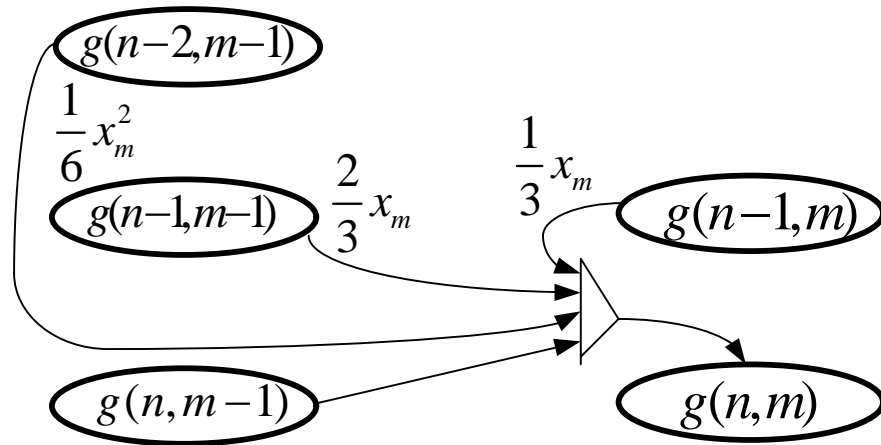


Рис.15.3 Схема вычисления коэффициентов  $g(n, m)$  для трёхканальных СМО в составе СеМО

После заполнения таблицы коэффициентами  $g(n, m)$ , переходят к следующему этапу. Для упрощения записи последующих вычислений вводят и используют следующие обозначения:

$g(N-1, M)$  соответствует  $G(N-1)$   
 $g(N, M)$  соответствует  $G(N)$

Этап 3. Расчёт показателей функционирования СеМО и каждой СМО, входящей в её состав. При анализе СеМО, состоящих из одноканальных СМО, последовательно вычисляют:

- коэффициент загрузки (использования) ОА СМО-1.

$$\rho_1 = U_1 = \frac{G(N-1)}{G(N)} \quad (15.8)$$

- коэффициенты загрузки ОА остальных СМО в составе СеМО:

$$\rho_m = \rho_1 \cdot x_m, \quad m = 2 \dots M \quad (15.9)$$

- среднее число заявок в  $m$ -той СМО (в очереди и на обслуживании):

$$L_m = \sum_{k=1}^N (x_m)^k \cdot \frac{G(N-k)}{G(N)} \quad m = 1, 2 \dots M \quad (15.10)$$

- среднее число заявок в очереди  $m$ -ой СМО:

$$Q_m = L_m - \rho_m \quad (15.11)$$

- среднее время цикла заявок в СеМО:

$$T_u = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1} \quad (15.12)$$

- интенсивность потока заявок в СеМО:

$$\lambda = N / T_u \quad (15.13)$$

- среднее время ожидания заявок в очереди m-ой СМО:

$$W_m = Q_m / \lambda \quad (15.14)$$

- среднее время пребывания заявок в m-ой СМО:

$$T_m = L_m / \lambda \quad (15.15)$$

Ф-схема замкнутой трёхфазной одноканальной СеМО, отображающая работу СОУ с последовательной регламентированной обработкой фиксированного набора документов, приведена на Рис.15.4.

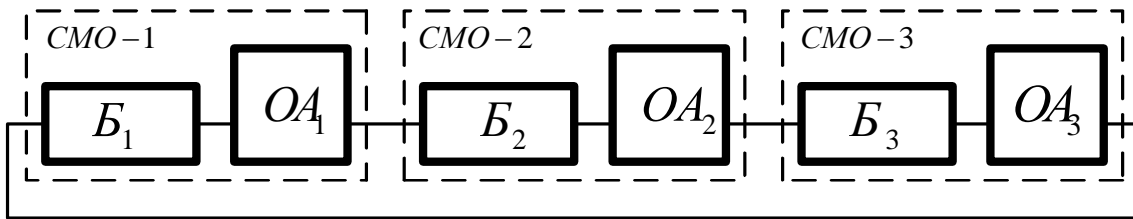


Рис. 15.4. Ф-схема замкнутой трёхфазной одноканальной СеМО.

### Пример 15.1

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой трёхфазной СеМО, приведенной на Рис. 15.4.

СеМО состоит из трёх СМО (СМО-1, СМО-2 и СМО-3), в которых времена обслуживания заявок подчинены экспоненциальному закону с параметрами  $t_1 = t_2 = t_3 = t = 1$  час. В СеМО циркулируют четыре заявки т.е.  $N = 4$ .

Исходные данные. Число СМО в составе СеМО:  $M=3$ .

Число заявок, циркулирующих в СеМО:  $N=4$ .

Средние значения времени обработки заявок в обслуживающих аппаратах СМО-1, СМО-2 и СМО-3 соответственно равны  $t_1 = t_2 = t_3 = t = 1$  час.

Решение.

Вычисляем значения коэффициентов  $x_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) по формуле (15.1):

$$x_m = \frac{t_m}{t_1} \cdot P_{1m} \cdot x_1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = x_3 = \frac{1}{1} \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Составляем таблицу коэффициентов  $g(n,m)$ , согласно формул (15.2) и (15.5), и представляем её в виде табл.15.2

Таблица 15.2

Таблица коэффициентов  $g(n,m)$  к примеру 15.1

n	m=1	m=2	m=3
	$x_1 = 1$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1$
0	1	1	1
1	1	2	3
2	1	3	6
3	1	4	10
4	1	5	15

После заполнения таблицы  $g(n,m)$ , расчет показателей работы СеМО и СМО-1, СМО-2 и СМО-3, входящих в её состав, последовательно проводим по формулам (15.8)- (15.15).

- коэффициенты загрузки ОА СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$\rho_1 = \frac{G(N-1)}{G(N)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0,667 \quad \rho_2 = \rho_1 \cdot x_2 = 0,667 \quad \rho_3 = \rho_1 \cdot x_3 = 0,667$$

- среднее число заявок в каждой СМО:

$$L_m = \sum_{k=1}^N \binom{X_m}{k} \cdot \frac{G(N-k)}{G(N)} \quad L_1 = \frac{10+6+3+1}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} = 1,333$$

$$L_2 = L_3 = \frac{10+6+3+1}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} = 1,333$$

- среднее число заявок в очереди каждой СМО:

$$Q_1 = L_1 - \rho_1 = 1,333 - 0,667 = 0,667$$

$$Q_2 = L_2 - \rho_2 = 1,333 - 0,667 = 0,667 \quad Q_3 = L_3 - \rho_3 = 1,333 - 0,667 = 0,667$$

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО:

$$T_{\text{ц}} = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1} = \frac{4 \cdot 1}{2/3} = 6 \text{ час}$$

- интенсивность потока заявок в СеМО:

$$\lambda = N / T_{\text{ц}} = 4 / 6 = 0,667 \text{ 1/час}$$

- среднее время ожидания заявок в очереди каждой СМО:

$$W_1 = Q_1 / \lambda = 0,667 / 0,667 = 1 \text{ час}$$

$$W_2 = Q_2 / \lambda = 0,667 / 0,667 = 1 \text{ час} \quad W_3 = Q_3 / \lambda = 0,667 / 0,667 = 1 \text{ час}$$

- среднее время пребывания заявок в каждой СМО:

$$T_1 = L_1 / \lambda = 1,333 / 0.667 = 2 \text{ час}$$

$$T_2 = L_2 / \lambda = 1,333 / 0.667 = 2 \text{ час} \quad T_3 = L_3 / \lambda = 1,333 / 0.667 = 2 \text{ час}$$

### Пример 15.2

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой трёхфазной СеМО, приведенной на Рис. 15.4.

СеМО состоит из трёх СМО (СМО-1, СМО-2 и СМО-3), в которых времена обслуживания заявок подчинены экспоненциальному закону с параметрами

$t_1 = 1 \text{ час}$  .  $t_2 = 2 \text{ час}$  ,  $t_3 = 3 \text{ час}$  В СеМО циркулируют четыре заявки т.е.  $N = 4$  .

Исходные данные. Число СМО в составе СеМО:  $M=3$ .

Число заявок, циркулирующих в СеМО:  $N=4$ .

Средние значения времени обработки заявок в обслуживающих аппаратах СМО-1, СМО-2 и СМО-3 соответственно равны:  $t_1 = 1 \text{ час}$  .  $t_2 = 2 \text{ час}$  ,  $t_3 = 3 \text{ час}$  .

Решение.

Вычисляем значения коэффициентов  $x_m$  ( $m=1,2,3$ ) по формуле (15.1):

$$x_m = \frac{t_m}{t_1} \cdot P_{1m} \cdot x_1, \quad X_1 = 1, \quad x_2 = \frac{2}{1} \cdot 1 \cdot 1 = 2, \quad x_3 = \frac{3}{1} \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

Составляем таблицу коэффициентов  $g(n,m)$ , согласно формул (15.2) и (15.5), и представляем её в виде табл.15.3

Таблица 15.3

Таблица коэффициентов  $g(n,m)$  к примеру 15.2

n	m=1	m=2	m=3
	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
0	1	1	1
1	1	3	6
2	1	7	25
3	1	15	90
4	1	31	301

После заполнения таблицы  $g(n,m)$ , расчет показателей работы СеМО и СМО-1, СМО-2 и СМО-3, входящих в её состав, последовательно проводим по формулам (15.8)- (15.15).

- коэффициенты загрузки ОА СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$p_1 = \frac{G(N-1)}{G(N)} = \frac{90}{301} \approx 0,3 \quad p_2 = \rho_1 \cdot x_2 \approx 0,6 \quad p_3 = \rho_1 \cdot x_3 \approx 0,9$$

- среднее число заявок в каждой СМО:

$$L_m = \sum_{k=1}^N \binom{X_m}{k} \cdot \frac{G(N-k)}{G(N)} \quad L_1 = \frac{90+25+6+1}{301} = \frac{122}{301} = 0,405$$

$$L_2 = \frac{90 \cdot 2 + 25 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4}{301} = \frac{344}{301} = 1,143$$

$$L_3 = \frac{90 \cdot 3 + 25 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4}{301} = \frac{738}{301} = 2,452$$

- среднее число заявок в очереди каждой СМО:

$$Q_1 = L_1 - \rho_1 = 0,405 - 0,3 = 0,105$$

$$Q_2 = L_2 - \rho_2 = 1,143 - 0,6 = 0,543$$

$$Q_3 = L_3 - \rho_3 = 2,452 - 0,9 = 1,552$$

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО:

$$T_u = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1} = \frac{4 \cdot 1}{0,3} = 13,333 \text{ час}$$

- интенсивность потока заявок в СеМО:

$$\lambda = N / T_u = 4 / 13,333 = 0,3 \text{ 1/час}$$

- среднее время ожидания заявок в очереди каждой СМО:

$$W_1 = Q_1 / \lambda = 0,105 / 0,3 = 0,35 \text{ час}$$

$$W_2 = Q_2 / \lambda = 0,543 / 0,3 = 1,81 \text{ час}$$

$$W_3 = Q_3 / \lambda = 1,552 / 0,3 = 5,173 \text{ час}$$

- среднее время пребывания заявок в каждой СМО:

$$T_1 = L_1 / \lambda = 0,405 / 0,3 = 1,35 \text{ час}$$

$$T_2 = L_2 / \lambda = 1,143 / 0,3 = 3,81 \text{ час}$$

$$T_3 = L_3 / \lambda = 2,452 / 0,3 = 8,173 \text{ час}$$

## 15.2. Анализ СеМО, состоящих из одно и двухканальных СМО, рекуррентным методом Базена.

Типовая Ф-схема замкнутой СеМО, состоящая из одноканальной СМО-1 и двухканальной СМО-2 приведена на Рис.15.5.

СМО-2 содержит два идентичных ОА. Время обслуживания заявок в СМО-1 и СМО-2 подчинено экспоненциальному закону.

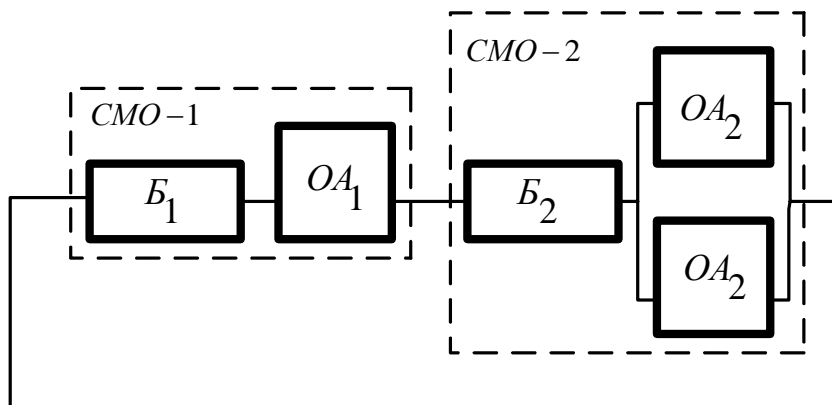


Рис. 15.5. Ф-схема замкнутой двухфазной СеМО

Рассмотрим этапы анализа СеМО, состоящих из одноканальных и двухканальных СМО.

Этап 1. Построение Ф-схемы СеМО, отражающей работу исследуемой СОУ, и расчет, на основе заданного набора исходных данных, численных значений коэффициентов  $x_m$ , учитывающих структурно-временные параметры  $m$ -ой СМО в составе СеМО. Значения коэффициентов  $x_m$  ( $m=1,2,\dots,M$ ) определяют по формуле (15.1).

Этап 2. Построение таблицы численных значений коэффициентов  $g(n,m)$ , число строк таблицы  $n=1,2,\dots,N$ , а число столбцов таблицы  $m=1,2,\dots,M$ . Каждый столбец таблицы соответствует конкретной СМО в составе СеМО. Для нормализации вычислений первый столбец и первую строку таблицы заполняют единицами.

$$g(n,1) = g(0,m) = 1 \quad \text{где: } n=1,2,\dots,N, \quad m=1,2,\dots,M. \quad (15.2).$$

Для одноканальных СМО, кроме СМО-1, коэффициенты  $g(n,m)$  вычисляют по формуле (15.5), а для двухканальных СМО по формуле (15.6).

Таблица коэффициентов  $g(n,m)$  имеет вид, приведённый ранее в табл.15.1.

После полного заполнения этой таблицы переходят к этапу 3..

Этап 3. Расчёт показателей функционирования СеМО и каждой СМО, входящей в её состав.

Для расчёта показателей работы одноканальных СМО в составе СеМО последовательно используют ранее приведённые формулы (15.8) – (15.15).

Для расчёта показателей работы двухканальных СМО в составе СеМО используют следующие формулы и последовательно вычисляют:

- коэффициент загрузки (использования) ОА СМО-1.

$$\rho_1 = U_1 = \frac{G(N-1)}{G(N)} \quad (15.8)$$

- коэффициенты загрузки ОА двухканальных  $m$ -ых СМО:

$$\rho_m = \rho_1 \cdot x_m / 2, \quad m = 2 \dots M \quad (15.16)$$

Где:  $\rho_1$  - коэффициент загрузки ОА одноканальной СМО-1.

$$\rho_1 = \frac{G(N-1)}{G(N)}$$

- среднее число заявок в  $m$ -той двухканальной СМО (в очереди и на обслуживании):

$$L_m = \sum_{k=1}^N \left( \frac{x_m}{2} \right)^k \cdot \frac{G(N-k, m-1) + G(N-k)}{G(N)} \quad (15.17)$$

- среднее число заявок в очереди  $m$ -той двухканальной СМО:

$$Q_m = L_m - 2 \cdot \rho_m \quad (15.18)$$

- среднее время цикла заявок в СеМО:

$$T_u = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1} \quad (15.19)$$

- интенсивность потока заявок в СеМО:

$$\lambda = N / T_u \quad (15.20)$$

- среднее время ожидания заявок в очереди  $m$ -ой двухканальной СМО:

$$W_m = Q_m / \lambda \quad (15.21)$$

- среднее время пребывания заявок в  $m$ -ой двухканальной СМО:

$$T_m = L_m / \lambda \quad (15.22)$$

### Пример 15.3

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой двухфазной СеМО, приведенной на Рис. 15.5.

СеМО состоит из двух СМО (СМО-1 и СМО-2). СМО-1 одноканальная, а



СМО-2 двухканальная. Времена обслуживания заявок в СМО-1 и СМО-2 подчинены экспоненциальному закону с параметрами  $t_1 = 1$  час,  $t_2 = 2$  час. В СеМО циркулируют четыре заявки.

Исходные данные. Число СМО в составе СеМО:  $M=2$ .

СМО-1 одноканальная, СМО-2 двухканальная.

Число заявок, циркулирующих в СеМО:  $N=4$ .

Средние значения времени обработки заявок в обслуживающих аппаратах СМО-1 и СМО-2 соответственно равны  $t_1 = 1$  час,  $t_2 = 2$  час.

Вероятность перехода заявок из СМО-1 в СМО-2 равна  $P_{12} = 1$

Решение.

Вычисляем значения коэффициентов  $x_m$  ( $m=1,2$ ) по формуле (15.1):

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{t_2}{t_1} \cdot P_{12} \cdot x_1 = \frac{2}{1} \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

Составляем таблицу коэффициентов  $g(n,m)$ , согласно формул (15.2) и (15.6), и представляем её в виде табл.15.4

Таблица 15.4

Таблица коэффициентов  $g(n,m)$  к примеру 15.3

Значения n	СМО-1	СМО-2
	m=1	m=2
	одноканальная	двухканальная
	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$
0	1	1
1	1	3
2	1	5
3	1	7
4	1	9

После заполнения таблицы  $g(n,m)$ , расчёт показателей работы СМО-1 проводим по формулам (15.8) - (15.15), а расчёт показателей работы СМО-2 по формулам (15.16) – (15.22). Последовательно вычисляем:

- коэффициенты загрузки ОА СМО-1 и ОА СМО-2:

$$p_1 = \frac{G(N-1)}{G(N)} = \frac{7}{9} = 0,777 \quad p_2 = \rho_1 \cdot x_2 / 2 = 0,777$$

- среднее число заявок в СМО-1 и СМО-2 соответственно:

$$L_1 = \sum_{k=1}^4 \left( X_1 \right)^k \cdot \frac{G(N-k)}{G(N)} = 1 \cdot \frac{7+5+3+1}{9} = \frac{16}{9}$$

$$L_2 = \sum_{k=1}^4 \left( \frac{x_m}{2} \right)^k \cdot \frac{G(N-k, m-1) + G(N-k)}{G(N)} = 1 \cdot \frac{(1+7) + (1+5) + (1+3) + (1+1)}{9} = \frac{20}{9}$$

- среднее число заявок в очереди СМО-1 и СМО-2:

$$Q_1 = L_1 - \rho_1 = \frac{16}{9} - \frac{7}{9} = 1$$

$$Q_2 = L_2 - \rho_2 = \frac{20}{9} - 2 \cdot \frac{7}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО:

$$T_{\text{ц}} = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1} = \frac{4 \cdot 1}{7/9} = \frac{36}{7} = 5,143 \text{ час}$$

- интенсивность потока заявок в СеМО:

$$\lambda = N / T_{\text{ц}} = \frac{4}{36/7} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9} = 0,777 \text{ 1/час}$$

- среднее время ожидания заявок в очереди СМО-1 и СМО-2:

$$W_1 = \frac{Q_1}{\lambda} = \frac{1 \cdot 9}{7} = \frac{9}{7} = 1,286 \text{ час}$$

$$W_2 = \frac{Q_2}{\lambda} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 7} = \frac{6}{7} = 0,857 \text{ час}$$

- среднее время пребывания заявок в СМО-1 и СМО-2:

$$T_1 = \frac{L_1}{\lambda} = \frac{16 \cdot 9}{9 \cdot 7} = \frac{16}{7} = 2,286 \text{ час}$$

$$T_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{20 \cdot 9}{9 \cdot 7} = \frac{20}{7} = 2,857 \text{ час}$$

Рассмотрим анализ СОУ, Ф-схемы которых представляют в виде замкнутых трёхфазных СеМО, содержащих двухканальные СМО.

Ф-схема замкнутой трёхфазной СеМО, содержащая одну двухканальную СМО, приведена на Рис.15.6, а Ф-схема СеМО с двумя двухканальными СМО приведена на Рис.15.7.

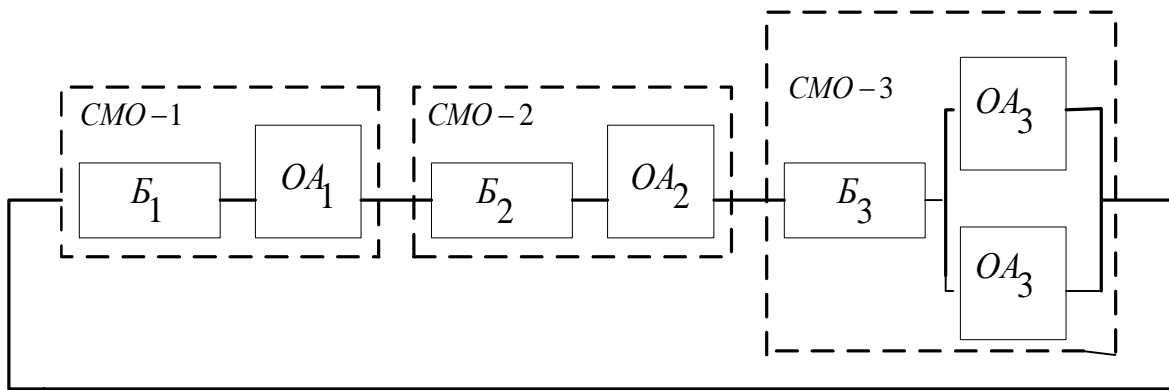


Рис.15.6. Ф-схема замкнутой трёхфазной СеМО с одной двухканальной СМО

### Пример 15.4

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой трёхфазной СеМО, приведенной на Рис. 15.6.

СеМО состоит из трёх СМО: СМО-1 и СМО-2 одноканальные, а СМО-3 двухканальная. Времена обслуживания заявок во всех СМО подчинены экспоненциальному закону с параметрами  $t_1 = 1 \text{ час}$ ,  $t_2 = 1 \text{ час}$  и  $t_3 = 2 \text{ час}$ . В СеМО циркулируют четыре заявки.

Исходные данные. Число СМО в составе СеМО:  $M=3$ .

СМО-1 и СМО-2 одноканальные, СМО-3 двухканальная.

Число заявок, циркулирующих в СеМО:  $N=4$ .

Средние значения времени обработки заявок в обслуживающих аппаратах СМО-1, СМО-2 и СМО-3 соответственно равны  $t_1 = 1 \text{ час}$ ,  $t_2 = 1 \text{ час}$ ,  $t_3 = 2 \text{ час}$

Потерь заявок в СеМО нет, поэтому вероятности перехода потока заявок из СМО-1 в СМО-2 и далее в СМО-3 равны  $P_{12} = 1$ ,  $P_{13} = 1$

Решение.

Вычисляем значения коэффициентов  $x_m$  ( $m=1,2$ ) по формуле (15.1):

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{t_2}{t_1} \cdot P_{12} \cdot x_1 = \frac{1}{1} \cdot 1 \cdot 1 = 1, \quad x_3 = \frac{t_3}{t_1} \cdot P_{13} \cdot x_1 = \frac{2}{1} \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

Составляем таблицу коэффициентов  $g(n,m)$  согласно формул (15.2), (15.5) и (15.6), представляем её в виде табл.15.5

Таблица 15.5

Таблица коэффициентов  $g(n, m)$  к примеру 15.4

Значения n	СМО-1 m=1	СМО-2 m=2	СМО-3 m=3
	одноканальная	одноканальная	двухканальная
	$x_1 = 1$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	9
3	1	4	16
4	1	5	25

После заполнения таблицы  $g(n, m)$ , расчёт показателей работы СМО-1 и СМО-2 проводим по формулам (15.8) - (15.15), а расчёт показателей работы СМО-3 по формулам (15.16) – (15.22). Последовательно вычисляем:

- коэффициенты загрузки ОА СМО-1, ОА СМО-2 и ОА СМО-3:

$$\rho_1 = \frac{G(N-1)}{G(N)} = \frac{7}{9} = 0,777 \quad , \quad \rho_2 = \rho_1 \cdot x_2 = 0,777 \quad , \quad \rho_3 = \rho_1 \cdot x_3 / 2 = 0,777$$

- среднее число заявок в СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$L_1 = \sum_{k=1}^4 (x_1)^k \cdot \frac{G(N-k)}{G(N)} = 1 \cdot \frac{16+9+4+1}{25} = \frac{30}{25} = 1,2$$

$$L_2 = \sum_{k=1}^4 (x_2)^k \cdot \frac{G(N-k)}{G(N)} = 1 \cdot \frac{16+9+4+1}{25} = \frac{30}{25} = 1,2$$

$$L_3 = \sum_{k=1}^4 \left( \frac{x_3}{2} \right)^k \cdot \frac{G(N-k, m-1) + G(N-k)}{G(N)} = 1 \cdot \frac{(16+4) + (9+3) + (4+2) + (1+1)}{25} = \frac{40}{25} = 1,6$$

- среднее число заявок в очереди СМО-1 и СМО-2:

$$Q_1 = L_1 - \rho_1 = 1,2 - 0,777 = 0,423$$

$$Q_2 = L_2 - \rho_2 = 1,2 - 0,777 = 0,423$$

$$Q_3 = L_3 - 2 \cdot \rho_3 = 1,6 - 2 \cdot 0,777 = 0,046$$

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО:

$$T_{ц} = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1} = \frac{4 \cdot 1}{0,777} = 5,148 \text{ час}$$

- интенсивность потока заявок в СеМО:

$$\lambda = N / T_{ц} = \frac{4}{5,148} = 0,777 \text{ 1/час}$$

- среднее время ожидания заявок в очереди СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$W_1 = \frac{Q_1}{\lambda} = \frac{0,423}{0,777} = 0,544 \text{ час}$$

$$W_2 = \frac{Q_2}{\lambda} = \frac{0,423}{0,777} = 0,544 \text{ час}$$

$$W_3 = \frac{Q_3}{\lambda} = \frac{0,046}{0,777} = 0,059 \text{ час}$$

- среднее время пребывания заявок в СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$T_1 = \frac{L_1}{\lambda} = \frac{1,2}{0,777} = 1,544 \text{ час}$$

$$T_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{1,2}{0,777} = 1,544 \text{ час}$$

$$T_3 = \frac{L_3}{\lambda} = \frac{1,6}{0,777} = 2,059 \text{ час}$$

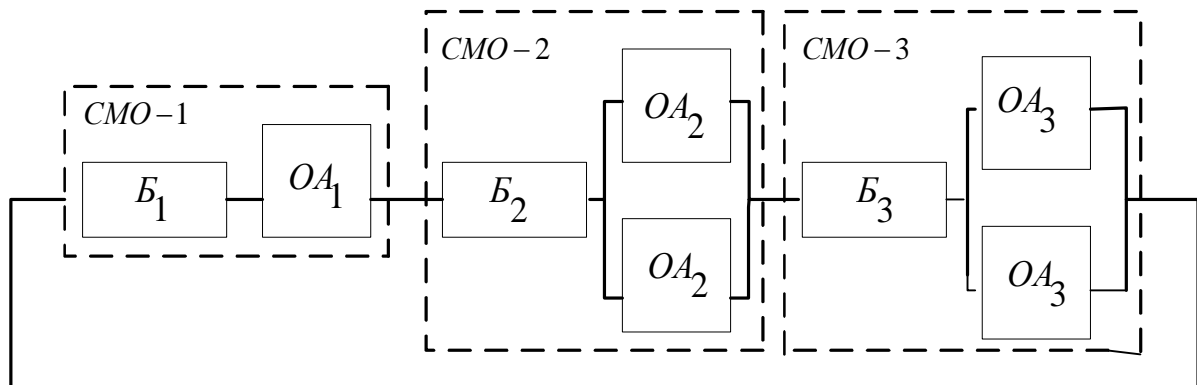


Рис.15.7 Ф-схема замкнутой трёхфазной СеМО с двумя двухканальными СМО

### Пример 15.5

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой трёхфазной СеМО, приведенной на Рис. 15.7.

СеМО состоит из трёх СМО: СМО-1 одноканальная, а СМО-2 и СМО-3 двухканальные. Времена обслуживания заявок во всех СМО подчинены экспоненциальному закону с параметрами  $t_1 = 1 \text{ час}$ ,  $t_2 = 2 \text{ час}$  и  $t_3 = 4 \text{ час}$ .

В СеМО циркулируют четыре заявки.

Исходные данные. Число СМО в составе СеМО:  $M=3$ .

СМО-1 одноканальная, СМО-2 и СМО-3 двухканальные.

Число заявок, циркулирующих в СеМО:  $N=4$ .

Средние значения времени обработки заявок в обслуживающих аппаратах СМО-1, СМО-2 и СМО-3 соответственно равны  $t_1 = 1$  час,  $t_2 = 2$  час и  $t_3 = 4$  час

Потерь заявок в СеМО нет, поэтому вероятности перехода потока заявок из СМО-1 в СМО-2 и далее в СМО-3 равны  $P_{12} = 1$ ,  $P_{13} = 1$

Решение.

Вычисляем значения коэффициентов  $x_m$  ( $m=1,2$ ) по формуле (15.1):

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{t_2}{t_1} \cdot P_{12} \cdot x_1 = \frac{2}{1} \cdot 1 \cdot 1 = 2, \quad x_3 = \frac{t_3}{t_1} \cdot P_{13} \cdot x_1 = \frac{4}{1} \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

Составляем таблицу коэффициентов  $g(n,m)$  согласно формул (15.2), (15.5) и (15.6), представляем её в виде табл.15.6 и табл.15.7.

При составлении таблицы коэффициентов  $g(n,m)$  для СеМО, состоящей из двухканальных СМО следует соблюдать следующие правила:

- число столбцов таблицы должно быть равно числу СМО в составе СеМО;
- каждый столбец таблицы должен соответствовать конкретной СМО;
- если двухканальные СМО в составе СеМО имеют одинаковые значения коэффициента  $x_m$ , то составляют только одну таблицу коэффициентов  $g(n,m)$ ;
- если двухканальные СМО в составе СеМО имеют разные значения коэффициента  $x_m$ , то составляют столько таблиц коэффициентов  $g(n,m)$ , чтобы СМО с разными значениями этого коэффициента обязательно соответствовал последний столбец таблицы коэффициентов. Последний столбец таблицы обязательно должен соответствовать той СМО, число заявок в которой определяют.

Поскольку в рассматриваемом примере для двухканальной СМО-2 коэффициент  $x_2 = 2$ , а для двухканальной СМО-3 коэффициент  $x_3 = 4$ , то составляем две таблицы коэффициентов, меняя в них СМО-2 и СМО-3 местами. В табл.15.6 последний столбец соответствует СМО-3, а в табл. 15.7

последний столбец соответствует СМО-2. Последние столбцы в этих таблицах одинаковые, поэтому для одноканальных СМО расчет показателей их работы можно проводить по любой таблице.

Расчёт среднего числа заявок в СМО-3 проводим по табл.15.6, а расчет среднего числа заявок в СМО-2 проводим по табл.15.7.

Таблица 15.6

Таблица коэффициентов  $g(n,m)$  к примеру 15.5

Значения n	СМО-1	СМО-2	СМО-3
	m=1	m=2	m=3
	одноканальная	двухканальная	двухканальная
	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 4$
0	1	1	1
1	1	3	7
2	1	5	25
3	1	7	67
4	1	9	157

Таблица 15.7

Таблица коэффициентов  $g(n,m)$  к примеру 15.5

Значения n	СМО-1	СМО-3	СМО-2
	m=1	m=3	m=2
	одноканальная	двухканальная	двухканальная
	$x_1 = 1$	$x_2 = 4$	$x_3 = 2$
0	1	1	1
1	1	5	7
2	1	13	25
3	1	29	67
4	1	61	157

После заполнения таблицы  $g(n,m)$ , расчёт показателей работы СМО-1 проводим по формулам (15.8) - (15.15), а расчёт показателей работы СМО-2 и СМО-3 по формулам (15.16) – (15.22). Последовательно вычисляем:

- коэффициенты загрузки ОА СМО-1, ОА СМО-2 и ОА СМО-3:

$$\cdot p_1 = \frac{G(N-1)}{G(N)} = \frac{67}{157} = 0,427 \quad , \quad p_2 = \rho_1 \cdot x_2 / 2 = 0,427 \quad , \quad p_3 = \rho_1 \cdot x_3 / 2 = 0,854$$

- среднее число заявок в СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$L_1 = \sum_{k=1}^4 (x_1)^k \cdot \frac{G(N-k)}{G(N)} = 1 \cdot \frac{67+25+7+1}{157} = \frac{100}{157} = 0,637$$

$$L_2 = \sum_{k=1}^4 \left(\frac{x_2}{2}\right)^k \cdot \frac{G(N-k, m-1) + G(N-k)}{G(N)} =$$

$$1 \cdot \frac{(29+67) + (13+25) + (5+7) + (1+1)}{157} = \frac{148}{157} = 0,943$$

$$L_3 = \sum_{k=1}^4 \left(\frac{x_3}{2}\right)^k \cdot \frac{G(N-k, m-1) + G(N-k)}{G(N)} =$$

$$\frac{2 \cdot (7+67) + 2^2 \cdot (5+25) + 2^3 \cdot (3+7) + 2^4 \cdot (1+1)}{157} = \frac{380}{157} = 2,420$$

Проверка  $\sum_{i=1}^3 L_i = \frac{100 + 148 + 380}{157} = \frac{628}{157} = 4$

- среднее число заявок в очереди СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$Q_1 = L_1 - \rho_1 = 0,637 - 0,427 = 0,21$$

$$Q_2 = L_2 - 2 \cdot \rho_2 = 0,943 - 2 \cdot 0,427 = 0,089$$

$$Q_3 = L_3 - 2 \cdot \rho_3 = 2,42 - 2 \cdot 0,854 = 0,712$$

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО:

$$T_{\text{ц}} = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1} = \frac{4 \cdot 1}{0,427} = 9,368 \text{ час}$$

- интенсивность потока заявок в СеМО:

$$\lambda = \frac{N}{T_{\text{ц}}} = \frac{4}{9,368} = 0,427 \text{ 1/час}$$

- среднее время ожидания заявок в очереди СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$W_1 = \frac{Q_1}{\lambda} = \frac{0,21}{0,427} = 0,492 \text{ час}$$

$$W_2 = \frac{Q_2}{\lambda} = \frac{0,089}{0,427} = 0,208 \text{ час}$$

$$W_3 = \frac{Q_3}{\lambda} = \frac{0,712}{0,427} = 1,667 \text{ час}$$

- среднее время пребывания заявок в СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$T_1 = \frac{L_1}{\lambda} = \frac{0,637}{0,427} = 1,492 \text{ час}$$

$$T_2 = \frac{L_2}{\lambda} = \frac{0,943}{0,427} = 2,208 \text{ час}$$



$$T_3 = \frac{L_3}{\lambda} = \frac{2,42}{0,427} = 5,667 \text{ час}$$

### 15.3. Анализ разветвлённых СеМО рекуррентным методом Базена.

Работа СОУ развитой структуры может быть представлена в виде Ф-схемы разветвлённой СеМО, приведённой на Рис.15.8.

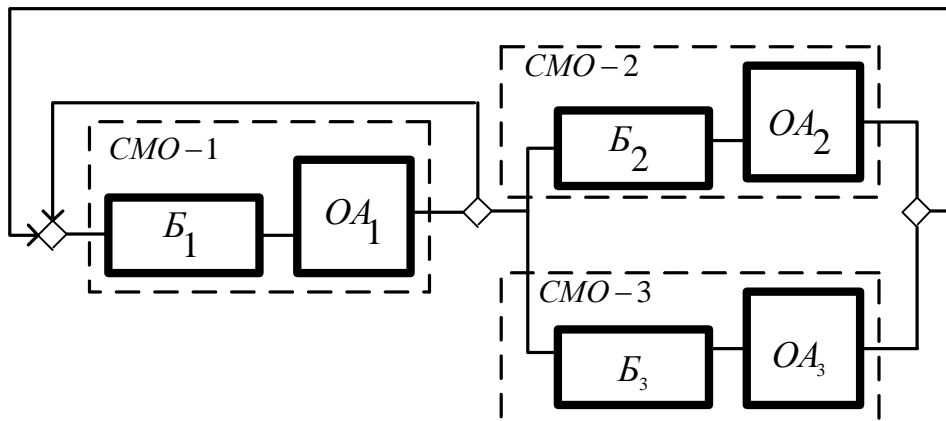


Рис.15.8 Ф-схема замкнутой разветвлённой СеМО.

Рассмотрим основные особенности анализа разветвлённых СеМО с использованием рекуррентного метода Базена.

#### Пример 15.6

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой разветвлённой СеМО, приведенной на Рис. 15.8.

СеМО состоит из трёх одноканальных СМО. Времена обслуживания заявок во всех СМО подчинены экспоненциальному закону с параметрами  $t_1 = 1 \text{ час}$ ,  $t_2 = 2 \text{ час}$  и  $t_3 = 4 \text{ час}$ . В СеМО циркулируют четыре заявки.

Исходные данные. Число СМО в составе СеМО:  $M=3$ .

Все СМО одноканальные. Число заявок, циркулирующих в СеМО:  $N=4$ .

Средние значения времени обработки заявок в ОА СМО-1, СМО-2 и СМО-3 соответственно равны  $t_1 = 1 \text{ час}$ ,  $t_2 = 2,5 \text{ час}$  и  $t_3 = 4 \text{ час}$

Вероятности перехода потока заявок из одной СМО в другую СМО равны:

$$P_{11} = 0,1 \quad , \quad P_{12} = 0,4 \quad , \quad P_{13} = 0,5$$

Решение.

Вычисляем значения коэффициентов  $x_m$  ( $m=1,2$ ) по формуле (15.1):

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{t_2}{t_1} \cdot P_{12} \cdot x_1 = \frac{2,5}{1} \cdot 0,4 \cdot 1 = 1, \quad x_3 = \frac{t_3}{t_1} \cdot P_{13} \cdot x_1 = \frac{4}{1} \cdot 0,5 \cdot 1 = 2$$

Составляем таблицу коэффициентов  $g(n,m)$  согласно формул (15.2) и (15.5), представляем её в виде табл.15.8.

Таблица 15.8  
Таблица коэффициентов  $g(n,m)$  к примеру 15.6

Значения n	СМО-1	СМО-2	СМО-3
	m=1	m=2	m=3
	одноканальная	одноканальная	одноканальная
	$x_1 = 1$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	11
3	1	4	26
4	1	5	57

После заполнения таблицы  $g(n,m)$ , расчёт показателей работы всех СМО проводим по формулам (15.8) - (15.15). Последовательно вычисляем:

- коэффициенты загрузки ОА СМО-1, ОА СМО-2 и ОА СМО-3:

$$p_1 = \frac{G(N-1)}{G(N)} = \frac{26}{57} = 0,456, \quad p_2 = \rho_1 \cdot x_2 = 0,456, \quad p_3 = \rho_1 \cdot x_3 = 0,912$$

- среднее число заявок в СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$L_1 = \sum_{k=1}^4 (x_1)^k \cdot \frac{G(N-k)}{G(N)} = 1 \cdot \frac{26+11+4+1}{57} = \frac{42}{57} = 0,737$$

$$L_2 = \sum_{k=1}^4 (x_2)^k \cdot \frac{G(N-k)}{G(N)} = 1 \cdot \frac{26+11+4+1}{57} = \frac{42}{57} = 0,737$$

$$L_3 = \sum_{k=1}^4 (x_3)^k \cdot \frac{G(N-k)}{G(N)} = \frac{2 \cdot 26 + 2^2 \cdot 11 + 2^3 \cdot 4 + 2^4 \cdot 1}{57} = \frac{144}{57} = 2,526$$

Проверка  $\sum_{i=1}^3 L_i = \frac{42 + 42 + 144}{57} = \frac{228}{57} = 4$

- среднее число заявок в очереди СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$Q_1 = L_1 - \rho_1 = 0,737 - 0,456 = 0,281$$

$$Q_2 = L_2 - \rho_2 = 0,737 - 0,456 = 0,281$$

$$Q_3 = L_3 - \rho_3 = 2,526 - 0,912 = 1,614$$

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО:

$$T_u = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1} = \frac{4 \cdot 1}{0,456} = 8,772 \text{ час}$$

- интенсивность потока заявок в СеМО (на входе СМО-1):

$$\lambda = \frac{N}{T_u} = \frac{4}{8,772} = 0,456 \text{ 1/час}$$

- интенсивность потока заявок с выхода СМО-1 на её вход:

$$\lambda_{11} = \lambda \cdot p_{11} = 0,456 \cdot 0,1 = 0,0456 \text{ 1/час}$$

- интенсивность потока заявок с выхода СМО-1 на вход:СМО-2:

$$\lambda_2 = \lambda \cdot p_{12} = 0,456 \cdot 0,4 = 0,1824 \text{ 1/час}$$

- интенсивность потока заявок с выхода СМО-1 на вход:СМО-3:

$$\lambda_3 = \lambda \cdot p_{13} = 0,456 \cdot 0,5 = 0,2280 \text{ 1/час}$$

- среднее время ожидания заявок в очереди СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$W_1 = \frac{Q_1}{\lambda} = \frac{0,281}{0,456} = 0,62 \text{ час}$$

$$W_2 = \frac{Q_2}{\lambda_2} = \frac{0,281}{0,182} = 1,54 \text{ час}$$

$$W_3 = \frac{Q_3}{\lambda_3} = \frac{1,614}{0,228} = 7,08 \text{ час}$$

- среднее время пребывания заявок в СМО-1, СМО-2 и СМО-3:

$$T_1 = \frac{L_1}{\lambda} = \frac{0,737}{0,456} = 1,62 \text{ час}$$

$$T_2 = \frac{L_2}{\lambda_2} = \frac{0,737}{0,1824} = 4,04 \text{ час}$$

$$T_3 = \frac{L_3}{\lambda} = \frac{2,526}{0,228} = 11,08 \text{ час}$$

$$\text{Проверка } T_u = T_1 + p_{12} \cdot T_2 + p_{13} \cdot T_3 = 1,62 + 0,4 \cdot 4,04 + 0,5 \cdot 11,08 = 8,775 \text{ час}$$

## Глава 16. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сетей массового обслуживания на основе метода фонового потока

Трудоёмкость разработки точных моделей СОУ в виде замкнутых СеМО привела к необходимости использования приближённых методов для построения простых и удобных для практического использования моделей СОУ, с приемлемой инженерной погрешностью.

Ф-схема трёхфазной СеМО, отображающая работу типовой СОУ, приведена на Рис.16.1.

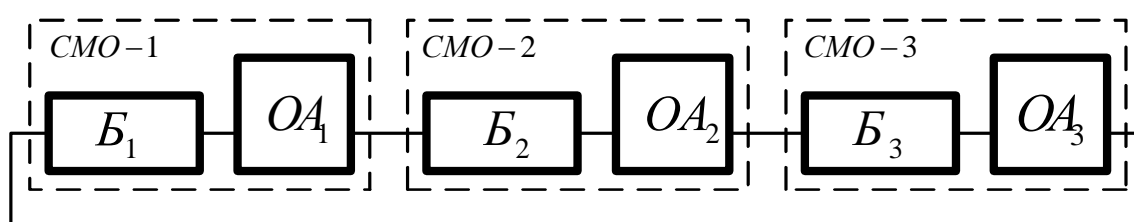


Рис.16.1 Ф-схема замкнутой линейной трёхфазной СеМО.

Для приближённой оценки основных показателей работы замкнутых СеМО обычно используют следующие методы:

- метод фонового потока;
- метод подсистем;
- метод узкого места.

Исходные данные, необходимые для разработки моделей СеМО с использованием этих методов, рассмотрены в главе 14 (параграф 14.1).

Рассмотрим практическое использование метода фонового потока при разработке моделей СОУ.

### 16.1. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых линейных СеМО на основе метода фонового потока

В замкнутых СеМО основной поток заявок на обслуживание к ОА СМО создается всеми заявками, а фоновый поток заявок создается всеми заявками, кроме одной, базовой заявки, поэтому справедливы следующие выражения:

$$\lambda = \frac{N}{T_u} \quad (16.1)$$

$$\lambda_{\phi} = \frac{(N-1)}{T_u} \quad (16.2)$$

Если считать, что через СМО-1 проходит весь поток заявок, то через  $m$ -ую СМО проходит поток заявок, определяемый следующими выражениями:

$$\lambda_m = p_{1m} \cdot \lambda \quad (16.3)$$

$$\lambda_{\phi m} = p_{1m} \cdot \lambda_{\phi} \quad (16.4)$$

Где:  $p_{1m}$  - вероятность перехода заявок из СМО-1 в  $m$ -ую СМО.

Тогда загрузку  $m$ -ой СМО основным и фоновым потоками заявок, соответственно определяют из следующих выражений:

$$\rho_m = \lambda_m \cdot t_m \quad (16.5)$$

$$\rho_{\phi m} = \lambda_{\phi m} \cdot t_m \quad (16.6)$$

С учётом приведённых формул для СМО, входящих в состав замкнутой СеМО, справедливо следующее соотношение загрузок:

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \dots \rho_m \dots \rho_M = t_1 \cdot p_{12} \cdot t_2 \cdot p_{13} \cdot t_3 \dots p_{1m} \cdot t_m \dots p_{1M} \cdot t_M \quad (16.7)$$

Вводим для загрузки СМО-1 обозначение  $\rho_1 = \rho$ , тогда загрузку  $m$ -ой СМО основным и фоновым потоками заявок определяют из следующих выражений:

$$\rho_m = \rho \cdot p_{1m} \cdot \frac{t_m}{t_1} = k_m \cdot \rho \quad (m=1, 2, \dots, M) \quad (16.8)$$

$$\rho_{\phi m} = \rho_m \cdot \frac{N-1}{N} = k_m \cdot \rho \cdot \frac{N-1}{N} \quad (m=1, 2, \dots, M) \quad (16.9)$$

$$\text{Где: } k_m = p_{1m} \cdot \frac{t_m}{t_1} \quad (m=1, 2, \dots, M) \quad (16.10)$$

Где:  $k_m$  - коэффициент сбалансированности загрузки СМО в составе СеМО

Для расчёта показателей работы СеМО и СМО, входящих в её состав, методом фонового потока последовательно вычисляем:

- коэффициенты сбалансированности загрузок СМО в составе СеМО по формуле (16.10), при этом  $k_1 = 1$ ;

- загрузку каждой СМО основным и фоновым потоками заявок соответственно по формулам (16.8) и (16.9);

- составляем выражение для вычисления среднего числа заявок в  $m$ -ой СМО в составе СеМО, считаем что это СМО вида М/М/1:

$$L_m = \frac{\rho_m}{1 - \rho_{\phi m}} = \frac{k_m \cdot \rho}{1 - k_m \cdot \rho \cdot \frac{N-1}{N}} \quad (16.11)$$

- составляем выражение для вычисления среднего числа заявок, которые циркулируют в СеМО:

$$N = \sum_{m=1}^M L_m = \sum_{m=1}^M L_m = \sum_{m=1}^M \frac{k_m \cdot \rho}{1 - k_m \cdot \rho \cdot \frac{N-1}{N}} \quad (16.12)$$

Решаем уравнение (16.12) и определяем коэффициент загрузки СМО-1,  $\rho = \rho_1$

- определяем коэффициент загрузки каждой СМО:

$$\rho_m = \rho \cdot p_{1m} \cdot \frac{t_m}{t_1} = k_m \cdot \rho \quad (16.13)$$

- коэффициент загрузки каждой СМО фоновым потоком заявок:

$$\rho_{\phi m} = \rho_m \cdot \frac{N-1}{N} \quad (16.14)$$

- среднее время цикла пребывания заявок в СеМО:

$$T_y = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1} \quad (16.15)$$

- интенсивность потока заявок на входе и выходе СМО-1:

$$\lambda = \frac{N}{T_y} \quad (16.16)$$

- интенсивность потока заявок с выхода СМО-1 на вход:  $m$ -ой СМО:

$$\lambda_m = \lambda \cdot p_{1m} \quad (16.17)$$

- среднее число заявок в  $m$ -ой СМО (в очереди и на обслуживании):

$$L_m = \frac{\rho_m}{1 - \rho_{\phi m}} = \frac{k_m \cdot \rho}{1 - k_m \cdot \rho \cdot \frac{N-1}{N}} \quad (16.18)$$

- среднее число заявок в очереди  $m$ -ой СМО:

$$Q_m = L_m - \rho_m \quad (16.19)$$

среднее время ожидания заявок в очереди  $m$ -ой СМО:

$$W_m = \frac{Q_m}{\lambda_m} \quad (16.20)$$

- среднее время пребывания заявок в  $m$ -ой СМО:

$$T_1 = \frac{L_1}{\lambda_m} \quad (16.21)$$

### Пример 16.1

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой трёхфазной СеМО, приведенной на Рис. 16.1 СеМО состоит из трёх СМО (СМО-1, СМО-2 и СМО-3), в которых времена

обслуживания заявок подчинены экспоненциальному закону с параметрами

$t_1 = t_2 = 1$  час,  $t_3 = 2$  час. В СеМО циркулируют четыре заявки т.е.  $N = 4$ .

Потерь заявок нет, поток заявок полностью после обслуживания в СМО-1 переходит в СМО-2 и далее в СМО-3. Поэтому вероятности перехода заявок из СМО-1 в СМО-2 и далее в СМО-3 соответственно равны:  $p_{12} = p_{13} = 1$

Исходные данные. Число СМО в составе СеМО:  $M=3$ .

Число заявок, циркулирующих в СеМО:  $N=4$ .

Средние значения времени обработки заявок в обслуживающих аппаратах СМО-1, СМО-2 и СМО-3 соответственно равны  $t_1 = t_2 = 1$  час,  $t_3 = 2$  час

Вероятности перехода заявок из СМО-1 в СМО-2 и СМО-3  $p_{12} = p_{13} = 1$

Решение.

Последовательно используем формулы (16.8)-(16.21) и определяем показатели работы СеМО и входящих в её состав СМО:

- коэффициент сбалансированности загрузки СМО в составе СеМО:

$$k_m = p_{1m} \cdot \frac{t_m}{t_1}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1, \quad k_3 = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$$

- загрузка каждой СМО основным и фоновым потоками заявок:

$$\rho_m = k_m \cdot \rho \quad , \quad \rho_1 = \rho \quad , \quad \rho_2 = \rho \quad , \quad \rho_3 = 2 \cdot \rho$$

$$\rho_{\phi m} = \rho_m \cdot \frac{N-1}{N} \quad , \quad \rho_{\phi 1} = 0,75\rho \quad , \quad \rho_{\phi 2} = 0,75\rho \quad , \quad \rho_{\phi 3} = 1,5\rho$$

- составляем выражения для среднего числа заявок в СМО по формуле (16.18):

$$L_1 = \frac{k_1 \cdot \rho}{1 - k_1 \cdot \rho \cdot \frac{N-1}{N}} = \frac{\rho}{1 - 0,75\rho} \quad ,$$

$$L_2 = \frac{k_2 \cdot \rho}{1 - k_2 \cdot \rho \cdot \frac{N-1}{N}} = \frac{\rho}{1 - 0,75\rho}$$

$$L_3 = \frac{\rho_3}{1 - \rho_{\phi 3}} = \frac{2 \cdot \rho}{1 - 1,5\rho}$$

- составляем выражение для среднего числа заявок в СеМО по формуле (16.12)

$$N = \sum_{m=1}^3 L_m = \frac{\rho}{1 - 0,75\rho} + \frac{\rho}{1 - 0,75\rho} + \frac{2\rho}{1 - 1,5\rho}$$

После преобразований при  $N = 4$ , получаем уравнение:

$$9\rho^2 - 13\rho + 4 = 0$$

Решаем уравнение относительно  $\rho$ :  $\rho = 0,444$ ,

- коэффициенты загрузки и фоновой загрузки каждой СМО определяем по формулам (16.13) и (16.14):

$$\rho_m = \rho \cdot p_{1m} \cdot \frac{t_m}{t_1} = k_m \cdot \rho \quad , \quad \rho_1 = 0,444 \quad , \quad \rho_2 = 0,444 \quad , \quad \rho_3 = 0,888$$

$$\rho_{\phi m} = \rho_m \cdot \frac{N-1}{N} \quad , \quad \rho_{\phi 1} = 0,333 \quad , \quad \rho_{\phi 2} = 0,333 \quad , \quad \rho_{\phi 3} = 0,666$$

- среднее время цикла пребывания заявок в СеМО по формуле (16.15):

$$T_{ц} = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1} = \frac{4 \cdot 1}{0,444} = 9 \text{ час}$$

- интенсивность потока заявок на входе и выходе СМО-1 по формуле (16.16):



$$\lambda = \lambda_1 = \frac{N}{T_{\text{ц}}} = \frac{4}{9} = 0,444 \text{ 1/час}$$

- интенсивность потока заявок с выхода СМО-1 на вход СМО-2 и СМО-3:

$$\lambda_2 = \lambda \cdot p_{12} = 0,444 \text{ 1/час} \quad , \quad \lambda_3 = \lambda \cdot p_{13} = 0,444 \text{ 1/час}$$

- среднее число заявок в каждой СМО (в очереди и на обслуживании) по формуле (16.18):

$$L_1 = \frac{k_1 \cdot \rho}{1 - k_1 \cdot \rho \cdot \frac{N-1}{N}} = \frac{0,444}{1 - 0,333} = 0,667$$

$$L_2 = \frac{k_2 \cdot \rho}{1 - k_2 \cdot \rho \cdot \frac{N-1}{N}} = \frac{0,444}{1 - 0,333} = 0,667$$

$$L_3 = \frac{k_3 \cdot \rho}{1 - k_1 \cdot \rho \cdot \frac{N-1}{N}} = \frac{0,888}{1 - 0,666} = 2,666$$

- среднее число заявок в очереди каждой СМО по формуле (16.19):

$$Q_1 = L_1 - \rho_1 = 0,667 - 0,444 = 0,223$$

$$Q_2 = L_2 - \rho_2 = 0,667 - 0,444 = 0,223$$

$$Q_3 = L_3 - \rho_3 = 2,666 - 0,888 = 1,778$$

среднее время ожидания заявок в очереди каждой СМО по формуле (16.20):

$$W_1 = \frac{Q_1}{\lambda_1} = \frac{0,223}{0,444} = 0,502 \text{ час} \quad W_2 = \frac{Q_2}{\lambda_2} = \frac{0,223}{0,444} = 0,502 \text{ час}$$

$$W_3 = \frac{Q_3}{\lambda_3} = \frac{1,778}{0,444} = 4,004 \text{ час}$$

- среднее время пребывания заявок в каждой СМО по формуле (16.21):

$$T_1 = \frac{L_1}{\lambda_1} = \frac{0,667}{0,444} = 1,502 \text{ час} \quad T_2 = \frac{L_2}{\lambda_2} = \frac{0,667}{0,444} = 1,502 \text{ час}$$

$$T_3 = \frac{L_3}{\lambda_3} = \frac{2,666}{0,444} = 6,004 \text{ час}$$

## 16.2. Аналитические модели службы ремонта оборудования в виде замкнутых СеМО на основе метода фонового потока

Метод фонового потока достаточно эффективен для разработки моделей замкнутых СеМО, представляемых в виде набора марковских СМО М/М/с/0 и М/М/1. Службу ремонта ПЭВМ или рабочих станций системы обработки информации (СОИ) обычно представляют в виде СеМО, состоящей из двух СМО: СМО-1 отражает работу ПЭВМ, а СМО-2 работу службы по ремонту этих ПЭВМ. СМО-1 вида М/М/с/0 (число обслуживающих аппаратов соответствует числу ПЭВМ и очереди отсутствуют) и СМО-2 вида М/М/1 (служба ремонта с одним сотрудником).

Структурная и Ф-схема службы ремонта ПЭВМ соответственно приведены на Рис.16.2 и Рис.16.3.

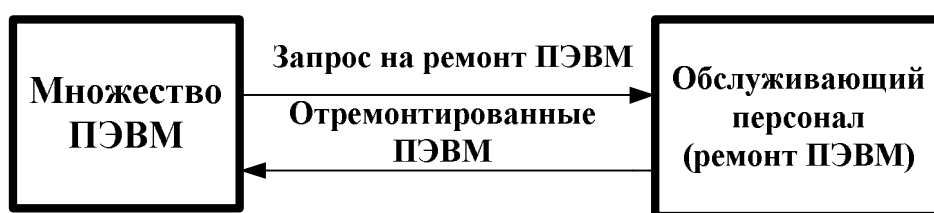


Рис.16.2 Структурная схема службы ремонта рабочих станций

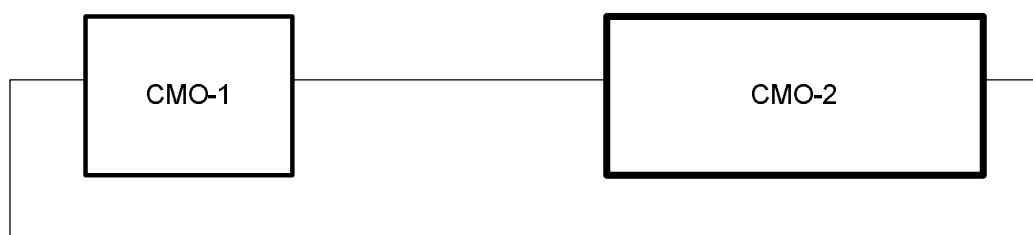


Рис. 16.3 Ф-схема СеМО, отражающая работу службу ремонта ПЭВМ.

Исходными данными для разработки моделей оценки основных показателей функционирования замкнутых мврковских двухфазных СеМО, отражающих работу службы ремонта ПЭВМ, являются:

$N$  - число заявок циркулирующих в СеМО, соответствует числу ПЭВМ в составе СОИ;

$t_{HO}$  - среднее время обработки заявок в СМО-1 (соответствует среднему времени ПЭВМ наработки на отказ, т.е. среднему времени исправной работы);

$\mu$  - интенсивность обработки заявок в СМО-2 (соответствует интенсивности, с которой сотрудник службы ремонта устраняет неисправность и вводит ПЭВМ в рабочее состояние).

Введем дополнительные вспомогательные обозначения:

$t_0 = 1/\mu$  - среднее время обработки заявок в СМО-2;

$T_p$  - среднее время пребывания заявок в СМО-2 (соответствует среднему времени пребывания ПЭВМ на стадии ремонта, т.е. времени пребывания в очереди на ожидание ремонта и времени ремонта);

$T_u = t_{HO} + T_p$  - среднее время цикла пребывания заявок в СеМО

(соответствует сумме средних времён пребывания ПЭВМ в исправном и неисправном состояниях);

$\lambda = N/T_u$  - интенсивность потока заявок, циркулирующих в СеМО

(соответствует интенсивности потока задач в СОИ);

$\lambda_\phi = (N - 1)/T_u$  - интенсивность фонового потока заявок, циркулирующих в

СеМО (соответствует интенсивности фонового потока задач в СОИ);

$\rho_0 = \lambda \cdot t_0$  - загрузка ОА СМО-2 (соответствует загрузке сотрудника службы ремонта);

$\rho_\phi = \lambda_\phi \cdot t_0$  - загрузка ОА СМО-2 фоновым потоком заявок;

$L$  - среднее число заявок в СМО-2 (соответствует среднему числу ПЭВМ, которое находится на стадии ремонта в неисправном состоянии);

$n = (N - L)$  - среднее число заявок в СМО-1 (соответствует среднему числу ПЭВМ, которое находится в исправном состоянии, т.е. работает);

Для СМО-2 вида М/М/1 среднее время пребывания заявок в этой СМО определяют по следующей формуле:

$$T_p = \frac{1}{\mu - \lambda_{\phi}} = \frac{t_0}{1 - \rho_{\phi}} \quad (16.22)$$

С учётом введённых обозначений иедем:

$$\rho_{\phi} = \lambda_{\phi} \cdot t_0 = \frac{(N-1) \cdot t_0}{t_{HO} + T_p} \quad (16.23)$$

После подстановки выражения (16.23) в (16.22) получаем:

$$T_p = \frac{1}{\mu - \lambda_{\phi}} = \frac{t_0}{1 - \rho_{\phi}} = \frac{t_0}{1 - \frac{(N-1) \cdot t_0}{t_{HO} + T_p}} \quad (16.24)$$

После преобразования выражение (16,24) принимает следующий вид:

$$\mu \cdot T_p^2 - (\mu \cdot t_{HO} - N) \cdot T_p - t_{HO} = 0 \quad (16.25)$$

Решаем уравнение (16.25) и получаем:

$$T_p = \frac{(\mu \cdot t_{HO} - N) \pm \sqrt{(\mu \cdot t_{HO} - N)^2 + 4 \cdot \mu \cdot t_{HO}}}{2 \cdot \mu} \quad (16.26)$$

Для сбалансированной СеМО, когда загрузки всех ОА в составе СеМО одинаковые иедем:

$$\mu \cdot t_{HO} - N = 0$$

$$\text{или } t_{HO}/t_0 = N \quad (16.27)$$

Для сбалансированной СеМО с учётом выражений (16.27) и (16.28) выражение (16.26) упрощается и принимает вид:

$$T_p = \frac{\sqrt{4 \cdot \mu \cdot t_{HO}}}{2 \cdot \mu} = \sqrt{N} \cdot t_0 \quad (16,28)$$

Далее определяем:

- среднее время цикла пребывания заявок в СеМО:

$$T_{\text{ц}} = T_p + t_{HO} \quad (16.29)$$

-интенсивность потока заявок в СМО-2:

$$\lambda = \frac{N}{T_{\text{ц}}} \quad (16,30)$$

- среднее число заявок в СМО-2

$$L = \lambda \cdot T_p = \frac{N}{T_{\text{ц}}} \cdot T_p \quad (16.31)$$

- загрузка обслуживающего аппарата ОА (сотрудника службы ремонта):

$$\rho_0 = \lambda \cdot t_0 = \frac{N}{T_{\text{ц}}} \cdot t_0 \quad (16.32)$$

Загрузка ОА СМО-1 (рабочей станции):

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{N} \cdot t_{\text{но}} \quad (16.33)$$

### Пример 16.2

Определить показатели функционирования службы ремонта ПЭВМ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой двухфазной СеМО, приведенной на Рис. 16.3. СеМО состоит из двух СМО (СМО-1 и СМО-2), в которых времена обслуживания заявок в ОА подчинены экспоненциальному закону с параметрами  $t_{\text{но}} = 100 \text{ час}$ ,  $t_0 = 1 \text{ час}$ . В СеМО циркулируют сто заявок, что соответствует числу ПЭВМ в составе системы обработки информации, т.е.  $N = 100$ .

Потерь заявок нет, поток заявок полностью после обслуживания в СМО-1 переходит в СМО-2 и далее после обслуживания обратно в СМО-1.

Исходные данные.

Число заявок, циркулирующих в СеМО:  $N=100$

Средние значения времени обработки заявок в обслуживающих аппаратах СМО-1 и СМО-2 соответственно равны  $t_{\text{но}} = 100 \text{ час}$ ,  $t_0 = 1 \text{ час}$

Решение.

Определяем показатели функционирования СеМО, отражающие работу СОИ:

- показатель сбалансированности СеМО (СОИ) по формуле (16.27);

$$t_{\text{но}}/t_0 = 100/1 = 100 = N$$

СеМО (СОИ) функционирует в сбалансированном режиме.

- среднее время пребывания ПЭВМ на стадии ремонта по формуле (16.28);

$$T_p = \sqrt{N} \cdot t_0 = \sqrt{100} \cdot 1 = 10 \text{ час}$$

- интенсивность потока ПЭВМ на ремонт по формуле (16.30);

$$\lambda = \frac{N}{T_y} = \frac{N}{t_{но} + T_p} = \frac{100}{100 + 10} = 0,909 \text{ 1/час}$$

- среднее время цикла ПЭВМ (работа и ремонт) по формуле (16.29);

$$T_{ц} = t_{но} + T_p = 100 + 10 = 110 \text{ час}$$

- среднее число ПЭВМ на стадии ремонта по формуле (16.31);

$$L = \lambda \cdot T_p = 0,909 \cdot 10 = 9,09$$

- среднее число исправных ПЭВМ

$$n = N - L = 100 - 9,09 = 90,91$$

- загрузка рабочей станции по формуле (16,33);

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{N} \cdot t_{но} = \frac{0,909}{100} \cdot 100 = 0,909$$

- загрузка сотрудника службы ремонта по формуле (16.32)

$$\rho_0 = \lambda \cdot t_0 = 0,909 \cdot 1 = 0,909$$

### 16.3 Аналитические модели системы обработки информации в виде замкнутых СеМО на основе метода фонового потока

Формализованная схема (Ф-схема) системы обработки информации (СОИ)

в виде сети массового обслуживания (СеМО) приведена на рис. 16.4

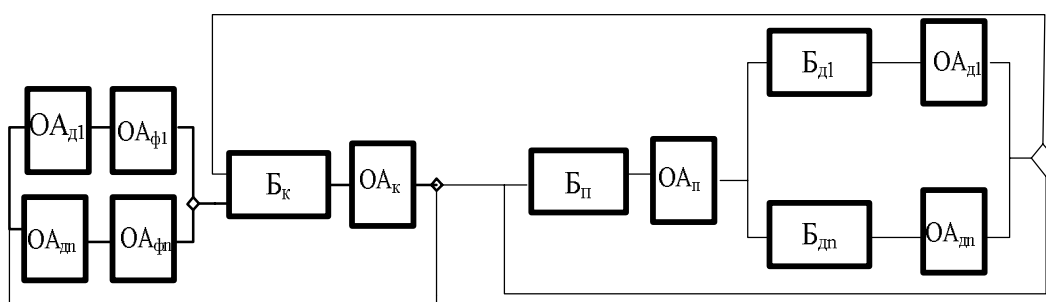


Рис.16.4 Ф-схема СОИ, содержащая ПЭВМ, канал и сервер, в виде СеМО.

В Ф-схеме используются следующие обозначения:

$OA_{ди}$  – обслуживающий аппарат, имитирующий дообработку на  $i$ -той рабочей станции сети запроса от неё к серверу после обработки запроса на сервере;

$OA_{\phi_i}$  – обслуживающий аппарат, имитирующий формирование запроса от  $i$ -той рабочей станции к серверу; ( $i = 1, 2 \dots N$ );

$B_k$  – буфер, имитирующий очередь запросов к каналу;

$OA_k$  — обслуживающий аппарат, имитирующий задержку при передаче данных через канал;

$B_n$  – буфер, имитирующий очередь запросов к процессорам;

$OAn$  – обслуживающие аппараты, имитирующие работу процессоров.

$B_{\partial_i}$  – буфер, имитирующий очередь запросов к  $i$ -му диску;

$OAd_i$  – обслуживающий аппарат, имитирующий работу  $i$ -го диска.

$P$  - вероятность обращения запроса к ЦП после обработки на диске.

Обслуживание заявок во всех ОА подчиняется экспоненциальному закону.

Исходные данные, необходимые для разработки аналитической модели СОИ, приведены в табл.16.1, а рассчитываемые показатели работы СОИ в табл. 16.2.

Таблица 16.1

Исходные данные аналитической модели

Обозначение	Описание
- $N$	- число рабочих станций сети
- $T_0$	- среднее значение времени дообработки запроса на рабочей станции сети после обработки его на сервере
- $T_{\phi}$	- среднее значение времени формирования запроса от рабочей станции сети к базе данных на сервере
- $t_k$	- среднее значение времени передачи запроса по каналу
- $C$	- число процессоров сервера
- $t_{np}$	- среднее значение времени обработки запроса в ЦП сервера
- $t_{\partial i}$	- среднее значение времени обработки запроса в $i$ -ом диске сервера
- $P_i$	- вероятность обращения запроса к $i$ -му диску сервера после обработки запроса в процессоре

Таблица 16.2

## Показатели работы аналитической модели СОИ

Обозначение	Описание
- $T_p$	- среднее значение времени реакции системы на запрос от рабочей станции сети
- $\rho_k$	- коэффициент загрузки ОА, имитирующего работу канала передачи данных
- $\rho_{np}$	- коэффициент загрузки ОА, имитирующего работу процессора сервера
- $\rho_{di}$	- коэффициент загрузки ОА, имитирующего работу i-ого диска сервера

Введём следующие обозначения:

$\lambda_{\phi 1}$  – среднее значение суммарной интенсивности фонового потока заявок, выходящих из ОА, имитирующих работу рабочих станций сети, в канал;

$\lambda_{\phi 1} \beta$  – среднее значение интенсивности фонового потока заявок, проходящих через ОА, имитирующие работу сервера и дисков;

где  $\beta = 1/(1-p)$ ;

$\beta$  - среднее количество проходов заявки по тракту процессор - диски за время одного цикла её обработки в системе.

$t_k$  – среднее значение времени обработки заявки в канале передачи данных;

$$t_k = 0.5(t_{k1} + t_{k2}).$$

Где  $t_{k1}$  и  $t_{k2}$  соответственно среднее время передачи заявки по каналу в прямом и обратном направлениях.

$n$  – количество процессоров, обслуживающих рабочие станции сети;

$m = 1/P_i$  количество дисков в сервере, при условии, что все они одинаковые

$P_i$  - вероятность обращения к  $i$ -му диску сервера

### Порядок расчета показателей работы СОИ методом фонового потока

При расчете используем итерационный алгоритм вычисления значений выходных показателей работы рассматриваемой СОИ.

Этап 1. Определяем начальное значение для  $\lambda_{\phi 1}$ .



$$\lambda_{\phi 1} = K_1 \min \left\{ \frac{1}{2t_k}; \frac{C}{\beta \cdot t_{np}}; \frac{1}{\beta \cdot P_i \cdot t_{\delta}} \right\} \cdot \frac{N-1}{N}$$

$K_1$  принимает значения в диапазоне 0.9...0.999995, по умолчанию 0,995.

Этап 2. Определяем средние значения времени пребывания заявок в СМО, входящих в СеМО, и отражающих работу канала, процессора и дисков.

$$T_k = \frac{2t_k}{1 - 2\lambda_{\phi 1} t_k}, \quad T_{np} = \frac{\beta \cdot t_{np}}{1 - (\beta \cdot \lambda_{\phi 1} \cdot t_{np} / c)^c}, \quad T_{\delta} = \frac{\beta \cdot t_{\delta}}{1 - \beta \cdot p_i \cdot \lambda_{\phi 1} \cdot t_{\delta}}$$

Этап 3. Определяем интенсивность фонового потока заявок после очередной итерации расчёта показателей работы СеМО.

$$\lambda_{\phi} = \frac{N-1}{T_0 + T_p + T_k + T_{np} + T_{\delta}}$$

Этап 4. Сравниваем значения интенсивностей фоновых потоков двух соседних итераций  $\lambda_{\phi 1}$  и  $\lambda_{\phi}$ . Если  $\frac{|\lambda_{\phi 1} - \lambda_{\phi}|}{\lambda_{\phi}} < \Delta$ , то переход на этап 6, иначе на этап 5.

$\Delta$  - погрешность вычисления, может принимать значения в диапазоне от 0,000001 до 0,9. По умолчанию 0,05.

Этап 5. Определяем новое приближённое значение для  $\lambda_{\phi 1}$ :

$$\delta_1 = (\lambda_{\phi 1} - \lambda_{\phi}) / K_2$$

$K_2$  принимает значения в диапазоне 10 - 100000, по умолчанию 100

Вычисляем  $\lambda_{\phi 1} = (\lambda_{\phi 1} - \delta_1)$  и переходим к этапу 2.

Этап 6. Определяем выходные показатели работы аналитической модели.

- средние значения времени пребывания заявок в СМО, имитирующих работу канала, процессоров и дисков.

$$T_k = \frac{2t_k}{1 - 2\lambda_{\phi 1} t_k}, \quad T_{np} = \frac{\beta \cdot t_{np}}{1 - (\beta \cdot \lambda_{\phi 1} \cdot t_{np} / c)^c}, \quad T_{\delta} = \frac{\beta \cdot t_{\delta}}{1 - \beta \cdot p_i \cdot \lambda_{\phi 1} \cdot t_{\delta}}$$

- загрузка ОА СМО, имитирующих работу рабочих станций, пользователя, канала передачи данных, процессора и дисков сервера.

$$\rho_{PC} = \frac{T_0 + T_p}{T_{цикла}}, \quad \rho_{польз} = \frac{T_p}{T_{цикла}}$$

$$\rho_k = 2\lambda t_k, \quad \rho_{np} = \beta \cdot \lambda \cdot t_{np} / c, \quad \rho_{\partial} = \beta \cdot \lambda \cdot p_i \cdot t_{\partial}$$

$$\text{где: } T_u = T_o + T_p + T_k + T_{np} + T_{\partial} \quad \lambda = \frac{N}{T_u}$$

### Результаты аналитического моделирования

Исходные данные и выходные результаты аналитической модели СОИ приведены в табл. 16.2

Таблица 16.2.

Входные и выходные данные аналитической модели

Номер эксперимента	1	2	3	4	5
Исходные данные					
Число рабочих станций	10	10	10	10	10
Среднее время дообработки заявки на РС	0	0	0	0	50
Среднее время формирования заявки на РС	100	200	100	100	50
Среднее время передачи данных через канал в прямом направлении	1	1	1	1	1
Среднее время передачи данных через канал в обратном направлении	1	1	1	1	1
Число процессоров	1	1	1	1	1
Среднее время обработки заявки в процессоре	10	10	10	10	10
Число дисков	1	1	2	1	2
Среднее время обработки заявки в диске	10	10	20	20	20
Вероятность обращения заявки к процессору после обработки на диске	0	0	0	0	0,5
Результаты моделирования.					
Загрузка рабочей станции	0,6488	0,8488	0,5882	0,4337	0,3532
Загрузка пользователя рабочей станции	0,6488	0,8488	0,5882	0,4337	0,1766
Среднее число работающих РС	6,488	8,488	5,88	4,337	3,533
Загрузка канала	0,1298	0,08488	0,1176	0,0867	0,0706
Загрузка процессора	0,6488	0,4244	0,5882	0,4337	0,7063
Загрузка диска 1	0,6488	0,4244	0,5882	0,8675	0,7063
Загрузка диска 2	-	-	0,5882	-	0,7063
Среднее время цикла системы	154,15	235,613	169,94	230,55	283,15
Среднее время реакции системы	54,155	35,613	69,994	130,55	233,15
Начальная интенсивность фонового потока	0,0995	0,09950	0,0995	0,0497	0,0497
Конечная интенсивность фонового потока	0,0583	0,03818	0,0529	0,0390	0,0317
Число итераций	182	310	202	77	133

## Глава 17. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сетей массового обслуживания на основе методов подсистем и узкое место

### 17. 1. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сетей массового обслуживания на основе метода подсистем

Одной из разновидностей СОУ являются системы обработки информации, в состав которых, как правило, входит служба ремонта и обслуживания компьютерного оборудования. Структурная схема, отражающая особенности функционирования службы ремонта ПЭВМ, приведена на Рис.17.1., а соответствующая ей Ф- схема в виде СеМО «ремонтник», состоящая из двух СМО, приведена на Рис.17.2. СМО-1 отображает работу ПЭВМ, а СМО-2 работу сотрудников ремонтной службы.

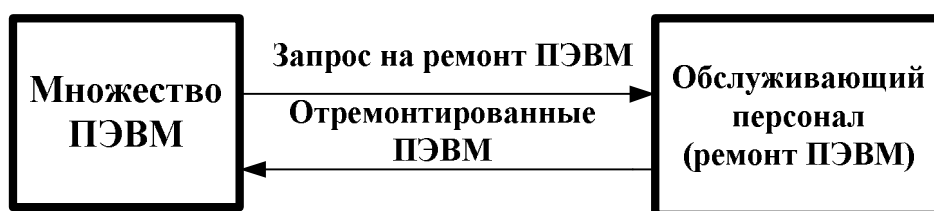


Рис.17.1 Структурная схема службы ремонта рабочих станций

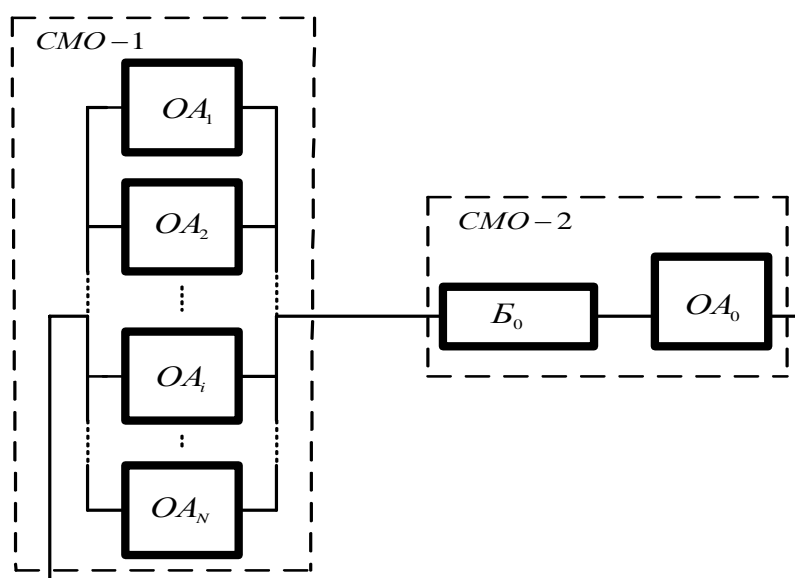


Рис.17.2 Ф-схема замкнутой СеМО вида «ремонтник»

Для оценки показателей работы службы ремонта методом подсистем, её представляют в виде двух подсистем, как приведено на Рис.17.3.

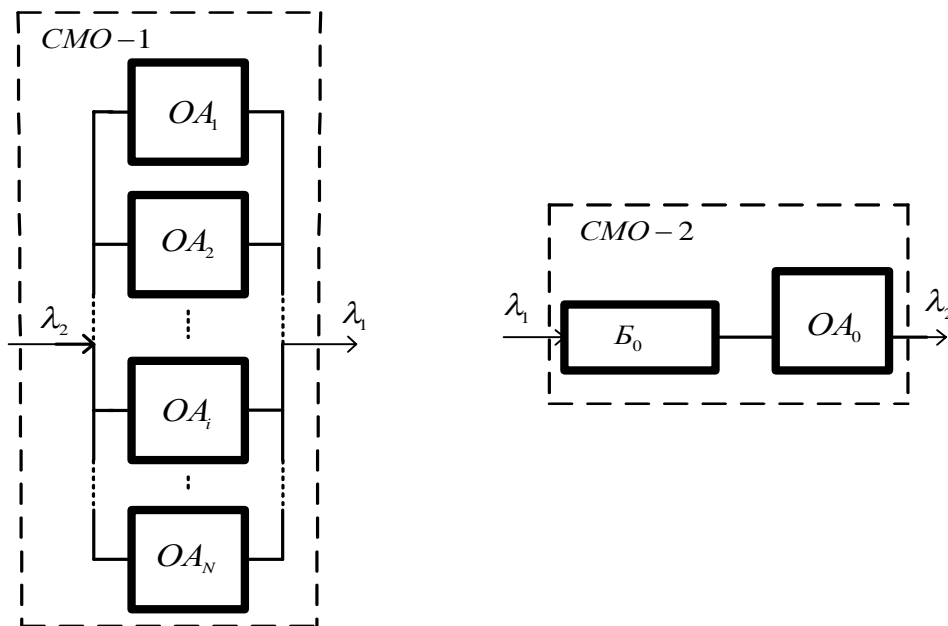


Рис.17.3 Подсистемы Ф-схемы замкнутой СеМО вида «ремонтник»

СМО-1 является многоканальной и содержит  $N$  штук ОА, отражающих работу рабочих станций, а СМО-2 является одноканальной с бесконечной очередью вида М/М/1 и отражает работу специалиста ремонтника.

Интенсивности потоков заявок в СеМО соответственно:

$\lambda_1$  - интенсивность потока заявок из СМО-1 в СМО-2;

$\lambda_2$  - интенсивность потока заявок из СМО-2 в СМО-1

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad (17.1)$$

Введём следующие обозначения:

$N$  - число заявок, циркулирующих в СеМО (соответствует числу ПЭВМ);

$L$  - число заявок в СМО-2 (соответствует числу ПЭВМ на стадии ремонта, т.е. в очереди на ремонт и ремонтируемых);

$n = (N - L)$  - число заявок в  $OA_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), (число исправных ПЭВМ);

$t_{HO}$  - среднее время обработки заявок в  $OA_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), среднее время исправной работы ПЭВМ, т.е. время наработки на отказ;

$t_o$  - среднее время обработки заявки в  $OA_o$ , время ремонта ПЭВМ;

$\rho_e$  - загрузка ОА СМО-1 (соответствует загрузке ПЭВМ)

$\rho_2$  - загрузка ОА СМО-2 (соответствует загрузке специалиста по ремонту);

С учётом введённых обозначений, используя формулы Литтла получаем.

$$\lambda_1 = \frac{N-L}{t_{HO}} \quad (17.2)$$

$$\lambda_2 = \frac{L}{T_p} \quad (17.3)$$

Поскольку СМО -2 вида М/М/1, то для среднего времени пребывания заявок в этой СМО справедлива формула:

$$T_p = \frac{t_o}{1-\rho_2} = \frac{t_o}{1-\lambda_2 \cdot t_o} \quad (17.4)$$

Учитывая, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , подставляем (17.2) в (17.4) и получаем:

$$T_p = \frac{t_o}{1-\rho_2} = \frac{t_o}{1-\lambda_2 \cdot t_o} = \frac{t_o}{(1-\frac{N-L}{t_{HO}} \cdot t_o)} \quad (17.5)$$

Подставляем (17.5) в (17.3) получаем:

$$\lambda_2 = \frac{L}{T_p} = \frac{L}{\frac{t_o}{(1-\frac{N-L}{t_{HO}} \cdot t_o)}} = \frac{L \cdot (1-\frac{N-L}{t_{HO}} \cdot t_o)}{t_o} = \frac{L \cdot (t_{HO} - N t_o + L t_o)}{t_o \cdot t_{HO}} \quad (17.6)$$

Приравнявая выражения (17.2) и (17.6) получаем:

$$\frac{N-L}{t_{HO}} = \frac{L \cdot (t_{HO} - N t_o + L t_o)}{t_o \cdot t_{HO}} \quad (17.7)$$

После преобразования выражение (17.7) принимает вид:

$$L^2 - (N - \frac{t_{HO}}{t_o} - 1) \cdot L - N = 0 \quad (17.8)$$

Вводим обозначение  $\beta = \frac{t_{HO}}{t_o}$  (17.9)

$\beta$  - коэффициент сбалансированности СеМО

Решаем уравнение (17.8) и получаем:

$$L = 0,5 \cdot (N - \beta - 1) \pm \sqrt{0,25 \cdot (N - \beta - 1)^2 + N} \quad (17.10)$$

Поскольку справедливы следующие выражения:

$$\rho_e = \frac{t_{HO}}{t_{HO} + T_p} \quad (17.11)$$

$$\rho_2 = \lambda \cdot t_o = \frac{N \cdot t_o}{t_{HO} + T_p} \quad (17.12)$$

То справедливо и выражение

$$\frac{\rho_e}{\rho_2} = \frac{t_{HO}}{N \cdot t_H} = \frac{\beta}{N} \quad (17.13)$$

$$\text{Для сбалансированной СеМО} \quad \rho_e = \rho_2, \quad \text{поэтому} \quad \beta = N \quad (17.14)$$

Для сбалансированной СеМО «ремонтник» выражение (17.10)

существенно упрощается и принимает вид:

$$L = -0,5 \pm \sqrt{N + 0,25} \quad (17.15)$$

Порядок расчёта основных показателей СеМО, отражающих работу СОИ «ремонтник», методом подсистем:

- определяют  $L$  по формуле (17.10), для сбалансированной по формуле (17.15);
- определяют  $n = (N - L)$
- определяют  $\lambda$  по формуле (17.2);
- определяют  $T_p$  по формуле (17.3);
- определяют  $T_u = t_{HO} + T_p$ ;
- определяют  $\rho_e$  по формуле (17.11);
- определяют  $\rho_2$  по формуле (17.12);

Оценка основных показателей сбалансированной СеМО, отражающей работу соответствующей сбалансированной СОИ «ремонтник, существенно

упрощается при совместном использовании метода подсистем и метода фонового потока:

Оценку показателей СеМО (СОИ) выполняют следующим образом:

- определяют  $L$  по формуле (17.15);
- определяют  $n = (N - L)$
- определяют  $T_p = \sqrt{N} \cdot t_0$  по формуле (16.28) (метод фонового потока);
- используя формулы Литтла при  $N > 5$ , получают:

$$\lambda = \frac{L}{T_p} = \frac{1}{t_0} \cdot \left(1 - \frac{0,5}{\sqrt{N}}\right)$$

$$\rho_2 = \rho_e = \lambda \cdot t_0 = \left(1 - \frac{0,5}{\sqrt{N}}\right)$$

### Пример 17.1

Определить показатели функционирования службы ремонта ПЭВМ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой двухфазной СеМО, приведенной на Рис. 17.2. СеМО состоит из двух СМО (СМО-1 и СМО-2), в которых времена обслуживания заявок в ОА подчинены экспоненциальному закону с параметрами  $t_{но} = 100$  час,  $t_0 = 1$  час. В СеМО циркулируют сто заявок, что соответствует числу ПЭВМ в составе системы обработки информации, т.е.  $N = 100$ .

Потерь заявок нет, поток заявок полностью после обслуживания в СМО-1 переходит в СМО-2 и далее после обслуживания обратно в СМО-1.

Исходные данные.

Число заявок, циркулирующих в СеМО:  $N=100$

Средние значения времени обработки заявок в обслуживающих аппаратах СМО-1 и СМО-2 соответственно равны  $t_{но} = 100$  час,  $t_0 = 1$  час

Решение.

Определяем показатели функционирования СеМО, отражающие работу СОИ:

- показатель сбалансированности СеМО (СОИ) по формуле (17.9);

$$\beta = t_{но}/t_0 = 100/1 = 100$$

$\beta = N$ , поэтому СеМО (СОИ) функционирует в сбалансированном режиме.

- число ПЭВМ на стадии ремонта по формуле (17.15);

$$L = -0,5 \pm \sqrt{N + 0,25} = -0,5 \pm \sqrt{100 + 0,25} = 9,5$$

- число исправных ПЭВМ;

$$n = (N - L) = 100 - 9,5 = 90,5$$

- интенсивность потока ПЭВМ на ремонт по формуле (17.2);

$$\lambda = \frac{N - L}{t_{HO}} = \frac{100 - 9,5}{100} = 0,905$$

- среднее время пребывания ПЭВМ на стадии ремонта по формуле (17.3);

$$T_p = \frac{L}{\lambda} = \frac{9,5}{0,905} = 10,5 \text{ час}$$

- среднее время цикла ПЭВМ (работа и ремонт);

$$T_{\text{ц}} = t_{HO} + T_p = 100 + 10,5 = 110,5 \text{ час}$$

- загрузка ПЭВМ по формуле (17.11);

$$\rho_e = \frac{t_{HO}}{t_{HO} + T_p} = \frac{100}{100 + 10,5} = 0,905$$

- загрузка сотрудника службы ремонта по формуле по формуле (17.12);

$$\rho_2 = \lambda \cdot t_0 = 0,905 \cdot 1 = 0,905$$

## **17.2. Аналитические модели СОУ в виде замкнутых сетей массового обслуживания на основе метода узкое место**

Метод «узкое место» обычно используют для анализа СОУ и её компонент, формализуемых в виде замкнутых линейных многофазных, марковских СеМО, состоящих из последовательно соединённых одноканальных СМО типа М/М/1. Формализованная схема СеМО, которая отображает трёхфазную обработку документов в СОУ, приведена на Рис.17.4.



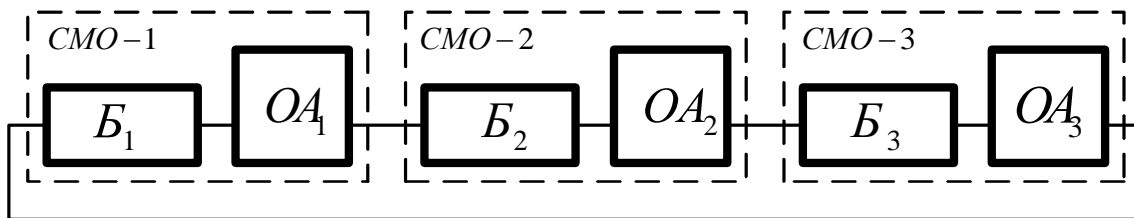


Рис.17.4 Ф-схема замкнутой линейной трёхфазной СеМО.

Для замкнутой сбалансированной линейной СеМО, когда загрузки всех СМО равны, для оценки загрузки ОА СМО методом комбинаторного анализа (глава 14, формула 14.39), было получено следующее выражение:

$$T_u = M \cdot T = (N + M - 1) \cdot t_o \quad (17.16)$$

где:  $T_u$  - среднее время цикла обработки заявок в замкнутой сбалансированной марковской СеМО;

$N$  - число заявок, циркулирующих в СеМО;

$M$  - число последовательно соединённых СМО в замкнутой СеМО;

$t_o$  - среднее время обработки заявок в марковской СМО в составе СеМО.

Выражение (17.16) можно представить в следующем виде:

$$T_u = N \cdot t_o + (M - 1) \cdot t_o = N \cdot t_o + \sum_{i=1}^{M-1} t_i \quad (17.17)$$

Для несбалансированной СеМО (средние времена обработки заявок в СМО различны) второе слагаемое в выражении (17.17) как показали исследования на моделях, зависит от соотношения времён обработки заявок в отдельных СМО и эта зависимость имеет вероятностный характер от соотношений времен обработки заявок в СМО. На основании результатов проведённых исследований среднее время цикла пребывания заявок в замкнутой многофазной, линейной, марковской СеМО можно представить в виде следующего выражения:

$$T_u \approx N \cdot t_{\max} + \sum_{i=1}^{M-1} (t_i / t_{\max}) t_i \quad (17.18)$$

где:

$t_{\max}$  - наибольшее среднее время обработки заявок в СМО в составе СеМО;

$t_i$  – среднее время обработки заявок в  $i$ -той СМО рассматриваемой СеМО.

Если несколько СМО имеют одинаковое значение  $t_{\max}$ , то одно из них (любое) учитывается в первом слагаемом выражения (17.18), а все остальные времена во втором слагаемом этого выражения.

Порядок расчета формализованной схемы СеМО методом узкое место.

1. Определяют СМО, в которой среднее время обработки заявок наибольшее среди рассматриваемых СМО:

$$t_{\max} = \max t_i \quad , \text{ где } i = 1, 2, \dots, M \quad (17.19)$$

2. Считают, что все заявки СеМО сосредоточены в СМО с  $t_{\max} = \max t_i$  .

3. Определяют среднее время цикла пребывания заявок в СеМО по формуле (17.18).

4. Определяют основные показатели работы СеМО.

- интенсивность основного и фонового потока заявок в замкнутой СеМО;

$$\lambda = \frac{N}{T_{\text{ц}}} \quad (17.20)$$

$$\lambda_{\phi} = \frac{N-1}{T_{\text{ц}}} \quad (17.21)$$

- загрузка  $i$ -той СМО :

$$\rho_i = \lambda \cdot t_i = \frac{N}{T_{\text{ц}}} \cdot t_i \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, M \quad (17.22)$$

- фоновая загрузка  $i$ -той СМО :

$$\rho_{\phi i} = \lambda_{\phi} \cdot t_i = \frac{N-1}{T_{\text{ц}}} \cdot t_i \quad (17.23)$$

- среднее число заявок в  $i$ -ой СМО, в очереди и на обслуживании:

$$L_i = \frac{\rho_i}{1 - \rho_{\phi i}} \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, M \quad (17.24)$$

- среднее число заявок в очереди  $i$ -ой СМО;

$$Q_i = L_i - \rho_i \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (17.25)$$

- среднее время пребывания заявок в очереди  $i$ -ой СМО;

$$W_i = Q_i / \lambda \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (17.26)$$

- среднее время пребывания заявок в  $i$ -ой СМО;

$$T_i = L_i / \lambda \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (17.27)$$

Для СеМО в целом справедливы следующие выражения:

$$L = \sum_{i=1}^M L_i \quad (17.28)$$

$$T_{ц} = \sum_{i=1}^M T_i \quad (17.29)$$

### Пример 17.2

Определить показатели функционирования СОУ, работа которой отображается в виде Ф-схемы замкнутой трёхфазной СеМО, приведенной на Рис. 17.4. СеМО состоит из трёх СМО (СМО-1, СМО-2 и СМО-3), в которых времена обслуживания заявок подчинены экспоненциальному закону с параметрами  $t_1 = t_2 = 1$  час,  $t_3 = 2$  час. В СеМО циркулируют четыре заявки т.е.  $N = 4$ .

Потерь заявок нет, поток заявок полностью после обслуживания в СМО-1 переходит в СМО-2 и далее в СМО-3, а затем обратно в СМО-1.

Исходные данные. Число СМО в составе СеМО:  $M=3$ .

Число заявок, циркулирующих в СеМО:  $N=4$ .

Средние значения времени обработки заявок в обслуживающих аппаратах СМО-1, СМО-2 и СМО-3 соответственно равны  $t_1 = t_2 = 1$  час,  $t_3 = 2$  час

Решение.

Используя формулы (17,18) –(17.25), определяем показатели работы СеМО и входящих в её состав СМО:

- определяем СМО с наибольшим средним временем обработки заявок в СеМО и численное значение этого времени по формуле (17.19);

$$t_{max} = \max t_3 = 2 \text{ час}$$

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО по формуле (17.18);

$$T_u \approx N \cdot t_{\max} + \sum_{i=1}^{M-1} (t_i / t_{\max}) t_i = 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 9 \text{ час}$$

- интенсивность основного и фонового потока заявок соответственно по формулам (17.20) и (17.21);

$$\lambda = \frac{N}{T_u} = \frac{4}{9} = 0,444 \text{ 1/час} \qquad \lambda_{\phi} = \frac{N-1}{T_{\Pi}} = \frac{4-1}{9} = 0,333 \text{ 1/час}$$

- основная и фоновая нагрузка  $i$ -той СМО по формулам (17.22) и (17.23);

$$\rho_1 = \lambda \cdot t_1 = 0,444 \cdot 1 = 0,444$$

$$\rho_2 = \lambda \cdot t_2 = 0,444 \cdot 1 = 0,444$$

$$\rho_3 = \lambda \cdot t_3 = 0,444 \cdot 2 = 0,888$$

$$\rho_{\phi 1} = \lambda_{\phi} \cdot t_1 = 0,333 \cdot 1 = 0,333$$

$$\rho_{\phi 2} = \lambda_{\phi} \cdot t_2 = 0,333 \cdot 1 = 0,333$$

$$\rho_{\phi 3} = \lambda_{\phi} \cdot t_3 = 0,333 \cdot 2 = 0,666$$

- среднее число заявок в  $i$ -ой СМО по формуле (17.24);

$$L_1 = \frac{\rho_1}{1 - \rho_{\phi 1}} = \frac{0,444}{1 - 0,333} = 0,667$$

$$L_2 = \frac{\rho_1}{1 - \rho_{\phi 2}} = \frac{0,444}{1 - 0,333} = 0,667$$

$$L_3 = \frac{\rho_3}{1 - \rho_{\phi 3}} = \frac{0,888}{1 - 0,666} = 2,666$$

- среднее число заявок в очереди  $i$ -ой СМО по формуле (17.25);

$$Q_1 = L_1 - \rho_1 = 0,667 - 0,444 = 0,223$$

$$Q_2 = L_2 - \rho_2 = 0,667 - 0,444 = 0,223$$

$$Q_3 = L_3 - \rho_3 = 2,666 - 0,888 = 1,778$$

- среднее время пребывания заявок в очереди  $i$ -ой СМО по формуле (17.26);

$$W_1 = Q_1 / \lambda = 0,223 / 0,444 = 0,502 \text{ час}$$

$$W_2 = Q_2 / \lambda = 0,223 / 0,444 = 0,502 \text{ час}$$

$$W_3 = Q_3 / \lambda = 1,778 / 0,444 = 4,004 \text{ час}$$

- среднее время пребывания заявок в  $i$ -ой СМО по формуле (17.27);

$$T_1 = L_1 / \lambda = 0,667 / 0,444 = 1,502 \text{ час}$$

$$T_2 = L_2 / \lambda = 0,667 / 0,444 = 1,502 \text{ час}$$

$$T_3 = L_3 / \lambda = 2,666 / 0,444 = 6,004 \text{ час}$$

Проверка решения по формулам (17.28) и (17.29).

$$L = \sum_{i=1}^3 L_i = 0,667 + 0,667 + 2,666 = 4$$

$$T_y = \sum_{i=1}^3 T_i = 1,502 + 1,502 + 6,004 = 9,008 \text{ час}$$

Сравнение результатов анализа замкнутой СеМО, полученных методами Базена и узкое место.

Таблица 17.1

Число СМО в СеМО	$N$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Метод Базена $T_{Ц}$	Метод Узкое место $T_{Ц}$	Погреш- ность %
3	4	1	1	1	1	1	1	6	6	0
3	6	1	1	1	1	1	1	8	8	0
3	4	1	1	0,5	1	1	1	8,77	9	2,6
3	6	1	1	0,5	1	1	1	12,35	13	5,2
3	8	1	1	0,5	1	1	1	16,14	17	5,4
3	10	1	1	0,5	1	1	1	20,06	21	4,7
3	5	1	0,5	0,5	1	1	1	12,44	12,5	0,5
2	4	1	0,5	-	1	2	-	5,14	5	-2,8

## Глава 18. Аналитические модели службы ремонта и обслуживания оборудования в виде замкнутых сетей массового обслуживания

### 18.1. Основные понятия службы ремонта и обслуживания оборудования

Для описания работы службы ремонта и обслуживания компьютеров используют укрупнённую структурную схему, приведённую на Рис.18.1, и Ф-схему в виде замкнутой марковской СеМО, часто именуемой СМО с ограниченным числом входного потока заявок, имеющую символическое обозначение  $M / M / C / N / \text{ПППО} / N$ , приведённую на Рис.18.2.

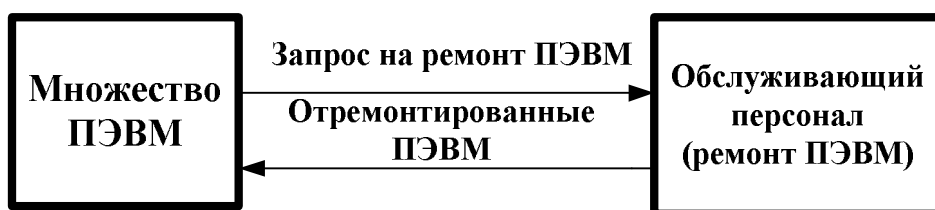


Рис.18.1 Структурная схема службы ремонта и обслуживания ПЭВМ

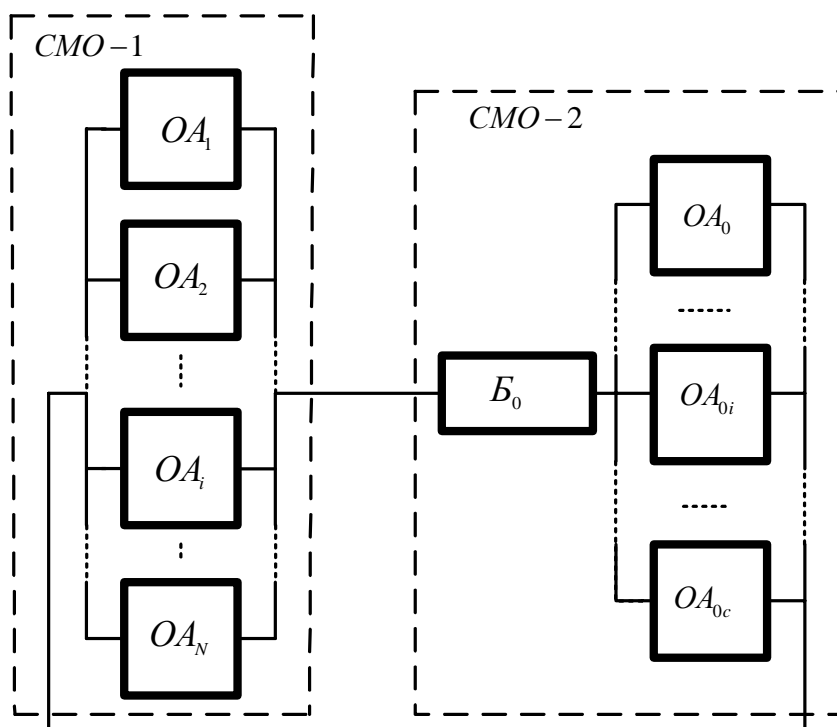


Рис.18.2. Ф-схема службы ремонта и обслуживания ПЭВМ

Ф-схему СеМО, отличают следующие особенности:

- учитывает экспоненциальное распределение времени наработки на отказ у каждого компьютера, экспоненциальное распределение времени ремонта компьютера каждым специалистом - ремонтником,

- имеет «С» идентичных ОА в составе СМО-2, отражающих работу «С» специалистов – ремонтников одного уровня квалификации;

- имеет общую очередь заявок в СМО-2, соответствующую очереди компьютеров на ремонт, с дисциплиной выбора заявок из очереди на обслуживание «первый пришел–первым обслужен» (ПППО);

- имеет в СМО-1 «N» источников заявок (N заявок, поступающих на обслуживание в СМО-2, которые соответствуют числу компьютеров в системе.

- источник заявок в любой момент времени может находиться в одном из двух состояний: активном, отражает работу исправного компьютера, и пассивном, отражает работу компьютера, который отказал. При переходе из активного состояния в пассивное состояние источник заявок посылает в обслуживаемую систему заявку, соответствующую заказу на ремонт компьютера. Заявка сразу поступает на обслуживание, если имеется свободный ОА, или в очередь, если все ОА заняты. Из очереди заявка поступает на обслуживание в соответствии с дисциплиной обслуживания ППППО.

Показатели оценки качества функционирования рассматриваемой СеМО - это количественные показатели, характеризующие уровень выполнения СеМО возложенных на нее функций. В состав этих показателей входят:

- загрузка ОА (генератора заявок), имитирующего работу компьютера ( $\rho_e$ );

- загрузка ОА, имитирующего работу ремонтника ( $\rho_o$ );

- среднее число заявок в очереди СМО-2 (ПЭВМ в очереди на ремонт), ( $Q$ );

- среднее суммарное число заявок в СМО-2 (суммарное число компьютеров в очереди на ремонт и ремонтируемых), ( $L$ );

- среднее время нахождения заявок в очереди СМО-2 (среднее время нахождения компьютеров в очереди на ремонт), ( $W$ );

- среднее время пребывания заявок в СМО-2, т.е. суммарное среднее время пребывания компьютера в неисправном состоянии) ( $T$ ).

- среднее число источников заявок, находящихся в активном состоянии, т.е. среднее число исправно работающих компьютеров ( $n = N - L$ ), где  $N$  - общее число источников заявок в СМО-1, равное числу компьютеров.

Введем следующие обозначения:

$t_{HO}$  - среднее время наработки на отказ одного компьютера;

$t_O$  - среднее время ремонта одного компьютера;

$\mu_{HO} = 1/t_{HO}$  - интенсивность отказов одного компьютера;

$\mu_O = 1/t_O$  - интенсивность ремонта одного компьютера;

$N$  - число компьютеров в системе;

$C$  - число специалистов, занятых ремонтом компьютеров;

$P_k$  - вероятность, что ( $k$ ) компьютеров находятся в состоянии отказа;

$\Psi = \mu_{HO} / \mu_O$  - коэффициент отношения интенсивности наработки на отказ к интенсивности восстановления работоспособности компьютера.

Для оценки характеристик функционирования рассматриваемой замкнутой СМО М/М/С/Н/ПППО/Н следует использовать аналитические выражения, которые известны в ГМО как аналитическая модель ремонтника.

## 18.2. Аналитические модели многоканальных систем ремонтника

Порядок расчета замкнутой многоканальной СеМО ремонтник.

1. Определяют вероятности состояний СеМО используя выражения:

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^c \frac{N! \cdot \Psi^k}{k! \cdot (N-k)!} + \sum_{k=c+1}^N \frac{N! \cdot \Psi^k}{c^{k-c} \cdot c! \cdot (N-k)!} \right]^{-1} \quad (18.1)$$

$$P_k = \frac{N! \cdot \Psi^k}{k! \cdot (N-k)!} P_0 \quad \text{где: } 1 \leq k \leq c \quad (18.2)$$

$$P_k = \frac{N! \cdot \Psi^k}{c^{k-c} \cdot c! \cdot (N-k)!} P_0 \quad \text{где: } k > c \quad (18.3)$$



2. Определяют  $Q$  - среднее число компьютеров в очереди на ремонт

$$Q = \sum_{k=c}^N (k - c) \cdot P_k \quad (18.4)$$

3. Определяют  $L$  - среднее число компьютеров, находящихся в неисправном состоянии, т.е в очереди на ремонт и на ремонте

$$L = \sum_{k=1}^N k \cdot P_k \quad (18.5)$$

4. Определяют  $U$  - среднее число компьютеров, которое непосредственно ремонтируются специалистами.

$$U = L - Q \quad (18.6)$$

5. Определяют  $\rho_0$  - коэффициент загрузки одного специалиста, занятого ремонтом компьютеров

$$\rho_0 = U / C \quad (18.7)$$

6. Определяют  $T_p$  - среднее время пребывания компьютера в неисправном состоянии (в очереди на ремонт и ремонте)

$$T_p = T_{ц} - t_{HO} \quad (18.8)$$

Где  $T_{ц}$  - среднее время цикла для компьютера (время наработки на отказ плюс время нахождения в неисправном состоянии)

Согласно правилу Литтла имеем

$$N = \lambda \cdot T_{ц} = \lambda \cdot (T_p + t_{HO}) \quad (18.9)$$

$$L = \lambda \cdot T_p \quad (18.10)$$

Где  $\lambda$  - интенсивность потока заявок, циркулирующих в СМО, равная интенсивности потока отказов компьютеров в системе

Приравниваем выражения (16.9) и (16.10) и находим  $T_p$

Имеем 
$$T_p = \frac{L \cdot t_{HO}}{N - L} \quad (18.11)$$

7. Определяют  $W$  - среднее время нахождения компьютера в очереди

на ремонт  $W = T_p - t_o$  (18,12)

8. Определяют  $T_{ц}$  - среднее время цикла для компьютера

$$T_{ц} = T_p + t_{HO} \quad (18.13)$$

9. Определяют  $\rho_e$  - коэффициент загрузки компьютера, т.е. долю времени, в течение которого он находится в исправном состоянии

$$\rho_e = \frac{t_{HO}}{T_{ц}} \quad (18.14)$$

10. Определяют  $n$  - среднее количество исправных компьютеров

$$n = (N - L) \quad (18.15)$$

11. Определяют режим работы службы ремонта и обслуживания компьютеров. Согласно организационно-технологическому процессу, протекающему в системе, справедливы следующие выражения

$$\rho_e = \frac{\lambda \cdot t_{HO}}{N} \quad (18.16)$$

$$\rho_o = \frac{\lambda \cdot t_o}{C} \quad (18.17)$$

Приравняв выражения (18.16) и (18.17) получаем

$$\frac{\rho_e}{\rho_o} = \frac{C \cdot t_{HO}}{N \cdot t_o} \quad (18.18)$$

Анализируя выражение (18.18) получаем:

$$\text{- если } \frac{\rho_e}{\rho_o} = \frac{C \cdot t_{HO}}{N \cdot t_o} = 1 \quad (18.19)$$

то система сбалансированная, компьютеры и специалисты, занятые их ремонтом, имеют один и тот же коэффициент загрузки;

$$\text{- если } \frac{\rho_e}{\rho_o} = \frac{C \cdot t_{HO}}{N \cdot t_o} \gg 1 \quad (18.20)$$

то компьютеры загружены намного больше, чем специалисты, занятые их ремонтом, и, следовательно, в системе мало неисправных компьютеров;

$$- \text{если } \frac{\rho_e}{\rho_0} = \frac{C \cdot t_{HO}}{N \cdot t_0} \ll 1 \quad (18.21)$$

то компьютеры загружены намного меньше, чем специалисты, занятые их ремонтом, и, следовательно, в системе много неисправных компьютеров.

### Пример 18.1

В организации имеется 100 компьютеров. Время наработки компьютера на отказ подчиняется экспоненциальному закону, со средним значением 800 часов, время ремонта и восстановления компьютера, выполняемое одним специалистом также подчиняется экспоненциальному закону со средним значением 8 часов. Необходимо определить показатели работы службы ремонта компьютеров в организации для трёх вариантов работы:

-Вариант 1, ремонт компьютеров выполняет один специалист;

-Вариант 2, ремонт компьютеров выполняют два специалиста;

-Вариант 3, ремонт компьютеров выполняют три специалиста.

Исходные данные:  $N = 100$  компьютеров,  $t_{HO} = 800$  час,  $t_0 = 8$  час

Решение.

Результаты расчетов по формулам (18.1 – 18.21), приведены в Табл. 18.1

Таблица 18.1

Показатели работы службы ремонта компьютеров для примера 18.1.

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Число ремонтников	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$
$P_0$	0,07570	0,33760	0,36584
$Q$	6,64575	0,30084	0,04110
$L$	7,57005	1,28796	1,03078
$U = L - Q$	0,92430	0,98712	0,98969
$\rho_0 = U / C$	0,92430	0,49356	0,32990
$n = N - L$	92,43000	98,71200	98,9692
$\rho_e = n / N$	0,92430	0,98712	0,98969
$W$	57,52000	2,43690	0,33211
$T_p$	65,52000	10,43690	8,33200
$T_{\mu} = T_p + t_{HO}$	865,5200	810,4369	808,332
$\rho_e / \rho_0$	1	2	3

### Пример 18.2

В организации имеется 100 компьютеров. Время наработки компьютера на отказ подчиняется экспоненциальному закону, со средним значением 600 часов, время ремонта и восстановления компьютера, выполняемое одним специалистом также подчиняется экспоненциальному закону со средним значением 8 часов. Необходимо определить показатели работы службы ремонта компьютеров в организации для трёх вариантов работы:

- Вариант 1, ремонт компьютеров выполняет один специалист;
- Вариант 2, ремонт компьютеров выполняют два специалиста;
- Вариант 3, ремонт компьютеров выполняют три специалиста.

Исходные данные:  $N = 100$  компьютеров,  $t_{HO} = 600$  час,  $t_O = 8$  час

Решение.

Результаты расчетов по формулам (18.1 – 18.21), приведены в Табл. 18.2

Таблица 18.2

Показатели работы службы ремонта компьютеров для примера 18.2.

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Число ремонтников	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$
$P_0$	0,000923	0,208730	0,257518
$Q$	24,07000	0,878762	0,1273
$L$	25,0692	2,1830	1,4414
$U = L - Q$	0,9991	1,3042	1,3141
$\rho_O = U / C$	0,9991	0,6500	0,4380
$n = N - L$	74,9308	97,8170	98,558
$\rho_{pc} = n / N$	0,74931	0,97817	0,9855
$T_p$	200,739	13,390	8,775
$T_{\text{ц}} = T_p + t_{HO}$	800,739	613,390	608,77
$\rho_{pc} / \rho_O$	0,75	1,50	2,25

**Пример 18.3.** Условия примера аналогичны примеру 18.2.

Исходные данные:  $N = 100$  компьютеров,  $t_{HO} = 400$  час,  $t_O = 6$  час

Решение.

Результаты расчетов по формулам (18.1 – 18.21), приведены в Табл. 18.3

Таблица 18.3

Показатели работы службы ремонта компьютеров для примера 18.3.

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Число ремонтников	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$
$P_0$	0,0000	0,157253	0,2144
$Q$	32,3353	1,4406	0,2046
$L$	33,3353	2,8971	1,6794
$U = L - Q$	0,9998	1,4565	1,4748
$\rho_0 = U / C$	0,9998	0,7280	0,4916
$n = N - L$	66,6647	97,1029	98,3200
$\rho_{pc} = n / N$	0,6667	0,9710	0,9832
$T_p$	200,018	11,9343	6,8325
$T_{\text{ц}} = T_p + t_{\text{HO}}$	600,018	41,9343	406,8325
$\rho_{pc} / \rho_0$	0,666	1,333	2

**Пример 18.4.** Условия примера аналогичны примеру 18.2.

Исходные данные:  $N = 100$  компьютеров ,  $t_{\text{HO}} = 600$  час ,  $t_0 = 6$  час

Решение.

Результаты расчетов по формулам (18.1 – 18.21), приведены в Табл. 18.4.

Таблица 18.4

Показатели работы службы ремонта компьютеров для примера 18.4.

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Число ремонтников	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$
$P_0$	0,0757	0,3376	0,36584
$Q$	6,64575	0,30084	0,0411
$L$	7,57005	1,28796	1,03078
$U = L - Q$	0,9243	0,9871	0,9896
$\rho_0 = U / C$	0,9243	0,49356	0,329897
$n = N - L$	92,43	98,712	98,9692
$\rho_{pc} = n / N$	0,9243	0,98712	0,989692
$W$	43,14	1,8286	0,249
$T_p$	49,14	7,8286	6,24908
$T_{\text{ц}} = T_p + t_{\text{HO}}$	649,14	607,8286	606,2498
$\rho_{pc} / \rho_0$	1	2	3

### 18.3. Аналитические модели одноканальных систем ремонтника

Если система ремонтник имеет о одного специалиста по ремонту ПЭВМ, то Ф-схема СМО-2 на Рис.18.2 содержит один ОА и расчёты упрощаются. Порядок расчета замкнутой одноканальной СеМО ремонтник.

1. Определяют вероятность простоя СМО-2 в СеМО используя выражение:

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^N \frac{N! \cdot \Psi^k}{(N-k)!} \right]^{-1} \quad \text{где} \quad \Psi = \frac{t_0}{t_{HO}} \quad (18.22)$$

2. Загрузка ремонтника  $U = \rho_0 = 1 - P_0$  (18.23)

3. Среднее время пребывания компьютеров на стадии ремонта

$$T_p = \frac{N \cdot t_0}{U} \quad (18.24)$$

4. Среднее время цикла компьютера (исправное и неисправное состояние)

$$T_{\text{ц}} = T_p + t_{HO} \quad (18.25)$$

5. Коэффициент загрузки компьютера

$$\rho_e = \frac{t_{HO}}{T_{\text{ц}}} \quad (18.26)$$

6. Среднее число работающих компьютеров

$$n = \rho_e \cdot N \quad (18.27)$$

7. Интенсивность потока компьютеров на ремонт

$$\lambda = N / T_{\text{ц}} \quad (18.28)$$

8. Среднее число неисправных компьютеров

$$L = \lambda \cdot T_p \quad (18.29)$$

9. Среднее число компьютеров в очереди на ремонт

$$Q = L - U \quad (18.30)$$

10. Среднее время нахождения компьютера в очереди на ремонт

$$W = Q / \lambda \quad (18.31)$$

Проверка расчетов осуществляется на основе выполнения условий

$$N = n + L \quad T_p = W + t_0$$

### Пример 18.5

В организации имеется 100 компьютеров. Время наработки компьютера на отказ подчиняется экспоненциальному закону и зависит от рассматриваемого варианта. Время ремонта и восстановления компьютера, выполняет один специалист и оно также подчиняется экспоненциальному закону со средним значением 10 часов. Необходимо определить показатели работы службы ремонта компьютеров для трёх вариантов работы:

- Вариант 1, среднее время наработки ПЭВМ на отказ 1000 часов;
- Вариант 2, среднее время наработки ПЭВМ на отказ 900 часов;
- Вариант 3, среднее время наработки ПЭВМ на отказ 800 часов;

Исходные данные:  $N = 100$  компьютеров,  $t_0 = 10$  час

Решение.

Результаты расчетов по формулам (18.22 – 18.31), приведены в Табл. 18.5

Таблица 18.5

Показатели работы службы ремонта компьютеров для примера 18.5

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Число ремонтников	$c = 1$	$c = 1$	$c = 1$
$P_0$	0,0757	0,02696	0,004
$Q$	6,650	11,450	19,323
$L$	7,570	12,43	20,319
$U = L - Q$	0,920	0,973	0,996
$\rho_0 = U / C$	0,920	0,973	0,996
$n = N - L$	92,43	87,500	79,7
$\rho_{pc} = n / N$	0,924	0,875	0,797
$T_p$	81,90	127,7	204
$T_{\text{ц}} = T_p + t_{\text{но}}$	1081,90	1027,7	1004
$\rho_{pc} / \rho_0$	1,25	0,9	0,8

### Пример 18.6

В организации имеется 100 компьютеров. Время наработки компьютера на отказ подчиняется экспоненциальному закону и зависит от рассматриваемого варианта. Время ремонта и восстановления компьютера, выполняет один специалист и оно также подчиняется экспоненциальному закону со средним значением 10 часов. Необходимо определить показатели работы службы ремонта компьютеров для трёх вариантов работы:

- Вариант 1, среднее время наработки ПЭВМ на отказ 1250 часов;
- Вариант 2, среднее время наработки ПЭВМ на отказ 1500 часов;
- Вариант 3, среднее время наработки ПЭВМ на отказ 1750 часов;
- Вариант 4, среднее время наработки ПЭВМ на отказ 2000 часов;
- Вариант 5, среднее время наработки ПЭВМ на отказ 2500 часов;

Исходные данные:  $N = 100$  компьютеров,  $t_0 = 10$  час

Решение.

Результаты расчетов по формулам (18.22 – 18.31), приведены в Табл. 18.6

Таблица 18.6

Показатели работы службы ремонта компьютеров для примера 18.6

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
Число ремонтников	$c = 1$	$c = 1$	$c = 1$	$c = 1$	$c = 1$
$P_0$	0,22465	0,3453	0,4358	0,5048	0,602
$Q$	2,307	1,150	0,695	0,468	0,255
$L$	3,082	1,802	1,260	0,963	0,652
$U = L - Q$	0,775	0,655	0,565	0,495	0,397
$\rho_0 = U / C$	0,775	0,655	0,565	0,495	0,397
$n = N - L$	96,9	98,19	98,75	99,037	99,348
$\rho_{pc} = n / N$	0,775	0,9819	0,9875	0,99037	0,99348
$T_p$	39,75	27,58	22,32	19,44	16,4
$T_{ц} = T_p + t_{но}$	1289,75	1527,58	1772,32	2019,44	2516,4
$\rho_{pc} / \rho_0$	1,25	1,5	1,75	2	2,5



## Глава 19. Модели службы ремонта и обслуживания оборудования в виде замкнутых сбалансированных сетей массового обслуживания.

### 19.1. Модели одноканальных сбалансированных систем ремонтника

В Ф-схеме СеМО, приведённой на Рис.18.2, одноканальной системе ремонтника в составе СМО-2 будет соответствовать только один ОА. Если рассматривать СМО-2 как СМО вида G/G/1, то для среднего времени пребывания заявок в этой СМО справедливо следующее приближённое выражение, позволяющее рассчитать  $T_p$  с погрешностью, приемлемой для практических расчетов.

$$T_p = W + t_o = \frac{\rho_\phi \cdot (v_{\phi x}^2 + v_o^2) \cdot t_o}{2 \cdot (1 - \rho_\phi)} + t_o \quad (19.1)$$

Где  $v_{\phi x}^2$ ,  $v_o^2$  - соответственно квадраты коэффициентов вариации интервалов времени потока, поступающего на вход  $OA_o$  СМО-1, и интервалов времени их обслуживания.

$\rho_\phi$  - загрузка  $OA_o$  СМО-2 фоновым потоком заявок.

$t_o$  - среднее время обслуживания заявок в СМО-2

Далее вводим обозначение  $h = \frac{v_{\phi x}^2 + v_o^2}{2}$  (19.2)

Для рассматриваемой системы справедливы следующие выражения:

$$\rho_\phi = \lambda_\phi \cdot t_o = \frac{(N-1) \cdot t_o}{(t_{HO} + T_p)} \quad (19.3)$$

$$\rho_e = \frac{t_{HO}}{t_{HO} + T_p} \quad (19.4)$$

$$\rho_o = \frac{N \cdot t_o}{t_{HO} + T_p} \quad (19.5)$$

Где:  $N$  - число заявок, циркулирующих в замкнутой СеМО;  
 $t_{HO}$  - среднее время обработки заявок в СМО-1;

$\lambda_{\phi}$  - фоновый поток заявок, поступающих в СМО-2 из СМО-1;

$\rho_e$  - загрузка ОА в СМО-1 основным потоком заявок;

$\rho_o$  - загрузка ОА в СМО-2 основным потоком заявок.

Для сбалансированной СеМО  $\rho_e = \rho_o$ , приравнявая выражения (19.4) и (19.5) получаем:

$$t_{HO} = N \cdot t_o \quad (19.6)$$

Подставляем выражения (19.2) и (19.3) в выражение (19.1) и учитываем выражение (19.6), а также полученное экспериментально значение  $h \approx 0,65$ .

После преобразований выражения (19.1) для сбалансированной одноканальной системы ремонтник имеет вид:

$$T_p \approx 0,8 \cdot \sqrt{N} \cdot t_o \quad (19.7)$$

Вводим обозначение  $\gamma = T_p / t_o = 0,8 \cdot \sqrt{N}$  (19.8)

Для среднего числа заявок ( $L$ ) в СМО-2, в очереди и на обслуживании (соответствует числу неисправных компьютеров), согласно формуле Литтла, справедливо следующее выражение:

$$L = \lambda \cdot T_p \quad (19.9)$$

Где:  $\lambda$  - интенсивность потока заявок из СМО-1 в СМО-2 и обратно.

Согласно формуле Литтла имеем:

$$\lambda = \frac{N}{(t_{HO} + T_p)} \quad (19.10)$$

Подставляем выражения (19.7) и (19,10) в выражение (19.9) и учитываем обозначение, приведённое в (19.8) получаем простое выражение для среднего числа заявок в СМО-2 для сбалансированной СеМО.

$$L = \frac{N \cdot \gamma}{(N + \gamma)} = \frac{N \cdot 0,8 \cdot \sqrt{N}}{(N + 0,8 \cdot \sqrt{N})} \quad (19.11)$$

Это выражение согласуется с выражением для ( $L$ ), полученным на основе экспериментальных данных, которое имеет вид:

$$L \approx 0,8 \cdot \sqrt{N} - 0,35 \quad (19.12)$$

В сбалансированной одноканальной СеМО ремонтник загрузку ОА в СМО-1 и СМО-2 определяют согласно выражения:

$$\rho_e = \rho_o = \frac{t_{HO}}{(t_{HO} + T_p)} = \frac{N \cdot t_o}{(N \cdot t_o + 0,8 \cdot \sqrt{N} \cdot t_o)} = \frac{N}{(N + 0,8 \cdot \sqrt{N})} \quad (19.13)$$

### 19.2. Модели многоканальных сбалансированных систем ремонтника

Ф-схема системы ремонтника в виде двухфазной многоканальной СеМО приведена на Рис.18.2.

Для оценки среднего числа заявок в СМО-2 (числа неисправных компьютеров, находящихся в очереди на ремонт и непосредственно ремонтируемых) для одноканальной СМО-2, входящей в состав сбалансированной СеМО. были получены простые и удобные для практического использования формулы (19.11) и (19.12). Дальнейшие исследования показали, что формула (19.12) немного скорректированная удачно подходит для расчёта числа заявок в многоканальной СМО-2 в составе сбалансированной СеМО.

$$L \approx 0,8 \cdot \sqrt{N} + 0,35 \cdot (c - 2) \quad (19.13)$$

Где:  $c$  - число обслуживающих аппаратов в СМО-2.

Среднее время пребывания заявок в СМО-2 определяют по формуле Литтла:

$$T_p = \frac{L}{\lambda} = \frac{L}{(\rho_o \cdot c) / t_o} = \frac{L \cdot t_o}{(N - L) \cdot c / N} = \frac{N \cdot L \cdot t_o}{(N - L) \cdot c} \quad (19.14)$$

Загрузку ОА в СМО-1 и СМО-2 в сбалансированной СеМО определяют по формуле:

$$\rho_e = \rho_o = \frac{N - L}{N} \quad (19.15)$$

### 19.3. Модели систем ремонтника при перегрузке и небольшой загрузке службы ремонта

Для оценки вероятности простоя ОА в одноканальной СМО-2 в составе СеМО ремонтник, Ф-схема которой приведена на Рис.18.2, (это соответствует простоя сотрудника службы ремонта) обычно используют формулу Пальма, которая имеет следующий вид:

$$P_0 = \left[ \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)!} \cdot \left(\frac{t_0}{t_{HO}}\right)^i \right]^{-1} \quad (19.16)$$

Введем обозначение:  $\alpha = \rho_e / \rho_0$ . Тогда с учётом формул (19.4) и (19.5) для одноканальной СМО-2 в составе СеМО имеем:

$$\alpha = \frac{\rho_e}{\rho_0} = \frac{t_{HO} \cdot c}{N \cdot t_0} \quad (19.17)$$

После подстановки значения  $t_{HO}$  из формулы (19.17) в формулу (19.16) для одноканальной СМО-2 в составе СеМО ремонтник, при условии, что  $c=1$  имеем:

$$P_0 = \left[ \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)!} \cdot \left(\frac{1}{\alpha N}\right)^i \right]^{-1} \quad (19.18)$$

Исследования показали, что при несбалансированном режиме работы системы ремонтник, когда имеет место перегрузка службы ремонта, т.е. перегрузка СМО-2 в составе СеМО, уже при  $\alpha \leq 0,75$  и  $N \geq 25$ , выражение (19.18) можно представить в следующем виде:  $P_0 \approx 0$ . Тогда  $\rho_0 = 1 - P_0 \approx 1$

В этом случае  $\rho_e \approx \alpha$ .

Поскольку  $\rho_e = \frac{N-L}{N}$ , то  $L = (1-\alpha) \cdot N$ , а  $T_p \approx L \cdot t_0$

Приведённые выражения справедливы и для многоканальной системы ремонтник.

Исследования также показали, что выражение (19.18) при  $\alpha \geq 2$  и  $N \geq 25$ , можно представить в виде суммы членов геометрической прогрессии:

$$P_0 \approx \left( 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \dots + \frac{1}{\alpha^N} \right)^{-1} \quad (19.19)$$

где:  $\frac{1}{\alpha}$  - знаменатель геометрической прогрессии.

Поэтому выражение (19.19) можно представить в следующем виде:

$$P_0 = \left( \frac{1 - (1/\alpha)^{(N+1)}}{1 - (1/\alpha)} \right)^{-1} \quad (19.20)$$

После преобразования выражения (19.20) для числа  $N \geq 25$  получаем:

$$P_0 \approx \frac{\alpha - 1}{\alpha} \quad (19.21)$$

Тогда загрузку СМО-2, т.е. сотрудника службы ремонта при  $\alpha \geq 2$  и  $N \geq 25$  определяют из следующего выражения:

$$\rho_0 = 1 - P_0 = 1/\alpha \quad (19.22)$$

Если в Ф-схеме СеМО ремонтник, приведённой на Рис.18.2, рассматривать СМО-2 как многоканальную вида М/М/с, что соответствует наличию в составе службы ремонта нескольких сотрудников, то для оценки основных характеристик её функционирования справедливы следующие приближённые выражения, погрешность которых, соответствует требованиям практических расчётов.

$$L = \frac{c \cdot \rho_0}{1 - \rho_0^c} \quad (19.23)$$

$$T_p = \frac{t_0}{1 - \rho_0^c} \quad (19.24)$$

Где:  $L$  - среднее число заявок в СМО-2 (среднее число компьютеров на стадии ремонта);

$T_p$  - среднее время нахождения заявок в СМО-2 (среднее время пребывания компьютеров на стадии ремонта, т.е. в очереди и непосредственно в ремонте).

$\rho_0$  - загрузка ОА в СМО-2 (загрузка сотрудника службы ремонта).

После подстановки в (19,23) и (19.24) значения  $\rho_0$  из (19.22) получаем для оценки основных показателей работы многоканальной СМО-2 в составе СеМО ремонтник следующие выраженияб

$$L = \frac{c \cdot \alpha^{c-1}}{\alpha^c - 1} \quad (19.25)$$

$$T_p = \frac{\alpha^c \cdot t_0}{\alpha^c - 1} \quad (19.26)$$

$$\rho_e = \frac{t_{HO}}{t_{HO} + T_p} \quad \rho_o = \frac{N \cdot t_o}{(t_{HO} + T_p) \cdot c}$$

$$\alpha = \frac{\rho_e}{\rho_o} = \frac{t_{HO} \cdot c}{N \cdot t_o} \quad (19.4)$$

Формулы быстрого приближённого анализа «системы ремонтника» для ряда особых областей её функционирования приведены в табл.19.1

Таблица 19.1

Формулы быстрого анализа «системы ремонтника» для особых областей её функционирования.

Область $\alpha = \rho_e / \rho_o \leq 0,75$	Область $\alpha = \rho_e / \rho_o = 1$	Область $\alpha = \rho_e / \rho_o \geq 2$
<b>Одноканальная система ремонтник</b>		
$L = (1 - \alpha) \cdot N$	$L \approx 0,8 \cdot \sqrt{N} - 0,35$	$L = \frac{1}{\alpha - 1}$
$T_p \approx L \cdot t_o$	$T_p \approx 0,8 \cdot \sqrt{N} \cdot t_o$	$T_p = \frac{\alpha \cdot t_o}{\alpha - 1}$
$\rho_o = 1$	$\rho_o = \frac{N}{(N + 0,8 \cdot \sqrt{N})}$	$\rho_o = 1/\alpha$
$\rho_e = \alpha$	$\rho_e = \frac{N}{(N + 0,8 \cdot \sqrt{N})} = \frac{N - L}{N}$	$\rho_e = 1$
$n = \alpha \cdot N$	$n = N - L$	$n = N - L = \frac{N \cdot (\alpha - 1) - 1}{(\alpha - 1)}$
<b>Многоканальная система ремонтник</b>		
$L = (1 - \alpha) \cdot N$	$L \approx 0,8 \cdot \sqrt{N} + 0,35 \cdot (c - 2)$	$L = \frac{c \cdot \alpha^{c-1}}{\alpha^c - 1}$
$T_p \approx L \cdot t_o$	$T_p = \frac{L}{\lambda} = \frac{L}{(\rho_o \cdot c)/t_o} = \frac{N \cdot L \cdot t_o}{(N - L) \cdot c}$	$T_p = \frac{\alpha^c \cdot t_o}{\alpha^c - 1}$
$\rho_o = 1$	$\rho_o = \frac{N - L}{N}$	$\rho_o = 1/\alpha$
$\rho_e = \alpha$	$\rho_e = \frac{N - L}{N}$	$\rho_e = 1$
$n = \alpha \cdot N$	$n = N - L$	$n = N - L$

## Часть 5. ВЫБОР ВАРИАНТА СИСТЕМЫ ОРГАНИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

### Глава 20. Выбор варианта СОУ с учётом показателей работы

Рассмотрим выбор варианта СОУ при наличии вероятностных и временных ограничений на основные показатели её работы на примерах.

**Пример 20.1** Определить минимальное число сотрудников фирмы, которые обеспечивают такое обслуживание клиентов, при котором клиентам не будет отказано в обслуживании и среднее время пребывания клиентов в очереди будет:

- вариант 1 - не более 25 минут;
- вариант 2 – не более 18 минут;
- вариант 3 – не более 12 минут.

Поток клиентов является пуассоновским с интенсивностью  $\lambda = 8$  1/ч, а обслуживание клиентов сотрудником фирмы подчиняется экспоненциальному закону с интенсивностью  $\mu = 5$  1/ч, т.е. среднее время обслуживания клиента одним сотрудником фирмы равно  $t_o = 12$  минут.

Исходные данные.

- Ф-схема фирмы по обслуживанию клиентов представляет СМО вида М/М/с;
- интенсивность входного потока клиентов в фирму соответствует входному потоку заявок в СМО М/М/с и равна  $\lambda = 8$  1/час;
- интенсивность обслуживания клиентов сотрудником фирмы соответствует интенсивности обслуживания заявок в СМО М/М/с и равна  $\mu = 5$  1/час;
- среднее время обслуживания клиента сотрудником соответствует среднему времени обслуживания заявок в СМО М/М/с и равно  $t_o = 1/\mu = 12$  мин.
- ограничение на среднее время пребывания клиентов в очереди в фирме соответствует ограничению на среднее время пребывания заявок в очереди

СМО М/М/с и равно для рассматриваемых вариантов  $W_1 = 24$  мин.,  $W_2 = 18$  мин.,  $W_3 = 12$  мин.

Решение.

Для СМО М/М/с среднее время пребывания заявок в очереди определяют по следующей формуле:

$$W = \frac{\rho^c \cdot t_0}{1 - \rho^c}$$

Где:  $W$  - среднее время пребывания заявок в очереди СМО вида М/М/с;

$\rho$  - загрузка одного ОА в составе СМО М/М/с, соответствует загрузке одного сотрудника;

$c$  - число ОА в СМО М/М/с, соответствует числу сотрудников фирмы, которые обслуживают клиентов.

$$\text{При этом } \rho = \lambda / (\mu \cdot c) = 8 / (5 \cdot c) = 1,6 / c$$

$$\text{Для варианта 1 имеем: } W_1 \geq \frac{\rho^{c1} \cdot t_0}{1 - \rho^{c1}} \quad \text{или} \quad 24 \geq \frac{12 \cdot \rho^{c1}}{(1 - \rho^{c1})}$$

тогда  $2 \cdot (1 - \rho^{c1}) \geq \rho^{c1}$ , после преобразования получаем:

$$0,667 \geq \left[ \frac{1,6}{c1} \right]^{c1} \quad \text{Решаем и получаем } c1 \geq 2$$

Для варианта 1 получаем: фирма должна иметь двух сотрудников, чтобы обеспечить среднее время пребывания клиентов в очереди не более 24 мин.

При этом загрузка одного сотрудника равна  $\rho = 1,6 / c1 = 1,6 / 2 = 0,8$

$$\text{Для варианта 2 имеем: } W_2 \geq \frac{\rho^{c2} \cdot t_0}{1 - \rho^{c2}} \quad \text{или} \quad 18 \geq \frac{12 \cdot \rho^{c2}}{(1 - \rho^{c2})}$$

тогда  $1,5 \cdot (1 - \rho^{c2}) \geq \rho^{c2}$ , после преобразования получаем:

$$0,6 \geq \left[ \frac{1,6}{c2} \right]^{c2} \quad \text{Решаем и получаем } c2 \geq 3$$

Для варианта 1 получаем: фирма должна иметь трёх сотрудников, чтобы обеспечить среднее время пребывания клиентов в очереди не более 18 мин.



При этом загрузка одного сотрудника равна  $\rho = 1,6/c2 = 1,6/3 = 0,533$

$$\text{Для варианта 3 имеем: } W_3 \geq \frac{\rho^{c3} \cdot t_0}{1 - \rho^{c3}} \quad \text{или} \quad 12 \geq \frac{12 \cdot \rho^{c3}}{(1 - \rho^{c3})}$$

тогда  $(1 - \rho^{c3}) \geq \rho^{c3}$ , после преобразования получаем:

$$0,5 \geq \left[ \frac{1,6}{c3} \right]^{c3} \quad \text{Решаем и получаем } c3 \geq 3$$

Для варианта 3 получаем: фирма должна иметь трёх сотрудников, чтобы обеспечить среднее время пребывания клиентов в очереди не более 12 мин.

При этом загрузка одного сотрудника равна  $\rho = 1,6/c3 = 1,6/3 = 0,533$

Следует иметь в виду, что три сотрудника фирмы смогут обеспечить среднее минимальное время пребывания клиентов в очереди, которое определяют согласно следующего выражения:

$$W_{3\min} = \frac{\rho^{c3} \cdot t_0}{1 - \rho^{c3}} = \frac{(1,6/3)^3 \cdot 12}{1 - (1,6/3)^3} = 2,14 \text{ мин}$$

**Пример 20.2.** Определить минимальное число сотрудников фирмы, которые обеспечивают такое обслуживание клиентов, при котором клиентам не будет отказано в обслуживании, а среднее время пребывания клиентов в организации будет не более 35 минут и с вероятностью 95% время пребывания будет не более 105 минут. Поток клиентов в фирму является пуассоновским с интенсивностью  $\lambda = 8 \text{ 1/ч}$ , а обслуживание клиентов сотрудником фирмы подчиняется экспоненциальному закону с интенсивностью  $\mu = 5 \text{ 1/ч}$ .

Исходные данные.

- Ф-схема фирмы по обслуживанию клиентов представляет СМО вида М/М/с;
- интенсивность входного потока клиентов в фирму соответствует входному потоку заявок в СМО М/М/с и равна  $\lambda = 8 \text{ 1/час}$ ;
- интенсивность обслуживания клиентов сотрудником фирмы соответствует интенсивности обслуживания заявок в СМО М/М/с и равна  $\mu = 5 \text{ 1/час}$ ;
- среднее время обслуживания клиента сотрудником соответствует среднему времени обслуживания заявок в СМО М/М/с и равно  $t_0 = 1/\mu = 12 \text{ мин}$ .

- ограничение на среднее время пребывания клиентов в фирме соответствует ограничению на среднее время пребывания заявок в СМО М/М/с и равно  $T = 35$  минут, а время пребывания не более 105 минут с вероятностью  $P = 0,95$ .

Решение.

Среднее время пребывания заявок в СМО М/М/с определяют по формуле:

$$T = \frac{t_0}{1 - \rho^c}$$

Где:  $T$  - среднее время пребывания заявок в очереди СМО вида М/М/с;

$\rho$  - загрузка одного ОА в составе СМО М/М/с, соответствует загрузке одного сотрудника;

$c$  - число ОА в СМО М/М/с, соответствует числу сотрудников фирмы, которые обслуживают клиентов.

$$\text{При этом } \rho = \lambda / (\mu \cdot c) = 8 / (5 \cdot c) = 1,6 / c$$

$$T \geq \frac{t_0}{1 - \rho^c} \quad \text{или} \quad 35 \geq \frac{12}{(1 - \rho^c)}$$

тогда  $2,916 \cdot (1 - \rho^c) \geq 1$ , после преобразования получаем:

$$0,657 \geq \rho^c = \left[ \frac{1,6}{c} \right]^c \quad \text{Решаем и получаем } c \geq 2$$

Получаем: фирма должна иметь двух сотрудников, чтобы обеспечить среднее время пребывания клиентов в очереди не более 35 мин. При этом загрузка одного сотрудника равна  $\rho = 1,6 / c = 1,6 / 2 = 0,8$

Далее при наличии двух сотрудников имеем:

$$P(t_{np\bar{o}} > T) = P(t_{np\bar{o}} > 35) = 0,95 = 1 - e^{-\frac{t_{np\bar{o}}}{T}} \quad \text{Тогда} \quad e^{-\frac{t_{np\bar{o}}}{T}} \leq 0,05$$

$$\text{или} \quad \frac{t_{np\bar{o}}}{T} \leq 3 \quad \text{Получаем} \quad t_{np\bar{o}} \leq 105 \text{ мин}$$

Получаем: фирма должна иметь двух сотрудников, чтобы обеспечить время пребывания клиентов в очереди не более 105 минут с вероятностью 0,95. При этом загрузка одного сотрудника равна  $\rho = 1,6 / c = 1,6 / 2 = 0,8$

**Пример 20.3.** Определить минимальное число мест в очереди для ожидания клиентами обслуживания сотрудниками фирмы, при котором вероятность отказа клиентам в обслуживании составляет не более 5%.. Клиентов обслуживают три сотрудника фирмы. Поток клиентов в фирму является пуассоновским с интенсивностью  $\lambda = 15$  1/ч, а обслуживание клиентов сотрудником фирмы подчиняется экспоненциальному закону с интенсивностью  $\mu = 5$  1/ч.

Исходные данные.

- Ф-схема фирмы по обслуживанию клиентов представляет СМО вида М/М/с/т;
- в фирме клиентов обслуживают три сотрудника, что соответствует трём ОА в составе СМО, т.е.  $c = 3$ ;
- вероятность отказа клиентам в обслуживании (вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО) составляет 5%,  $P_{отк} = 0,05$
- интенсивность входного потока клиентов в фирму соответствует входному потоку заявок в СМО М/М/с/т и равна  $\lambda = 15$  1/час;
- интенсивность обслуживания клиентов сотрудником фирмы соответствует интенсивности обслуживания заявок в СМО М/М/с/т и равна  $\mu = 5$  1/час;
- среднее время обслуживания клиента сотрудником соответствует среднему времени обслуживания заявок в СМО М/М/с и равно  $t_o = 1/\mu = 12$  мин.

Решение.

Определяем загрузку ( $\varphi$ ) СМО и загрузку одного ОА ( $\rho$ ) в составе СМО.

$$\varphi = \lambda / \mu = 15 / 5 = 3 \qquad \rho = \varphi / c = \lambda / (\mu \cdot c) = 15 / (5 \cdot 3) = 1$$

Для СМО М/М/3/т при  $\rho = 1$  вероятность отказа заявкам в обслуживании определяют по следующей формуле:

$$P_{отк} = \frac{9}{9 \cdot m + 26}$$

Где:  $m$  - ёмкость входного буфера СМО М/М/с/т

Получаем  $P_{отк} \cdot (9 \cdot m + 26) = 9$  или

$$m \geq \frac{9 - 26 \cdot P_{отк}}{9 \cdot P_{отк}} = \frac{9 - 26 \cdot 0,05}{9 \cdot 0,05} = 17,1$$

Входной буфер СМО М/М/3/м должен иметь 18 мест ( $m=18$ ) для ожидания заявками начала обслуживания.

Для СМО М/М/3/м при  $\rho=1$  также можно определить вероятность отказа заявкам в обслуживании по следующей приближённой формуле:

$$P_{отк} \approx \frac{6}{c + 6 \cdot m + 15}$$

$$\text{Получаем } m > \frac{6 - (c + 15) \cdot P_{отк}}{6 \cdot P_{отк}} = \frac{6 - 18 \cdot 0,05}{6 \cdot 0,05} = 17$$

Входной буфер СМО М/М/3/м должен иметь 18 мест ( $m=18$ )

#### Пример 20.4.

Определить минимальное число сотрудников фирмы, которые обеспечивают такое обслуживание клиентов, при котором не менее 85% клиентов будут обслужены (только менее чем 15% клиентам будет отказано в обслуживании). Места для ожидания клиентами начала обслуживания отсутствуют. Поток клиентов является пуассоновским, обслуживание клиентов подчиняется экспоненциальному закону. Интенсивность поступления клиентов в фирму  $\lambda = 9$  клиентов/ч, а интенсивность их обслуживания сотрудниками фирмы  $\mu = 3$  клиента/ч.

Исходные данные

- Ф-схема фирмы по обслуживанию клиентов представляет СМО вида М/М/с/0;
- вероятность отказа клиентам в обслуживании (вероятность отказа заявкам в обслуживании в СМО) составляет 15%,  $P_{отк} = 0,15$ ;
- интенсивность входного потока клиентов в фирму соответствует входному потоку заявок в СМО М/М/с/м и равна  $\lambda = 9$  1/час;
- интенсивность обслуживания клиентов сотрудником фирмы соответствует интенсивности обслуживания заявок в СМО М/М/с/м и равна  $\mu = 6$  1/час;

- среднее время обслуживания клиента сотрудником соответствует среднему времени обслуживания заявок в СМО М/М/с и равно  $t_0 = 1/\mu = 10$  мин.

Решение.

Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/с/0

1. Загрузка СМО:  $\varphi = \lambda / \mu$

2. Загрузка обслуживающего аппарата (ОА) СМО:

$$\rho = \frac{\varphi}{c} = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$$

3. Вероятность простоя ОА СМО:  $P_0 = \left[ \sum_{i=0}^c \frac{\varphi^i}{i!} \right]^{-1}$

4. Вероятность, что в СМО,  $i$  - заявок:

$$P_i = \frac{\varphi^i}{i!} P_0, \quad \text{где} \quad 0 \leq i \leq c$$

5. Вероятность отказа заявкам в обслуживании:

$$P_{отк} = P_c = \frac{\varphi^c}{c!} P_0$$

6. Интенсивность потока заявок, поступающих в СМО на обслуживание

$$\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda$$

7. Коэффициент использования ОА:  $U = \lambda_c / (c \cdot \mu) = (1 - P_{отк}) \cdot \rho$

8. Среднее число занятых ОА СМО  $k_{зан} = U \cdot c = (1 - P_{отк}) \cdot \varphi$

9. Среднее число заявок в очереди на обслуживание:  $Q = 0$

10. Среднее число заявок в СМО (в очереди и на обслуживании):

$$L = Q + c \cdot U = c \cdot U$$

11. Среднее время нахождения заявок в очереди СМО:  $W = 0$

12. Среднее время пребывания заявок в СМО:

$$T = \frac{1}{\mu} = t_0$$

13. Относительная пропускная способность СМО  $q = (1 - P_{отк})$

14. Абсолютная пропускная способность СМО  $A = q \cdot \lambda$

Загрузка рассматриваемой системы  $\rho = \lambda / \mu = 9/3 = 3$

Основные результаты расчетов, проведенные по рассмотренным формулам, приведены ниже в табл. 20.1

Таблица 20.1  
Показатели оценки работы сотрудников фирмы

Характеристики обслуживания	Число каналов обслуживания (сотрудников)					
	$C=1$	$C=2$	$C=3$	$C=4$	$C=5$	$C=6$
Параметр $\rho = \lambda / c$	3	1,5	1,0	0,75	0,6	0,5
Простой сотрудников $P_0$	0,25	0,117	0,076	0,061	0,0534	0,0515
Вероятность отказа клиентам в обслуживании $P_{отк} = \frac{\rho^c}{c!} P_0$	0,75	0,53	0,346	0,206	0,108	0,052
Загрузка сотрудника $U = (1 - P_{отк})\rho$	0,75	0,705	0,654	0,6	0,535	0,474
Среднее число занятых сотрудников $k_{зан} = U \cdot c$	0,75	1,410	1,962	2,4	2,675	2,844
Относительная пропускная способность СМО $q = 1 - P_{отк}$	0,25	0,47	0,654	0,794	0,892	0,948
Абсолютная пропускная способность СМО $A = q \cdot \lambda$ (клиентов/ч)	2,25	4,23	5,88	7,14	8,02	8,53
Вариант, отвечающий требованиям зала					(*)	

(\*) - отмечен вариант решения, соответствующий поставленной цели.

Вариант решения, для которого  $C=5$ , отвечает условию поставленной задачи, поскольку в этом случае пропускная способность системы составляет 89,2% и больше требуемой. Поэтому для организации запланированного режима работы фирмы требуется иметь пять сотрудников.

### Пример 20.5.

Работу с типовыми документами нормативной отчетности в фирме проводят три сотрудника. Возможны два варианта организации их работы. Варианты Ф-схем в виде СеМО, отражающие работу трёх сотрудников фирмы с типовыми документами нормативной отчетности в количестве от 6 до 10, приведены на Рис.20.1 и Рис.20.2.

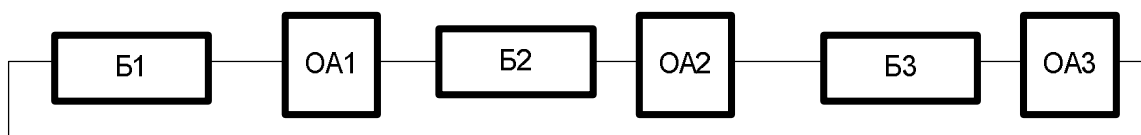


Рис. 20.1 Ф-схема СеМО с последовательной обработкой документов сотрудниками фирмы (вариант-1).

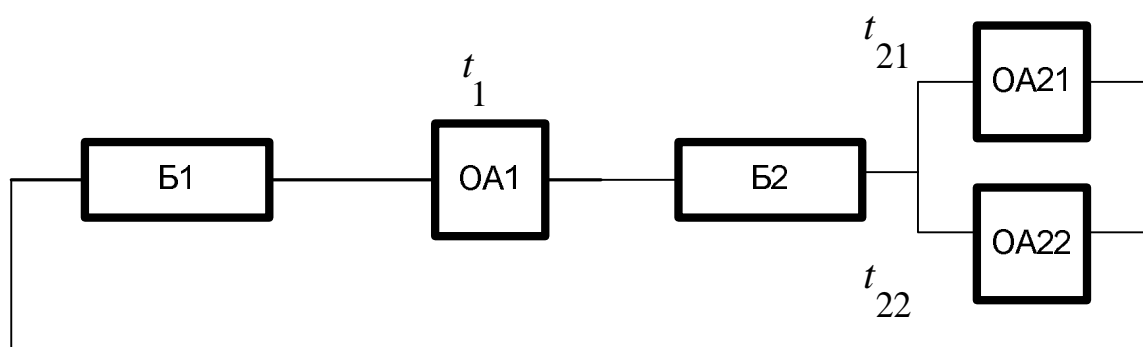


Рис. 20.2 Ф-схема СеМО с последовательно-параллельной обработкой документов сотрудниками фирмы (вариант-2).

Для варианта-1 Ф-схема приведена на Рис.20.1, среднее время обработки документа составляет по одному часу на каждой фазе обработки, т.е. у каждого сотрудника.  $t_1 = t_2 = t_3 = 1$  час.

Для варианта-2 Ф-схема приведена на Рис.20.2, вторая и третья фазы обработки документов объединены и среднее время обработки документов на каждой из этих фаз составляет 2 часа.  $t_1 = 1$  час,  $t_2 = t_3 = 2$  часа

Время обработки документов сотрудниками фирмы подчинено экспоненциальному закону. Требуется сравнить два варианта и выбрать наилучший по критерию минимизации среднего времени обработки документа при проведении нормативной отчётности.

Для оценки показателей функционирования и сравнения рассматриваемых вариантов, Ф-схемы которых представляют замкнутые СеМО, используем метод Базена. Расчёты проводим в следующей последовательности.

Вариант-1.

Определяем коэффициенты  $X_i$  для каждой СМО в составе СеМО,  $i = 1, 3$ .

$$X_1 = 1, \quad X_i = \frac{t_i}{t_1} \cdot P_{li} \cdot X_1, \quad \text{получаем: } X_2 = 1, \quad X_3 = 1$$

Создаём и заполняем таблицу Базена, табл 20.1 (столбцы 1-3):

- первый столбец таблицы и строку  $n=0$  заполняем единицами;

$$g(n,1) = g(0,m) = 1;$$

- остальные клетки таблицы последовательно заполняем числами, вычисленными по следующей формуле:

$$g(n,m) = g(n,m-1) + X_m \cdot g(n-1,m).$$

Для оценки работы СеМО используем следующие показатели:

- загрузку СМО-1 (соответствует загрузке сотрудника-1), определяем по следующей формуле:

$$\rho_1 = \frac{G(N-1)}{G(N)};$$

вычисленные значения  $\rho_1$  в зависимости от (N) приведены в табл 20.2 (столбец 4);

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО (документов в фирме), определяем по следующей формуле:

$$T_{\text{ц}} = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1}$$

Вычисленные значения  $T_{\text{ц}}$  в зависимости от (N) приведены в табл 20.2 (столбец 5).

#### Вариант- 2

Определяем коэффициенты  $X_i$  для каждой СМО в составе СеМО,  $i = 1, 2$ .

$$X_1 = 1, \quad X_i = \frac{t_i}{t_1} \cdot P_{li} \cdot X_1, \quad \text{получаем: } X_2 = 2,$$

Создаём и заполняем таблицу Базена, табл 20.2 (столбцы 1-3):

- первый столбец таблицы и строку  $n=0$  заполняем единицами;

$$g(n,1) = g(0,m) = 1;$$



- остальные клетки таблицы последовательно заполняем числами, вычисленными по следующей формуле:

$$g(n,m) = g(n,m-1) + 0,5 X_m[g(n-1,m) + g(n-1,m-1)].$$

Для оценки работы СеМО используем следующие показатели:

-загрузку СМО-1 (соответствует загрузке сотрудника-1), определяем по следующей формуле:

$$\rho_1 = \frac{G(N-1)}{G(N)};$$

вычисленные значения  $\rho_1$  в зависимости от (N) приведены в табл 20.3 (столбец 3);

- среднее время цикла обработки заявок в СеМО (документов в фирме), определяем по следующей формуле:

$$T_u = \frac{N \cdot t_1}{\rho_1}$$

Вычисленные значения  $T_u$  в зависимости от (N) приведены в табл 20.3 (столбец 4).

Сравнение вариантов по показателю  $T_u$  приведено в табл.20.4

Таблица 20.2

Таблица Базена для СеМО вариант-1.

Значения n от 0 до N	СМО-1 $X_1$	СМО-2 $X_2$	СМО-3 $X_3$	$\rho_1$	$T_u$
Столбец 0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	----	----
1	1	2	3	0,33	3
2	1	3	6	0,50	4
3	1	4	10	0,60	5
4	1	5	15	0,667	6
5	1	6	21	0,714	7
6	1	7	28	0,750	8
7	1	8	36	0,777	9
8	1	9	45	0,800	10
9	1	10	55	0,818	11
10	1	11	66	0,833	12

Таблица 20.3

Таблица Базена для СеМО вариант-2.

Значения п от 0 до N	СМО-1 $X_1$	СМО-2 $X_2$	$\rho_1$	$T_y$
Столбец 0	1	2	3	4
0	1	1	----	----
1	1	3	0,330	3,00
2	1	5	0,600	3,33
3	1	7	0,714	4,20
4	1	9	0,777	5,15
5	1	11	0,818	5,44
6	1	13	0,846	7,09
7	1	15	0,867	8,06
8	1	17	0,882	9,07
9	1	19	0,895	10,05
10	1	21	0,905	11,04

Таблица 20.4

Сравнение результатов варианта-1 и варианта-2.

	$N = 6$	$N = 7$	$N = 8$	$N = 9$	$N = 10$
$T_y$ вар.1	8,00	9,00	10,00	11,00	12,00
$T_y$ вар.2	7,09	8,06	9,07	10,05	11,04
$\Delta T_y = \frac{T_{y1} - T_{y2}}{T_{y1}}$	0,114	0,104	0,093	0,086	0,080

С увеличением количества документов, обрабатываемых в фирме, выигрыш во времени обработки документов при варианте-2, по сравнению с вариантом-1, уменьшается. При этом максимальный выигрыш при  $N=6$ , составляет 11,4%, а минимальный при  $N=10$  составляет 8 %.

При  $N > 10$  выигрыш варианта-2 по времени обработки документов по сравнению с вариантом-1, согласно метода комбинаторного анализа, определяют по выражению:

$$\Delta T_y = 1/(N + 2)$$

### Пример 20.6

Работу с типовыми документами нормативной отчетности в фирме проводят пять сотрудников. Каждый документ проходит последовательно обработку всеми сотрудниками и считается обработанным после обработки

пятым сотрудником. Ф-схема обработки нормативных документов пятью сотрудниками фирмы приведена на рис. 20.3.

Суммарное время обработки документа всеми сотрудниками с учётом времени ожидания в очередях, считаем средним временем цикла обработки документа. Количество нормативных документов может быть: 10, 20 или 30.

Возможны различные варианты размещения сотрудников по этапам обработки документов. Средние времена обработки документов сотрудниками, в зависимости от выбранного варианта организации процесса работы с нормативными документами, приведены в табл. 20.5.

$t_{ij}$  - среднее время обработки документа  $i$ -тым сотрудником при  $j$ -том варианте работы.

Необходимо выбрать вариант с наименьшим суммарным временем обработки документа (т.е. минимальное время цикла). Времена обработки документов сотрудниками подчинено экспоненциальному распределению.

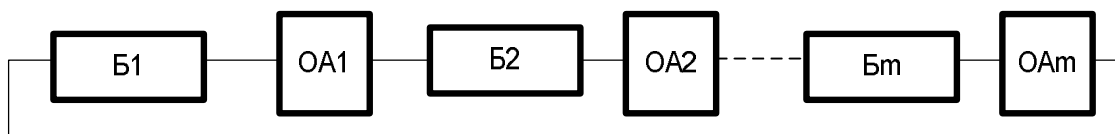


Рис. 20.3 Ф-схема обработки документов в фирме

Таблица 20.5

Среднее времена обработки документов сотрудниками (в минутах).

Варианты	$t_{1j}$	$t_{2j}$	$t_{3j}$	$t_{4j}$	$t_{5j}$
1	10	20	20	20	20
2	10	15	15	25	25
3	10	10	20	25	25
4	10	15	15	20	30
5	10	10	10	30	30

Решение.

Для оценки среднего времени цикла обработки документов (среднего времени цикла обработки заявок в замкнутой СеМО), используем метод «узкое место». Согласно этого метода для выбора наилучшего варианта и оценки  $T_u$  используют следующие формулы

$$T_{ij} = N \cdot t_{\max ij} + \sum_{i=1}^4 (t_{ij} / t_{\max ij}) \cdot t_{ij}$$

$$T_{\text{лучшее}} = \min_j T_{ij}$$

Расчёты проведённые по этим формулам приведены в табл 20.6.

Таблица 20.6

Значения Тц (минуты) для рассматриваемых вариантов

Варианты	N=10	N=20	N=30
Вариант 1	265	465	665
Вариант 2	297	547	797
Вариант 3	299	549	799
Вариант 4	331,7	631,7	931,7
Вариант 5	340	640	940

Анализ результатов, приведённых в табл. 20.6 показывает, чем более сбалансирована замкнутая многофазная СеМО по времени обработки заявок в отдельных фазах, тем меньше среднее время цикла обработки заявок.

## Глава 21. Выбор варианта СОУ с учётом затрат на сопровождение

Рассмотрим выбор варианта СОУ, согласно критерию минимизации затрат на её эксплуатацию, на примерах.

### Пример 21.1

Для отдела фирмы по диагностике и ремонту серверов следует выбрать штатный состав сотрудников. В качестве сотрудников рассматривают два вида специалистов:

- сотрудники  $C1$ , интенсивность работы которых по диагностике серверов равна 3 сервера в час ( $\mu_1 = 3$  1/час);

- сотрудники  $C2$ , интенсивность работы которых по диагностике серверов равна 4 сервера в час ( $\mu_2 = 4$ ) 1/час,.

При этом почасовая оплата сотрудника  $C1$  равна  $S_1 = 6$  у.е./час, а сотрудника  $C2$  равна  $S_2 = 10$  у.е./час. Входной поток серверов на диагностику соответствует пуассоновскому, с интенсивностью  $\lambda = 2$  1/час. Время диагностики серверов у каждого из мастеров соответствует экспоненциальному закону.

Фирма подсчитала, что нахождение одного сервера в очереди приносит убыток (упущенную выгоду) в размере  $S_{оч} = 15$  у.е./час.

Необходимо выбрать такой состав специалистов для работы в отделе диагностики, который минимизирует затраты фирмы.

При этом руководство фирмы рассматривает три варианта ( $j = 1, 2, 3$ ): :

- вариант В1, один сотрудник  $C1$ ;
- вариант В2, один сотрудник  $C2$ ;
- вариант В3, два сотрудника  $C1$ .

Для выбора наилучшего варианта ( $l$ ) организации ремонтных работ, руководство фирмы использует критерий минимизации затрат и формулу:

$$S_l = \min_j S_j = \min_j \sum_{i=1}^2 n_{ij} \cdot S_i + S_{оч} \cdot Q_j$$

Решение.

Ф-схемы рассматриваемых вариантов организации работы отдела фирмы по диагностике серверов, имеют вид:

- вариант В1, СМО вида М/М/1;
- вариант В2, СМО вида М/М/1;
- вариант В3, СМО вида М/М/2;

Основные показатели оценки качества работы СМО М/М/1 и М/М/2 приведены в табл.21.1

Таблица 21.1.

Основные показатели оценки качества работы СМО М/М/1 и М/М/2

№	СМО М/М/1	СМО М/М/2
1	Загрузка обслуживающего аппарата	
	$\rho = \lambda / \mu$	$\rho = \lambda / (2 \cdot \mu)$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата	
	$P_0 = 1 - \rho$	$P_0 = (1 - \rho) / (1 + \rho)$
3	Среднее число заявок в очереди на обслуживание	
	$Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$	$Q = \frac{2 \cdot \rho^3}{1 - \rho^2}$
4	Среднее число заявок в СМО, в очереди и на обслуживании	
	$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$	$L = \frac{2 \cdot \rho}{1 - \rho^2}$
5	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО	
	$W = \frac{\rho}{(1 - \rho) \cdot \mu}$	$W = \frac{\rho^2}{(1 - \rho^2) \cdot \mu}$
6	Среднее время пребывания заявок в СМО	
	$T = \frac{1}{(1 - \rho) \cdot \mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$	$T = \frac{1}{(1 - \rho^2) \cdot \mu}$

Результаты расчетов по формулам табл. 21.1 приведены в табл. 21.2

Таблица 21.2

Сравнительная оценка вариантов работы отдела по диагностике серверов

Показатели обслуживания	Вариант В1	Вариант В2	Вариант В3
	Один сотрудник $C1$	Один сотрудник $C2$	Два сотрудника $C1$
Интенсивность поступления серверов $\lambda$	2	2	2
Интенсивность обслуживания сервера сотрудником, $\mu$	3	4	3
Загрузка одного сотрудника, $\rho$	0,67	0,5	0,333
Среднее число серверов в очереди, $Q$	1,36	0,5	0,083
Среднее число серверов в отделе ремонта, $L$	2	1	0,416
Среднее время пребывания серверов в очереди, $W$ (час)	0,67	0,25	0,0415
Среднее время пребывания сервера в отделе ремонта, $T$ (час)	1	0,5	0,208
Общие затраты фирмы у.е/час	26,4	17,5	13,245

Расчеты, проведенные по критерию минимизации затрат и представленные в последней строке табл.21.2, показывают, что наилучшим вариантом решения, согласно критерия минимизации затрат, является выбор двух специалистов  $C1$ .

Это обеспечивает минимальные затраты фирмы в размере 13,245 у.е./час.

### Пример 21.2.

Руководству фирмы необходимо определить численный состав сотрудников отдела по обслуживанию запросов клиентов с учётом минимизации общих затрат: затрат на зарплату сотрудников и затрат на создание комфортных условий для клиентов ожидающих обслуживания.

Ф-схему работы сотрудников отдела по обслуживанию запросов клиентов, руководство фирмы представляет в виде многоканальной СМО М/М/с.

Поток запросов клиентов в фирму (следовательно входной поток заявок в СМО) соответствует пуассоновскому потоку с интенсивностью  $\lambda = 81$  1/час, т.е.  $\lambda = 1,35$  1/мин. Средний интервал времени между входными заявками  $t_{вх} = 1/\lambda = 0,74$  мин

Обслуживание запросов клиентов подчиняется экспоненциальному закону, (это соответствует экспоненциальному закону обслуживания заявок в СМО) с интенсивностью  $\mu = 30$  1/час, т.е.  $\mu = 0,5$  1/мин, а среднее время обслуживания  $t_0 = 1/\mu = 2$  мин

Общие затраты и выбор наилучшего варианта ( $l$ ) руководство фирмы определяет согласно критерия минимизации затрат по формуле:

$$Z_l = \min_j Z_j = \min_j (z_c \cdot c_j + z_q \cdot Q_j)$$

$Z_j$  - затраты фирмы при  $j$ -ом варианте обслуживания клиентов;

$c_j$  - число сотрудников, обеспечивающих  $j$ -ый вариант обслуживания

Клиентов (соответствует числу ОА в составе СМО);

$Q_j$  - число клиентов находящихся в очереди и ожидающих обслуживания

при  $j$ -ом варианте обслуживания клиентов (соответствует числу заявок, находящихся в очереди СМО);

$z_c$  - затраты фирмы на содержание одного сотрудника для обслуживания запросов клиентов ( $z_c = 2$  у.е./сотрудник);

$z_q$  - затраты фирмы на создание комфортных условий для нахождения одного клиента в очереди ( $z_q = 3$  у.е./клиент).

Решение.

1. Определяем минимальное число ОА в составе СМО, обеспечивающих стационарный режим работы СМО.

$$c_{\min} > \frac{\lambda}{\mu} = \frac{81}{30} = 2,7 \quad )$$

Тогда число ОА в СМО (сотрудников для работы с клиентами)  $c = \varphi \geq 3$ .



Далее проводим расчеты для  $c \geq 3$  для определения  $Z_{\min}$ , начиная с  $c = 3$ .

2. Загрузка ОА в составе СМО (загрузка сотрудника).

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{81}{3 \cdot 30} = 0,9$$

3. Вероятность простоя СМО (вероятность отсутствия клиентов).

$$P_0 = \left[ \sum_{i=0}^c \frac{\varphi^i}{i!} + \frac{\varphi^{c+1}}{c! \cdot (c - \varphi)} \right]^{-1} = 0,025$$

4. Вероятность ожидания заявкой (клиентом) начала обслуживания

$$P_w = 1 - \sum_{i=0}^{c-1} P_i = \frac{\varphi^c}{(c-1)! \cdot (c - \varphi)} \cdot P_0 = 0,735$$

5. Среднее число заявок в очереди СМО ( $Q$ ) и в СМО ( $L$ ), соответствует среднему числу клиентов в очереди на обслуживание и в помещении фирмы.

$$Q = \sum_{i=c}^{\infty} (i - c) \cdot P_i = \frac{\varphi^{c+1} \cdot c \cdot P_0}{c! \cdot (c - \varphi)^2} = 7,35$$

$$L = Q + c \cdot \rho = 7,35 + 3 \cdot 0,9 = 10,05$$

6. Среднее время нахождения заявок в очереди СМО ( $W$ ) и в СМО ( $T$ ), соответствует среднему времени пребывания клиентов в очереди и в помещении фирмы.

$$W = \frac{Q}{\lambda} = 5,44 \text{ мин} \quad )$$

$$T = \frac{L}{\lambda} = W + \frac{1}{\mu} = 7,44 \text{ мин}$$

7. Затраты на вариант системы, для которого проведены расчёты.

$$Z_j = (2 \cdot c_j + 3 \cdot Q_j)$$

8. Последовательно повторяем пп2 – пп7 для  $c=4$ ,  $c=5$ ,  $c=6$  и  $c=7$ .

9. Выбираем наилучший вариант системы по критерию минимизации затрат.

$$Z_l = \min_j Z_j = \min_j (2 \cdot c_j + 3 \cdot Q_j)$$

Полученные результаты приведены в табл.21.3

Таблица 21.3

## Результаты решения примера 21.2

Параметры СМО	Значения параметров СМО				
	C=3	C=4	C=5	C=6	C=7
$\rho_j = \varphi / c_j = 2,7 / c_j$	0,9	0,675	0,54	0,45	0,3857
$P_{0j}$	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
$Q_j$	7,35	0,81	0,2	0,04	0,0135
$L_j$	10,05	3,51	2,9	2,74	2,7135
$W_j$ (мин)	5,44	0,6	0,15	0,03	0,01
$T_j$ (мин)	7,44	2,6	2,15	2,03	2,01
$2 \cdot c_j$ у.е.	6	8	10	12	14
$3 \cdot Q_j$ у.е.	22,05	2,43	0,6	0,12	0,04
$Z_j = 2 \cdot c_j + 3 \cdot Q_j$ у.е.	28,05	10,43	10,6	12,12	14,04
Наилучший вариант		(*)			
	Расчеты с использованием приближенной формулы для $Q_j$				
$Q_j = \frac{c_j \cdot \rho_j^{c_j+1}}{(1 - \rho_j^{c_j})}$	7,26	0,707	0,133	0,022	0,0035
$Z_j = 2 \cdot c_j + 3 \cdot Q_j$ у.е.	27,8	10,12	10,4	12,06	14,01
Наилучший вариант		(*)			

### Пример 21.3.

Руководству фирмы для организации работы СОИ необходимо выбрать канал связи. Поток заявок в канал связи считают пуассоновским с интенсивностью 4 заявки/с. Время передачи заявок соответствует экспоненциальному закону с интенсивностью 10 заявок/с. Возможны три варианта выбора канала связи: в первом варианте помехи при передаче данных практически отсутствуют и ими можно пренебречь, во втором варианте они составляют 10%, а в третьем – 20%. Наличие помех требует повторную передачу данных с соответствующей вероятностью. Все каналы связи являются платными. За использование канала связи (за время пребывания заявки в очереди и время передачи) нужно платить:

- в первом варианте  $z_1 = 3$  у.е./заявка с);
- во втором варианте  $z_2 = 2,25$  у.е./заявка с);
- в третьем варианте  $z_3 = 2$  у.е./заявка с)

Необходимо выбрать вариант ( $l$ ) минимизирующий затраты фирмы, согласно критерию.

$$Z_l = \min_j Z_j = \min_j (z_j \cdot T_j)$$

$Z_j$  - затраты фирмы при использовании  $j$ -ого варианта канала связи;

$z_j$  - стоимость пребывания заявки в  $j$ -ом канале связи в течение 1 сек;

$T_j$  - среднее время пребывания заявки в  $j$ -ом канале связи (сек).

Ф-схема СМО, отражающая работу канала связи, имеющая символическое обозначение М/М/1 с обратной связью, приведена на рис.21.1

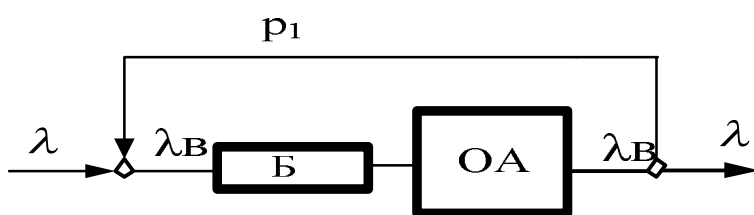


Рис. 21.1 Ф-схема СМО, отражающая работу канала связи.

## Решение

В Ф-схеме СМО показано, что после обработки заявки в ОА она с вероятностью «Р1», повторно поступает на обработку в СМО., что учитывает повторную передачу данных из-за возможных сбоев в работе канала связи, которые имеют вероятностный характер.

Рассматриваемую СМО отличают следующие особенности:

- учитывает экспоненциальное распределение времени передачи данных через канал связи;
- учитывает влияние окружающей среды, т. е. помех, на повторную передачу данных за счет наличия обратной связи;
- позволяет исследовать работу канала связи и оценить его реальные характеристики.

Показателями оценки качества работы рассматриваемой СМО являются:

- загрузка ОА СМО, имитирующая загрузку работы канала связи;
- среднее число заявок в очереди СМО, соответствующих числу запросов на передачу данных, находящихся в очереди канала;
- среднее число заявок в СМО, соответствующее среднему суммарному числу запросов в очереди и в канале связи;
- среднее время нахождения заявок в очереди СМО, соответствующее среднему времени нахождения запросов в очереди на передачу через канал связи;
- среднее время пребывания заявок в СМО, соответствующее среднему суммарному времени пребывания запроса в очереди и в канале связи;

Для оценки показателей качества СМО введем следующие обозначения:

$\lambda$  - интенсивность потока заявок, подлежащего передаче;

$\lambda_B$  - интенсивность входящего в СМО потока заявок с учётом повторной передачи;

$t_0$  - среднее время обработки заявок в ОА СМО;

$\mu_0 = 1/t_0$  - интенсивность обработки заявок в ОА СМО;

$p_1$  – вероятность повторной обработки заявок в СМО;

$\rho$  - загрузка ОА СМО;

$Q$  - среднее число заявок в очереди СМО;

$L$  - среднее число заявок в СМО (в очереди и на обслуживании);

$W$  - среднее время нахождения заявок в очереди СМО;

$T$  - среднее время пребывания заявок в СМО;

Для оценки характеристик функционирования рассматриваемой СМО, используют аналитические выражения в следующем порядке:

1. Определяют интенсивность  $\lambda_B$  реального входящего потока заявок в СМО с учетом повторной обработки заявок с вероятностью  $p_1$ . Уравнение потоков

для СМО имеет вид  $\lambda + \lambda_B \cdot p_1 = \lambda_B$

Решая уравнение, получаем:

$$\lambda_B = \frac{\lambda}{1-p_1} = \lambda \cdot \alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{1}{1-p_1}$$

$\alpha$  - число входов заявки в ОА за время пребывания её в СМО.

2. Определяют загрузку обслуживающего аппарата СМО:

$$\rho = \frac{\lambda_B}{\mu}$$

3. Определяют среднее число заявок в очереди:

$$Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

4. Определяют среднее число заявок в СМО:

$$L = Q + \rho = \frac{\rho}{1-\rho}$$

5. Определяют, используя формулу Литтла, среднее время ожидания заявок в очереди с учетом того, что заявка « $\alpha$ » раз поступает на обслуживание за время пребывания её в СМО

$$W = \frac{Q \cdot \alpha}{\lambda_B}$$

б. Определяют, используя формулу Литтла, среднее время пребывания заявок в СМО с учетом того, что заявка « $\alpha$ » раз поступает на обслуживание за время пребывания ее в СМО

$$T = \frac{L \cdot \alpha}{\lambda_B}$$

Для быстрой сравнительной оценки альтернативных вариантов каналов связи, только по показателю среднее время доставки пакетов данных, следует использовать следующее выражение:

$$T = \frac{L \cdot \alpha}{\lambda_B} = \frac{1}{(1 - p_1)\mu - \lambda}$$

Исходные данные.  $\lambda = 4$  заявки/с,  $\mu = 10$  заявок/с

Для вариантов 1, 2 и 3 соответственно имеем:

$$p_{11} = 0,0 \quad p_{12} = 0,1 \quad p_{13} = 0,2$$

Последовательно используя формулы для оценки работы канала без помех и с помехами, получаем результаты, которые приведены в табл. 21.4

Таблица 21.4

Сравнение результатов трёх вариантов работы канала связи

Показатели сравнения	Канал без помех	Канал с помехами $p = 0,1$	Канал с помехами $p = 0,2$
Номер варианта	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$p_{1j}$	0	0,1	0,2
$\alpha$	1	1,11	1,25
$\lambda_{вх}$ 1/с	4	4,44	5
$\rho$	0,4	0,444	0,5
$Q$	0,267	0,355	0,5
$L$	0,667	0,8	1,0
$W$ с	0,067	0,09	0,125
$T$ с	0,167	0,2	0,250
$Z_j = z_j \cdot T_j$ у.е./заявка	0,5	0,45	0,5
$Z_l = \min_j Z_j$ у.е./заявка		0,45 (*)	

Согласно критерия минимизации затрат лучшим вариантом является вариант 2.

## Глава 22. Выбор варианта СОУ с учётом дохода от эксплуатации

Рассмотрим выбор варианта СОУ, согласно критерия максимизации дохода, на примерах.

**Пример 22.1** Руководителю офиса необходимо для клиентов, которые ожидают обслуживания в окне справок, определить такое число мест в очереди, которое обеспечить максимальный доход офиса. В окне справок работает один автомат, который отвечает на запросы клиентов. Поток запросов клиентов пуассоновский с интенсивностью  $\lambda = 10$  1/час, а обслуживание клиентов соответствует экспоненциальному закону с интенсивностью  $\mu = 10$  1/час. Доход, получаемый от обслуживания одного клиента, составляет  $z_1 = 3$  у.е./(*кл·час*), а затраты на содержание одного места в очереди и создание для клиента комфортных условий составляют  $z_2 = 1$  у.е./(*место·час*). Если все места в очереди заняты, то пришедший клиент покидает офис не получив обслуживания.

Исходные данные.

$\lambda = 10$  1/час - интенсивность поступления запросов от клиентов;

$\mu = 10$  1/час - интенсивность обслуживания запросов автоматом;

$z_1 = 3$  у.е./(*кл·час*) - доход от обслуживания одного клиента;

$z_2 = 1$  у.е./(*место·час*) - затраты на содержание одного места в очереди и создание для клиента комфортных условий;

$z_3 = 1$  у.е./*час* - затраты на содержание автомата в окне справок.

$c = 1$  - число автоматов в окне справок, которые обслуживают клиентов;

Решение.

Работу окна справок офиса по обслуживанию клиентов можно представить в виде Ф-схемы, приведённой на Рис.22.1, которая соответствует СМО вида М/М/1/∞.

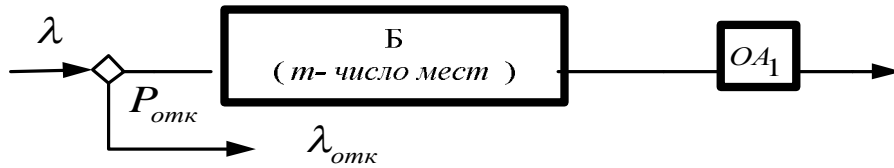


Рис 22.1 Ф-схема СМО М/М/1/м, отражающая работу окна справок офиса.

Реальный доход офиса  $DP$ , получаемый от работы окна справок определяют по формуле.

$$DP = D - Z$$

Где  $D$  - доход, получаемый в офисе от работы окна справок;

$Z$  - затраты офиса на содержание мест в очереди к окну справок и поддержку автомата.

$$D = z_1 \cdot \lambda_{вых}$$

$\lambda_{вых}$  - интенсивность потока клиентов, которые были обслужены.

$$Z = z_2 \cdot m + z_3 \cdot c$$

$m$  - число мест в очереди для клиентов к окну справок.

Для СМО М/М/1/м загрузку СМО, имитирующую работу окна справок, определяют по формуле:

$$\rho = \lambda / \mu = 10 / 10 = 1$$

При  $\rho = 1$  интенсивность потока клиентов, которым отказано в обслуживании определяют по формуле:

$$\lambda_{отк} = \lambda \cdot P_{отк} = \frac{\lambda}{m+2}$$

Для СМО М/М/1/м загрузку (коэффициент использования) ОА СМО, имитирующего работу автомата окна справок, определяют по формуле:

$$U = (1 - P_{отк}) \cdot \rho = \frac{m+1}{m+2}$$



При  $\rho = 1$  абсолютную пропускную способность СМО М/М/1/м, т.е. интенсивность выходного потока заявок, соответствующую интенсивности потока обслуженных клиентов, определяют по формуле

$$A = \lambda_{\text{вых}} = \lambda \cdot \frac{m+1}{m+2}$$

Тогда формулу для оценки максимального реального дохода офиса от работы окна справок можно представить в следующем виде:

$$DP_l = \max_m(D - Z) = \max_m(z_1 \cdot \lambda \cdot \frac{m+1}{m+2} - z_2 \cdot m - z_3)$$

Берём первую производную выражения для  $DP_l$  по  $m$ , приравняем её нулю и определяем значение  $m$  (число мест в очереди к окну справок, при котором доход офиса будет максимальным). Получаем:

$$(DP_l)' = \frac{z_1 \cdot \lambda(m+2) - z_1 \cdot \lambda \cdot (m+1)}{(m+2)^2} - z_2 = 0$$

Решаем полученное уравнение и находим значение  $m$

$$m = -1 + \sqrt{\frac{z_1}{z_2} \cdot \lambda - 3}$$

Подставляя исходные данные и получаем:

$$m = -1 + \sqrt{\frac{3}{1} \cdot 10 - 3} = 4,2$$

Проведём оценку величины дохода при заданных исходных для разных значений  $m$

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$DP$ (у.е./час)	14,0	18,0	19,5	20,0	20,0	19,7	19,25	18,67	18,0

**Пример 22.2** Руководителю офиса необходимо для клиентов, которые ожидают обслуживания в окне справок, определить такое число мест в очереди, которое обеспечить максимальный доход офиса. В окне справок работают два автомата, которые отвечают на запросы клиентов. Поток запросов клиентов пуассоновский с интенсивностью  $\lambda = 20$  1/час, а обслуживание клиентов каждым автоматом соответствует экспоненциальному закону с

интенсивностью  $\mu = 10$  1/час. Доход, получаемый от обслуживания одного клиента, составляет  $z_1 = 3$  у.е./(*кл · час*) , а затраты на содержание одного места в очереди и создание для клиента комфортных условий составляют  $z_2 = 1$  у.е./(*место · час*) . Если все места в очереди заняты, то пришедший клиент покидает офис не получив обслуживания.

Исходные данные.

$\lambda = 10$  1/час - интенсивность поступления запросов от клиентов;

$\mu = 10$  1/час - интенсивность обслуживания запросов сотрудником;

$z_1 = 3$  у.е./(*кл · час*) - доход от обслуживания одного клиента;

$z_2 = 1$  у.е./(*место · час*) - затраты на содержание одного места в очереди и создание для клиента комфортных условий;

$z_3 = 1$  у.е./*час* - затраты на содержание автомата в окне справок.

$c = 2$  - число автоматов в окне справок, которые обслуживают клиентов.

Решение.

Работу окна справок офиса по обслуживанию клиентов можно представить в виде Ф-схемы, приведённой на Рис.22.1, которая соответствует СМО вида М/М/2/м.

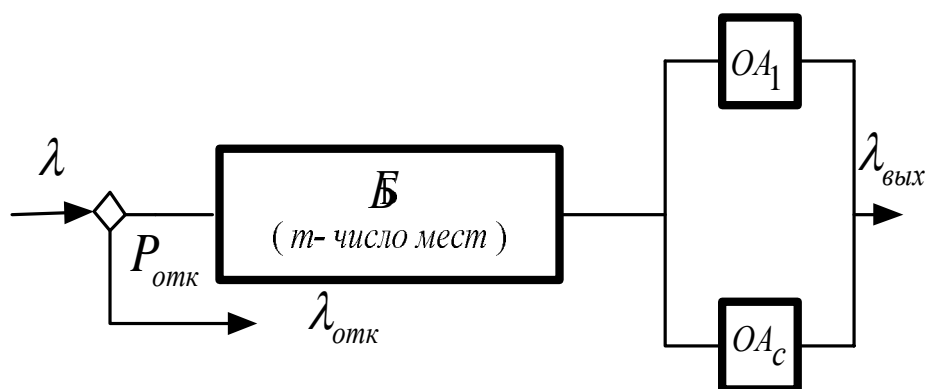


Рис 22.2 Ф-схема СМО М/М/2/м, отражающая работу окна справок офиса.

Реальный доход офиса  $DP$ , получаемый от работы окна справок определяют по формуле.

$$DP = D - Z$$

Где  $D$  - доход, получаемый в офисе от работы окна справок;

$Z$  - затраты офиса на содержание мест в очереди к окну справок и поддержку автомата.

$$D = z_1 \cdot \lambda_{\text{вых}}$$

$\lambda_{\text{вых}}$  - интенсивность потока клиентов, которые были обслужены.

$$Z = z_2 \cdot m + z_3 \cdot c$$

$m$  - число мест в очереди для клиентов к окну справок.

Для СМО М/М/2/м загрузку СМО, имитирующую работу окна справок, определяют по формуле:

$$\rho = \lambda / (2 \cdot \mu) = 20 / (2 \cdot 10) = 1$$

При  $\rho = 1$  интенсивность потока клиентов, которым отказано в обслуживании определяют по формуле:

$$\lambda_{\text{отк}} = \lambda \cdot P_{\text{отк}} = \frac{2 \cdot \lambda}{(2m + 5)}$$

Для СМО М/М/2/м загрузку (коэффициент использования) ОА СМО, имитирующего работу автомата окна справок, определяют по формуле:

$$U = (1 - P_{\text{отк}}) \cdot \rho = \frac{2m + 3}{(2m + 5)}$$

При  $\rho = 1$  абсолютную пропускную способность СМО М/М/2/м, т.е. интенсивность выходного потока заявок, соответствующую интенсивности потока обслуженных клиентов, определяют по формуле

$$A = \lambda_{\text{вых}} = \lambda \cdot \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)}$$

Тогда формулу для оценки максимального реального дохода офиса от работы окна справок можно представить в следующем виде:

$$DP_l = \max_m (D - Z) = \max_m (z_1 \cdot \lambda \cdot \frac{2m + 3}{2m + 5} - z_2 \cdot m - 2 \cdot z_3)$$

Берём первую производную выражения для  $DP_l$  по  $m$ , приравниваем её нулю и определяем значение  $m$  (число мест в очереди к окну справок, при котором доход офиса будет максимальным).

$$(DP_l)^1 = \frac{2 \cdot z_1 \cdot \lambda \cdot (2m+5) - z_1 \cdot \lambda \cdot (2m+3) \cdot 2}{(2m+5)^2} - z_2 = 0$$

Решаем полученное уравнение и находим значение  $m$

$$m = -2,5 + \sqrt{\frac{z_1}{z_2} \cdot \lambda}$$

Подставляем исходные данные и получаем:

$$m = -2,5 + \sqrt{\frac{3}{1} \cdot 20} = 5,25$$

Оценка дохода при заданных исходных данных для разных значений  $m$

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$DP(\text{у.е./час})$	34,0	39,85	42,66	44,08	44,77	45,0	44,94	44,68	44,29

**Пример 22.3** Необходимо провести сравнительный анализ результатов, полученных при решении двух предыдущих примеров, в которых была рассмотрена работа автоматов в окне справок по обслуживанию клиентов.

Исходные данные вариантов соответствуют исходным данным, которые были приведены в ранее рассмотренных примерах.

$\lambda = 10$  1/час – интенсивность входного потока клиентов (заявок к ОА);

$\mu = 10$  1/час - интенсивность обслуживания клиентов (заявок одним ОА);

$c$  - число автоматов в окне справок (число ОА в составе СМО);

$z_1 = 3$  у.е./(*кл · час*) - доход от одного обслуженного клиента;

$z_2 = 1$  у.е./(*место · час*) затраты на содержание одного места в очереди;

$z_3 = 1$  у.е./*час* - затраты на содержание одного автомата в окне справок.

Вариант 1. Работает одно окно справок, в котором один автомат.

Соответствует одна Ф-схема СМО вида М/М/1/м.

Вариант 2. Работают раздельно два окна справок, в каждом один автомат.

Отдельная очередь к каждому окну справок. Соответствует двум отдельным Ф-схемам СМО, каждая вида М/М/1/м.

Вариант 3. Работают два окна справок, а в каждом один автомат. Общая очередь к окнам справок. Соответствует одной Ф-схеме СМО вида М/М/2/м.

Вариант 4. Работают два окна справок, а каждому один автомат. Общая очередь к окнам справок соответствует одной Ф-схеме СМО вида М/М/2/2m. (число мест в очереди этой СМО соответствует суммарному числу мест в очереди для двух СМО вариант 2).

Формулы для оценки показателей работы СМО М/М/с/m даны в табл. 22.1

Таблица 22.1

Показатели оценки качества функционирования СМО вида М/М/1/m и М/М/2/m при  $\rho = 1$

№	СМО М/М/1/m	СМО М/М/2/m
1	Вероятность отказа заявкам в обслуживании	
	$P_{отк} = 1/(m + 2)$	$P_{отк} = 2/(2m + 5)$
2	Коэффициент использования обслуживающего аппарата	
	$U = \frac{(m + 1)}{(m + 2)}$	$U = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)}$
3	Интенсивность потока обслуженных заявок	
	$\lambda_{вых} = \frac{(m + 1)}{(m + 2)} \cdot \lambda$	$\lambda_{вых} = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)} \cdot \lambda$
4	Среднее число заявок в очереди на обслуживание	
	$Q = \frac{m \cdot (m + 1)}{2 \cdot (m + 2)}$	$Q = \frac{m \cdot (m + 1)}{(2m + 5)}$
5	Среднее число заявок в СМО	
	$L = \frac{(m + 1)}{2}$	$L = \frac{(m + 2) \cdot (m + 3)}{(2m + 5)}$
6	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО	
	$W = \frac{m}{2 \cdot \mu}$	$W = \frac{m \cdot (m + 1)}{(2m + 3) \cdot \mu}$
7	Среднее время пребывания заявок в СМО	
	$T = \frac{(m + 2)}{2 \cdot \mu}$	$T = \frac{(m + 2) \cdot (m + 3)}{(2m + 3) \cdot 2 \cdot \mu}$
8	Относительная пропускная способность СМО	
	$q = \frac{(m + 1)}{(m + 2)}$	$q = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)}$
9	Абсолютная пропускная способность СМО	
	$A = \frac{(m + 1)}{(m + 2)} \cdot \lambda$	$A = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)} \cdot \lambda$

Численные значения сравнительного анализа вариантов даны в табл.22.2

Таблица 22.2

Сравнительный анализ вариантов

Показатели сравнения		Вариант 1 М/М/1/м	Вариант 2. Две М/М/1/м	Вариант 3 М/М/2/м	Вариант 4 М/М/2/2м
$\lambda$ (1/час)		10	20	20	20
$\lambda_{вых}$ (1/час)	m=0	5	5+5=10	12	12
	m=1	6,67	6,67+6,67=13,33	14,28	15,55
	m=2	7,5	7,5+7,5=15	15,55	16,92
	m=3	8	8+8=16	16,36	17,65
	m=4	8,33	8,33+8,33=16,66	16,92	18,095
	m=5	8,57	8,57+8,57=17,14	17,33	18,4
	m=10	9,16	9,16+9,16=18,32	18,4	19,11
$DP$ (у.е./час)	m=0	14,0	14+14=28	34,0	34,0
	m=1	18,0	18+18=36	39,85	42,66
	m=2	19,5	19,5+19,5=39	42,66	44,77
	m=3	20,0	20,0+20,0=40,0	44,08	44,94
	m=4	20,0	20,0+20,0=40,0	44,77	44,29
	m=5	19,7	19,7+19,7=39,4	45,0	43,2
	m=10	16,5	16,5+16,5=33	43,2	35,33

Для оценки пропускных способностей СМО вида М/М/с/м при  $\rho = 1$  можно использовать следующие приближённые формулы:

$$P_{отк} = \frac{4}{c + 4m + 9} \quad \text{где } 3 \leq c \leq 10, \quad \text{погрешность менее 3\%}$$

$$P_{отк} = \frac{6}{c + 6m + 15} \quad \text{где } 3 \leq c \leq 50, \quad \text{погрешность менее 10\%}$$

$$\lambda_{вых} = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda$$

## Глава 23. Многокритериальный подход к выбору варианта СОУ

Рассмотрим выбор варианта СОУ, удовлетворяющего нескольким локальным критериям на примерах.

**Пример 23.1** Руководителю офиса необходимо для клиентов, которые ожидают обслуживания в окне справок, определить такое число мест в очереди, при котором вероятность отказа запросам клиентов будет не более 10%, среднее время пребывания клиента в офисе не более 30 минут, а загрузка автомата, отвечающего на запросы клиентов в окне справок не менее 85%.

В окне справок работает один автомат, который отвечает на запросы клиентов. Поток запросов клиентов пуассоновский с интенсивностью  $\lambda = 10$  1/час, а обслуживание клиентов соответствует экспоненциальному закону с интенсивностью  $\mu = 10$  1/час.

Если автомат в окне справок и все места в очереди заняты, то пришедший клиент покидает офис не получив обслуживания.

Исходные данные.

$\lambda = 10$  1/час - интенсивность поступления запросов от клиентов;

$\mu = 10$  1/час - интенсивность обслуживания запросов автоматом;

$t_0 = 1/\mu = 6$  мин - среднее время обслуживания запросов клиентов автоматом;

$P_{отк} \leq 0,1$  - вероятность отказа клиентам в обслуживании;

$T \leq 30$  мин - среднее время пребывания клиента в офисе;

$U \geq 0,85$  - коэффициент использования автомата в окне справок.

Решение.

Работу окна справок офиса по обслуживанию клиентов можно представить в виде Ф-схемы, приведённой на Рис.23.1, которая соответствует СМО вида М/М/1/∞. В этой схеме  $OA_1$  - обслуживающий аппарат который имитирует работу автомата, находящегося в офисе в окне выдачи справок клиентам. Коэффициент загрузки СМО М/М/1/∞ определяют из следующего выражения:  $\rho = \lambda / \mu = 10/10 = 1$

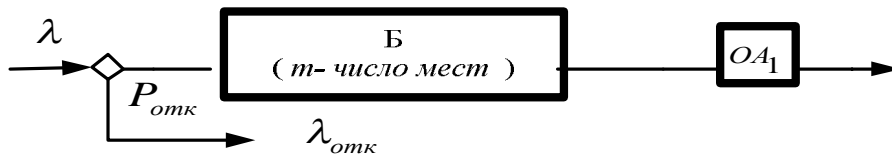


Рис 23.1 Ф-схема СМО М/М/1/м, отражающая работу окна справок офиса.

Основные показатели функционирования СМО М/М/1/м, отражающие работу окна справок офиса при  $\rho = 1$ , с учётом заданного набора исходных данных, можно представить в следующем виде:

$$1) P_{отк} = 1/(m + 2) \leq 0,1$$

Тогда число мест в очереди для клиентов должно соответствовать выражению:

$$m \geq \frac{1 - 2P_{отк}}{P_{отк}} = \frac{1 - 2 \cdot 0,1}{0,1} = 8$$

$$2) T = \frac{(m + 2) \cdot t_0}{2} \leq 30$$

Тогда число мест в очереди для клиентов должно соответствовать выражению:

$$m \leq \frac{2 \cdot T}{t_0} - 2 = \frac{2 \cdot 30}{6} - 2 = 8$$

$$3) U = \frac{(m + 1)}{(m + 2)} \geq 0,85$$

Тогда число мест в очереди для клиентов должно соответствовать выражению

$$m \geq \frac{2U - 1}{1 - U} = \frac{2 \cdot 0,85 - 1}{1 - 0,85} = 4,667$$

Для удовлетворения всем исходным требованиям в офисе должно быть 8 мест для клиентов, которые ожидают обслуживания в окне справок.

**Пример 23.2** В офисе запросы клиентов в окне справок обслуживают два одинаковых автомата, к которым одна общая очередь клиентов. Очередь не имеет ограничений, поэтому все поступившие клиенты получают обслуживание. Поток запросов клиентов пуассоновский с интенсивностью



$\lambda = 16$  1/час, а обслуживание клиентов соответствует экспоненциальному закону. Необходимо настроить автоматы на такой режим работы (такую интенсивность обслуживания клиентов), которая обеспечивает среднее число клиентов в офисе (суммарное в очереди и на обслуживании) не более 4,5 человек, среднее время пребывания клиентов в офисе не более 20 минут, коэффициент использования (загрузку) каждого автомата в следующих границах ( $0,75 \leq U \leq 0,9$ ).

Исходные данные.

$\lambda = 16$  1/час ( $\lambda = 0,267$  1/мин) - интенсивность поступления запросов;

$\mu$  - интенсивность обслуживания запросов клиентов автоматом;

$t_0 = 1/\mu$  - среднее время обслуживания запросов клиентов автоматом;

$L \leq 4,5$  - среднее число клиентов в офисе (в очереди и на обслуживании);

$T \leq 20$  мин - среднее время пребывания клиента в офисе;

$0,75 \leq U \leq 0,9$  - коэффициент использования автомата в окне справок.

$c = 2$  - число автоматов, которые обслуживают клиентов в окне справок.

Решение.

Работу окна справок офиса по обслуживанию клиентов можно представить в виде Ф-схемы, приведённой на Рис.23.2, которая соответствует СМО вида М/М/2

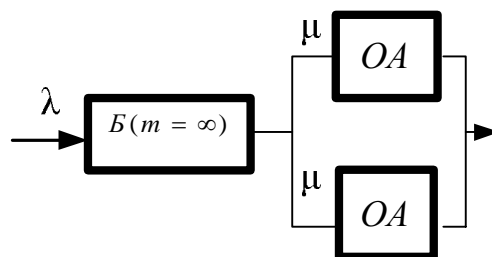


Рис 23.2 Ф-схема СМО М/М/2, отражающая работу окна справок офиса.

. В этой схеме *ОА* - обслуживающие аппараты, которые имитирует работу автомата, находящегося в офисе в окне выдачи справок клиентам.

Основные показатели функционирования СМО М/М/2, отражающие работу окна справок офиса, с учётом заданного набора исходных данных, можно представить в следующем виде:

$$1) L = \frac{2 \cdot \rho^2}{1 - \rho^2} \quad \text{где } \rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu} = \frac{\lambda \cdot t_0}{2}$$

После подстановки и преобразований получаем

$$t_0^2 + \frac{4}{L \cdot \lambda} \cdot t_0 - \frac{4}{\lambda^2} = 0$$

Решаем уравнение и получаем

$$t_0 = -\frac{2}{L \cdot \lambda} + \sqrt{\left(\frac{2}{L \cdot \lambda}\right)^2 + \frac{4}{\lambda^2}}$$

После подстановки численных значений получаем  $t_0 \leq 6$  мин

$$2) T = \frac{t_0}{1 - \rho^2} \quad \text{где } \rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu} = \frac{\lambda \cdot t_0}{2}$$

После подстановки и преобразований получаем

$$t_0^2 + \frac{4}{T \cdot \lambda^2} \cdot t_0 - \frac{4}{\lambda^2} = 0$$

Решаем уравнение и получаем

$$t_0 = -\frac{2}{T \cdot \lambda^2} + \sqrt{\left(\frac{2}{T \cdot \lambda^2}\right)^2 + \frac{4}{\lambda^2}}$$

После подстановки численных значений получаем  $t_0 \leq 6,3$  мин

$$3) U = \rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{\lambda \cdot t_0}{2}$$

После подстановки граничных значений  $U$  получаем

$$5,64 \text{ мин} \leq t_0 \leq 6,77 \text{ мин}$$

Автоматы для обслуживания клиентов в окне справок офиса следует настраивать на режим, который обеспечивает  $5,64 \text{ мин} \leq t_0 \leq 6 \text{ мин}$

**Пример 23.3** В офисе для обслуживания клиентов необходимо выделить для размещения очереди такое число мест, которое обеспечивает при загрузке автомата в окне справок не более чем на 90%, отказ клиентам в обслуживании не более чем на 10%.

В окне справок работает один автомат, который отвечает на запросы клиентов. Поток запросов клиентов, а обслуживание клиентов соответствует экспоненциальному закону,

Если автомат в окне справок и все места в очереди заняты, то пришедший клиент покидает офис не получив обслуживания.

Исходные данные.

$\rho \leq 0,9$  – загрузка автомата запросами от клиентов;

$P_{отк} \leq 0,1$  - вероятность отказа клиентам в обслуживании;

$m$  - число мест для клиентов в очереди к автомату в окне справок.

Решение.

Работу окна справок офиса по обслуживанию клиентов можно представить в виде Ф-схемы, приведённой на Рис.23.1, которая соответствует СМО вида М/М/1/м. В этой схеме  $ОА_1$  - обслуживающий аппарат который имитирует работу автомата, находящегося в офисе в окне выдачи справок клиентам. Для СМО М/М/1/м для оценки требуемой ёмкости буфера при заданной вероятности отказов заявкам в обслуживании, справедливо следующее выражение:

$$m \geq \frac{\lg \frac{\varepsilon}{1-\rho+\varepsilon\rho}}{\lg \rho} - 1, \quad \text{где } \varepsilon = P_{отк}.$$

После подстановки исходных данных получаем:

$$m \geq \frac{\lg \frac{0,1}{1-0,9+0,1 \cdot 0,9}}{\lg 0,9} - 1 = 5,2$$

В офисе необходимо иметь шесть мест в очереди клиентов к окну справок.

## Литература.

1. Авен О.И., Гурин Н.Н., Коган Я., А. Оценка качества и оптимизации вычислительных систем. М.: Наука 1982 -484с.
2. Бахарева Н.Ф., Тарасов В.Н. Аппроксимативные методы и модели массового обслуживания. Исследование компьютерных сетей. Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2011.- 326 с.
3. Бронштейн О.И., Духовный И.М. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах. М.: Наука 1976 -220с.
4. Жожикашвили В.А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания. Теория и приложение к сетям ЭВМ. М.: Радио и связь, 198 -192с.
5. Кениг Д, Штоян Д. Методы теории массового обслуживания. М.: Радио и связь 1981 -128с.
6. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания. Казань Леманд 2018 -224с.
7. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир.1979. - 600 с.
8. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение 1979 - 432с
9. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики. Спб.: Питер, 2006 -496с.
10. Лебедев А.И., Чернявский Е.А. Вероятностные методы в вычислительной технике. М.: Высшая школа 1986 -312с.
11. Липаев В.В., Яшков С.Ф. Эффективность методов организации вычислительного процесса в АСУ. М.: Статистика. 1972 -256с.
12. Майоров С.А., Новиков Г.И., Алиев Т.И., Махерив Э.И., Тимченко Б.Д. Основы теории вычислительных систем. М.: Высшая школа, 1978 -408с.
13. Митрушкин Е.И. Инженерный анализ системы массового обслуживания.// Инфокоммуникационные технологии в проектировании и производстве. 2014. №2. - С.56-62.

14. Митрушкин Е.И. Погрешность инженерного анализа разомкнутой сети массового обслуживания.// Инфокоммуникационные технологии в проектировании и производстве. 2018. №4. - С.63-67.
15. Павский В.А. Теория массового обслуживания. Кемерово, Технологический институт. 2007 -126с.
16. Платонов Г.А., Файнберг М.А., Штильман М.С, Поезда, пассажиры и математика. М.: Транспорт. 1977. 240 с.
17. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания. М.: Лоброком 2010 - 520с.
19. Саульев В.К. Математические модели теории массового обслуживания. М.: Статистика. 1976 -56с
20. Таранцев А.А. Инженерные методы теории массового обслуживания. М.: Наука. 2007. - 173 с
21. Таха Х. Введение в исследование операций. М.: Вильямс 2007. - 912 с.
22. Феррари Д. Оценка производительности вычислительных систем. М.: Мир 1981 -576с.
23. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности –М.: Финансы и статистика. 2009. - 642 с.
24. Шнепс М.А. Системы распределения информации. Методы расчёта. М.: Связь 1979 -344с.
25. Штойян Д. Качественные свойства и оценки стохастических моделей. М.: Мир. 1979. 268 с.

**Приложение 1**  
**Показатели оценки качества работы СМО**

**Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/с**

№	Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/с
1	Загрузка обслуживающего аппарата СМО ( $\rho$ ) и загрузка СМО ( $\varphi$ )  $\rho = \frac{\varphi}{c} = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \quad \text{где } \rho < 1 \qquad \varphi = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{где } \varphi < c$
2	Вероятность простоя СМО  $P_0 = \left[ \sum_{i=0}^c \frac{\varphi^i}{i!} + \frac{\varphi^{c+1}}{c!(c-\varphi)} \right]^{-1}$
3	Вероятность, что в СМО $i$ - заявок, где $i < c$  $P_i = (\varphi^i / i!) P_0$
4	Вероятность, что заняты все «с» ОА и $i$ заявок в очереди  $P_{c+i} = \frac{\varphi^{(c+i)}}{c^i \cdot c!} \cdot P_0$
5	Вероятность ожидания заявкой начала обслуживания  $P_w = 1 - \sum_{i=0}^{c-1} P_i = \frac{\varphi^c}{(c-1)!(c-\varphi)} \cdot P_0$
6	Среднее число заявок в очереди СМО ( $Q$ ) и в СМО ( $L$ )  $Q = \sum_{i=c}^{\infty} (i-c) \cdot P_i = \frac{\varphi^{c+1} \cdot c \cdot P_0}{c!(c-\varphi)^2} \qquad L = Q + c \cdot \rho$
7	Дисперсия числа заявок в очереди СМО ( $D_Q$ ) и в СМО ( $D_L$ )  $D_Q = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)^2 \cdot P_i - Q^2 \qquad D_L = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot P_i - L^2$
8	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО ( $W$ ) и в СМО ( $T$ )  $W = \frac{Q}{\lambda} \qquad T = \frac{L}{\lambda} = W + \frac{1}{\mu}$
9	Дисперсия времени нахождения заявок в очереди СМО ( $D_W$ ) и пребывания в СМО ( $D_T$ )  $D_W = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot P_i \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 - W^2 \qquad D_T = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^2 \cdot P_i \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 - T^2$
10	Вероятность, что время ожидания заявки в очереди меньше ( $t$ )  $P(t_{ож} < t) = 1 - \rho \cdot e^{-(c\mu - \lambda) \cdot t}$
11	Вероятность, что время пребывания заявки в СМО меньше ( $t$ )  $P(t_{прб} < t) = 1 - e^{-(c\mu - \lambda) \cdot t}$

### Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/с/0

№	Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/с/0
1	Загрузка СМО и ОА СМО $\varphi = \frac{\lambda}{\mu}$ $\rho = \frac{\varphi}{c} = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$
2	Вероятность простоя СМО $P_0 = \left[ 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2!} + \dots + \frac{\varphi^c}{c!} \right]^{-1} = \left[ \sum_{i=0}^c \frac{\varphi^i}{i!} \right]^{-1}$
3	Вероятность, что в СМО, $i$ - заявок $P_i = \frac{\varphi^i}{i!} P_0$ , $0 \leq i \leq c$
4	Вероятность отказа заявкам в обслуживании $P_{отк} = P_c = \frac{\varphi^c}{c!} P_0$
5	Интенсивность потока заявок, поступающих в СМО на обслуживание $\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda$
6	Коэффициент использования ОА СМО $U = \lambda_c / (c \cdot \mu) = (1 - P_{отк}) \cdot \rho$
7	Среднее число занятых ОА в составе СМО $k_{зан} = U \cdot c = (1 - P_{отк}) \cdot \varphi$
8	Среднее число заявок в очереди на обслуживание и в СМО . $Q = 0$ $L = Q + c \cdot U = c \cdot U$
9	Среднее время пребывания заявок в очереди СМО и в СМО . $W = 0$ $T = 1 / \mu = t_0$
10	Относительная и абсолютная пропускная способность СМО $q = (1 - P_{отк})$ $A = q \cdot \lambda$

### Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/С/м

№	Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/С/м
1	Загрузка СМО и ОА СМО $\varphi = \frac{\lambda}{\mu}$ $\rho = \frac{\varphi}{c} = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$
2	Вероятность простоя СМО $P_0 = \left[ \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\varphi^i}{i!} + \frac{\varphi^c (1 - \rho^{m+1})}{c! \cdot (1 - \rho)} \right]^{-1}$
3	Вероятность, что в СМО, $i$ - заявок $P_i = \frac{\varphi^i}{i!} P_0 \quad \text{где } 1 \leq i \leq c$ $P_i = \frac{\varphi^i}{c! \cdot c^{i-c}} P_0 \quad \text{где } c \leq i \leq (c + m)$
4	Вероятность отказа заявкам в обслуживании $P_{отк} = P_{m+c} = \frac{\varphi^{c+m}}{c! \cdot c^m} P_0$
5	Интенсивность потока заявок, поступающих в СМО на обслуживание $\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda$
6	Коэффициент использования ОА СМО $U = \lambda_c / (c \cdot \mu) = (1 - P_{отк}) \cdot \rho$
7	Среднее число заявок в очереди на обслуживание $Q = \sum_{i=c+1}^{c+m} (i - c) \cdot P_i = \frac{\varphi^{c+m}}{c! \cdot c} \left[ \frac{1 - \rho^m [(m+1) - m\rho]}{(1 - \rho)^2} \right] P_0$
8	Среднее число заявок в СМО, в очереди и на обслуживании $L = \sum_{i=1}^{c+m} i \cdot P_i = Q + c \cdot U$
9	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО $W = \frac{Q}{\lambda_c} = \frac{\varphi^c}{c! \cdot c \cdot \mu} \left[ \frac{1 - \rho^m [(m+1) - m\rho]}{(1 - \rho)^2} \right] P_0$
10	Среднее время пребывания заявок в СМО $T = L / \lambda_c$
11	Относительная пропускная способность СМО $q = (1 - P_{отк})$
12	Абсолютная пропускная способность СМО $A = q \cdot \lambda$



## Немарковские системы массового обслуживания с ожиданием

Согласно метода инвариантов отношения, имеем следующую связь для числа заявок, находящихся в очередях СМО.

$$\frac{Q_{G/G/c}}{Q_{G/G/1}} = \frac{Q_{M/M/c}}{Q_{M/M/1}} \quad \text{Тогда} \quad Q_{G/G/c} = Q_{G/G/1} \frac{Q_{M/M/c}}{Q_{M/M/1}}$$

$$Q_{M/M/c} = \frac{c\rho^{c+1}}{(1-\rho^c)} \quad Q_{M/M/1} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} \quad Q_{G/G/1} = \frac{\rho^2(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2)}{2(1-\rho)}$$

$$Q_{G/G/c} = \frac{c\rho^{c+1}(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2)}{2(1-\rho^c)} \quad L_{G/G/c} = Q_{G/G/c} + c\rho = \frac{c\rho^{c+1}(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2 - 2) + 2c\rho}{2(1-\rho^c)}$$

$$W_{G/G/c} = \frac{Q_{G/G/c}}{\lambda} = \frac{Q_{G/G/c}}{\rho \cdot \mu \cdot c} = \frac{\rho^c(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2)}{2(1-\rho^c) \cdot \mu}$$

$$T_{G/G/c} = \frac{L_{G/G/c}}{\lambda} = \frac{L_{G/G/c}}{\rho \cdot \mu \cdot c} = \frac{\rho^c(v_{\text{вх}}^2 + v_0^2 - 2) + 2}{2(1-\rho^c) \cdot \mu}$$

Погрешность аналитической модели по сравнению с имитационной.

Сравнение результатов аналитического и имитационного моделирования СМО М/М/с

Загрузка канала $\rho$	Значения $\Delta_L = \frac{L_{\text{им}} - L_{\text{ан}}}{L_{\text{им}}} \cdot 100\%$ при $v_{\text{вх}}^2 = v_0^2 = 1$			
	Количество каналов обслуживания			
	$c=1$	$c=4$	$c=7$	$c=10$
$\rho=0,3$	- 0,23	- 0,5	0,02	- 0,003
$\rho=0,5$	0,2	- 1,84	- 1,4	- 0,7
$\rho=0,7$	0,05	- 3,13	- 4,64	- 4,25
$\rho=0,9$	0,08	-2,28	- 5,75	- 7,8

Сравнение результатов аналитического и имитационного моделирования СМО G/G/c.

$\rho$	$v_{\text{вх}}^2$	Значения $\Delta_L = \frac{L_{\text{им}} - L_{\text{ан}}}{L_{\text{им}}} \cdot 100\%$							
		$c=1$		$c=4$		$c=7$		$c=10$	
		$v_0^2=0,5$	$v_0^2=2$	$v_0^2=0,5$	$v_0^2=2$	$v_0^2=0,5$	$v_0^2=2$	$v_0^2=0,5$	$v_0^2=2$
0,3	0,5	7,4	9,5	0,5	0,08	0,01	- 0,09	0,01	- 0,07
	2	- 12,2	- 12,8	- 3,81	- 3,63	- 0,75	- 0,94	- 0,17	- 0,31
0,5	0,5	7,91	7,55	0,82	0,7	- 0,08	- 0,81	- 0,1	- 0,52
	2	- 10,0	- 9,48	- 8,65	- 8,85	- 5,06	- 5,37	- 2,53	- 2,91
0,7	0,5	6,4	4,18	1,2	0,93	- 0,8	- 1,8	- 1,0	- 3,2
	2	- 6,68	- 5,8	- 11,13	- 10,4	- 10,36	- 12,7	- 9,65	- 11,1
0,9	0,5	2,06	1,4	1,15	0,2	- 1,6	- 4,26	- 3,2	- 6,75
	2	- 1,56	- 3,4	- 6,4	- 5,45	- 10,26	- 10,7	- 12,67	- 14,3

## СМО с несколькими классами заявок

**СМО с разными классами заявок при отсутствии приоритетов в их обслуживании.**

Среднее время ожидания заявок в очереди СМО

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot t_i^{(2)}}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot t_i \cdot (1 + \nu_i^2)}{2 \cdot (1 - \rho)}$$

Среднее время пребывания заявок в СМО

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} T_i \quad \text{где: } T_i = W + t_i$$

$$T = W + t_0 = W + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} t_i$$

Где:  $t_0$  - среднее время обслуживания заявок всех классов

Среднее число заявок в очереди СМО и в СМО

$$Q = \lambda \cdot W \quad L = \lambda \cdot T$$

## СМО с относительными приоритетами

Среднее время ожидания заявок  $k$ -го приоритетного класса в очереди СМО

$$W_k = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i t_i (1 + \nu_i^2)}{2 \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i \right) \left( 1 - \sum_{i=1}^k \rho_i \right)}$$

Среднее время ожидания заявок 1-го и 2-го класса в очереди СМО с двумя классами заявок.

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} \quad W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

Среднее время ожидания заявок разных классов в очереди СМО с тремя классами заявок.

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1)} \quad W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} \quad W_3 = \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2)(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)}$$

### СМО с абсолютными приоритетами

Среднее время ожидания заявок  $k$ -го приоритетного класса в очереди СМО

$$W_k = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \rho_i t_k}{\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i\right)} + \frac{\sum_{i=1}^k \rho_i t_i (1 + \nu_i^2)}{2 \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i\right)}$$

Среднее время ожидания заявок 1-го и 2-го класса в очереди СМО с двумя классами заявок.

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1}{(1 - \rho_1)} \quad W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

Среднее время ожидания заявок разных классов в очереди СМО с тремя классами заявок.

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1}{(1 - \rho_1)}$$

$$W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

$$W_3 = \frac{(\rho_1 + \rho_2) \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2)(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)}$$

### СМО с комбинированными приоритетами

На вход СМО поступают заявки трёх приоритетных классов.

Заявки 1-го класса имеют абсолютный приоритет перед заявками 2-го и 3-го классов, а заявки 2-го класса - относительный приоритет перед заявками 3-го класса.

Среднее время ожидания заявок 1-го, 2-го и 3-го приоритетных классов в очереди СМО

$$W_1 = \frac{\rho_1 \cdot t_1}{(1 - \rho_1)}$$

$$W_2 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

$$W_3 = \frac{\rho_1 \cdot t_2}{(1 - \rho_1)} + \frac{\rho_1 \cdot t_1 + \rho_2 \cdot t_2 + \rho_3 \cdot t_3}{(1 - \rho_1 - \rho_2) \cdot (1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3)}$$

Закон сохранения времени ожидания Клейнрока  $\sum_{i=1}^n \rho_i W_i = \rho \cdot W$

$n$  - число приоритетных классов заявок, поступающих на вход СМО.

## Метод инвариантов отношения

Согласно метода инвариантов отношения, имеем следующую связь для числа заявок, находящихся в очередях СМО.

$$\frac{Q_{G/G/c}}{Q_{G/G/1}} = \frac{Q_{M/M/c}}{Q_{M/M/1}} \quad \text{Тогда} \quad Q_{G/G/c} = Q_{G/G/1} \frac{Q_{M/M/c}}{Q_{M/M/1}}$$

Для расчета показателей функционирования двухканальных СМО с приоритной обработкой заявок используют метод инвариантов отношения, позволяющий получить простые аналитические выражения. Согласно этому методу справедливы следующие выражения, устанавливающие взаимосвязь между беспriorитетными СМО вида  $M/M/1$  и  $M/M/2$  и приоритетными СМО с относительными приоритетами вида  $M/M/1/\infty/Отн/\infty$  и  $M/M/2/\infty/Отн/\infty$ , а также с абсолютными приоритетами вида  $M/M/1/\infty/Абс/\infty$  и  $M/M/2/\infty/Абс/\infty$ .

$$\frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}} = \frac{W_{M/M/2/\infty/отн/\infty}}{W_{M/M/1/\infty/отн/\infty}} \quad \frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}} = \frac{W_{M/M/2/\infty/абс/\infty}}{W_{M/M/1/\infty/абс/\infty}}$$

После преобразований из этих выражений получаем:

$$W_{M/M/2/\infty/отн/\infty} = W_{M/M/1/\infty/отн/\infty} \cdot \frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}} \quad W_{M/M/2/\infty/абс/\infty} = W_{M/M/1/\infty/абс/\infty} \cdot \frac{W_{M/M/2}}{W_{M/M/1}}$$

$$Q_{G/G/1} = \frac{\rho^2 \cdot (v_{ex}^2 + v_o^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\rho^2 \cdot a}{(1 - \rho)} \quad \text{где} \quad a = \frac{(v_{ex}^2 + v_o^2)}{2}$$

$$\text{СМО } G/G/c/m \quad (\rho = 1) \quad P_{отк} = \frac{2}{c + \frac{2 \cdot m}{a} + 3} = \frac{2}{c + \frac{4 \cdot m}{(v_{ex}^2 + v_o^2)} + 3} \quad \text{при } 1 \leq c \leq 2$$

$$P_{отк} = \frac{6}{c + \frac{6 \cdot m}{a} + 15} = \frac{6}{c + \frac{12 \cdot m}{(v_{ex}^2 + v_o^2)} + 15} \quad \text{при } 3 \leq c \leq 50$$

$$Q_{M/G/1} = \frac{\rho^2 \cdot (1 + v_o^2)}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{\rho^2 \cdot a_o}{(1 - \rho)} \quad \text{где} \quad a_o = \frac{(1 + v_o^2)}{2}$$

Для СМО  $M/G/1/m$  и  $G/G/1/m$  предложены приближённые формулы

$$P_{отк} = \frac{\rho^{(m+1) \cdot a_o} - \rho^{(m+1) \cdot a_o + 1}}{1 - \rho^{(m+1) \cdot a_o + 1}} \quad P_{отк} = \frac{\rho^{(m+1) \cdot a} - \rho^{(m+1) \cdot a + 1}}{1 - \rho^{(m+1) \cdot a + 1}}$$

## Разомкнутые сети массового обслуживания

### Композиция потоков

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j \qquad v^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot v_j^2}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}$$

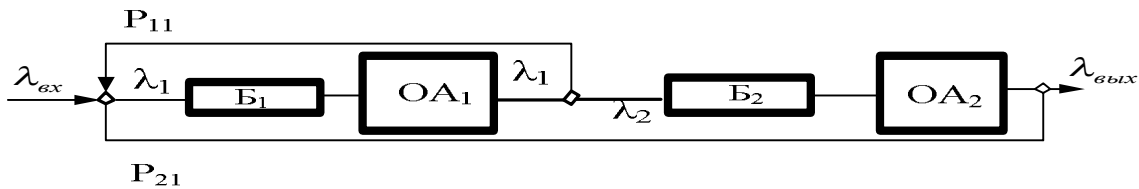
### Декомпозиция потоков

$$\lambda_j = \lambda \cdot q_j, \qquad v_j^2 = v^2 \cdot q_j + (1 - q_j).$$

Способ 1  $v_{\text{вых}i}^2 = v_{\text{вх}i}^2 + \rho_i^2 \cdot (v_{oi}^2 - v_{\text{вх}i}^2)$

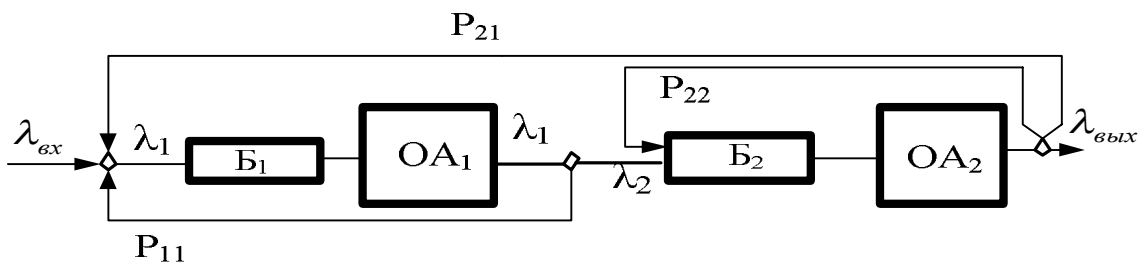
Способ 2  $v_{\text{вых}i}^2 = (1 - \rho_i) \cdot v_{\text{вх}i}^2 + \rho_i \cdot v_{oi}^2 - \rho_i^2 + \rho_i$

Способ 3  $v_{\text{вых}i}^2 = v_{\text{вх}i}^2 + 2\rho_i v_{oi}^2 - \rho_i^2 \cdot (v_{\text{вх}i}^2 + v_{oi}^2)$



$$\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_1 \cdot p_{11} \qquad \lambda_2 = \lambda + \lambda_2 \cdot p_{21} \qquad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - p_{21}}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{1 - p_{11}} = \frac{\lambda}{(1 - p_{21}) \cdot (1 - p_{11})} \qquad \alpha_1 = \frac{1}{(1 - p_{11}) \cdot (1 - p_{21})} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{(1 - p_{21})}$$



$$\lambda_2 = \lambda + \lambda_2 \cdot p_{21} + \lambda_2 \cdot p_{22} \qquad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - p_{21} - p_{22}}$$

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda_2 \cdot p_{22} + \lambda_1 \cdot p_{11} \qquad \lambda_1 = \frac{\lambda \cdot (1 - p_{21})}{(1 - p_{21} - p_{22}) \cdot (1 - p_{11})}$$

$$\alpha_1 = \frac{(1 - p_{21})}{(1 - p_{21} - p_{22}) \cdot (1 - p_{11})} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{1 - p_{21} - p_{22}}$$

**Формулы для приближённой оценки основных показателей качества функционирования многоканальных СМО М/М/с**

Среднее число заявок в очереди СМО М/М/с и в СМО М/М/с:

$$Q_{M/M/c} = \frac{C \cdot \rho^{c+1}}{1 - \rho^c} \qquad L_{M/M/c} = Q + c \cdot \rho = \frac{C \cdot \rho}{1 - \rho^c}$$

Среднее время ожидания заявок в очереди СМО М/М/с и в СМО:

$$W_{M/M/c} = \frac{\rho^c}{(1 - \rho^c) \cdot \mu} \qquad T_{M/M/c} = W + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{(1 - \rho^c) \cdot \mu}$$

$t_0 = 1/\mu$  - среднее время обслуживания заявок в одном ОА СМО.

Для уменьшения погрешности результатов, получаемых с помощью формул для вычисления  $L_{M/M/c}$  и  $T_{M/M/c}$ , предложена замена числа обслуживающих аппаратов ( $c$ ) в этих формулах на ( $c^*$ ). В этом случае погрешность результатов составляет менее 1%. Некоторые, наиболее важные значения ( $c^*$ ), аппроксимирующие соответствующие значения числа ( $c$ ), приведены ниже.

Значения  $c^*$ , аппроксимирующие значения  $c$ .

$c$	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,3$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,7$	$\rho = 0,9$
$c = 1$	1	1	1	1	1
$c = 2$	2	2	2	2	2
$c = 3$	2,8633	2,8519	2,8745	2,9146	2,9683
$c = 4$	3,6563	3,6033	3,6439	3,7425	3,8974
$c = 5$	4,4090	4,2888	4,3346	4,4954	4,7860
$c = 6$	5,1356	4,9290	4,9662	5,1858	5,6349
$c = 7$	5,8443	5,5365	5,5525	5,8240	6,4463
$c = 8$	6,5398	6,1196	6,1032	6,4185	7,2226
$c = 9$	7,2252	6,6836	6,6253	6,9767	7,9660
$c = 10$	7,9025	7,2325	7,1239	7,5032	8,6791
$c = 15$	11,211	9,8281	9,3775	9,7929	11,861
$c = 20$	14,444	12,278	11,389	11,709	14,548
$c = 25$	17,634	14,649	13,264	13,399	16,882
$c = 30$	20,799	16,968	15,049	14,936	18,950
$c = 40$	27,077	21,518	18,446	17,713	22,513
$c = 50$	33,314	24,079	21,668	20,232	25,538

**Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/1 и М/М/2**

№	СМО М/М/1	СМО М/М/2
1	Загрузка обслуживающего аппарата	
	$\rho = \lambda / \mu$	$\rho = \lambda / (2 \cdot \mu)$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата	
	$P_0 = 1 - \rho$	$P_0 = (1 - \rho) / (1 + \rho)$
3	Вероятность, что в СМО, $i$ - заявок	
	$P_i = P_0 \cdot \rho^i$	$P_i = (\rho^i / 2^i i!) P_0$ если $i = 1, 2$ $P_i = \frac{\rho^i}{2^i \cdot 2!} \cdot P_0$ если $i = 3, 4, 5, \dots$
4	Среднее число заявок в очереди на обслуживание	
	$Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$	$Q = \frac{2 \cdot \rho^3}{1 - \rho^2}$
5	Среднее число заявок в СМО, в очереди и на обслуживании	
	$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$	$L = \frac{2 \cdot \rho}{1 - \rho^2}$
6	Дисперсия числа заявок в очереди СМО	
	$D_Q = \frac{\rho^2(1 + \rho - \rho^2)}{(1 - \rho)^2}$	$D_Q = \frac{2\rho^3(1 + 2\rho - \rho^3)}{(1 - \rho^2)^2}$
7	Дисперсия числа заявок в СМО	
	$D_L = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$	$D_L = \frac{2\rho \cdot (1 + \rho^2)}{(1 - \rho^2)^2}$
8	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО	
	$W = \frac{\rho}{(1 - \rho) \cdot \mu}$	$W = \frac{\rho^2}{(1 - \rho^2) \cdot \mu}$
9	Среднее время пребывания заявок в СМО	
	$T = \frac{1}{(1 - \rho) \cdot \mu} = \frac{1}{(\mu - \lambda)}$	$T = \frac{1}{(1 - \rho^2) \cdot \mu}$

### Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/1/м

№	Показатель СМО
1	Загрузка обслуживающего аппарата $\rho = \lambda / \mu$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата $P_0 = \frac{(1 - \rho)}{(1 - \rho^{m+2})}$
3	Вероятность, что в СМО, $i$ - заявок $P_i = \frac{(1 - \rho) \cdot \rho^i}{(1 - \rho^{m+2})}$
4	Вероятность отказа заявкам в обслуживании $P_{отк} = P_{m+1} = \frac{(\rho^{m+1} - \rho^{m+2})}{(1 - \rho^{m+2})}$
5	Интенсивность потока обслуженных заявок $\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda$
6	Коэффициент использования обслуживающего аппарата $U = \lambda_c / \mu = (1 - P_{отк}) \cdot \rho$
7	Среднее число заявок в очереди на обслуживание $Q = \frac{\rho^2 \cdot [1 - \rho^m \cdot (m+1) + m \cdot \rho^{m+1}]}{(1 - \rho^{m+2}) \cdot (1 - \rho)}$
8	Среднее число заявок в СМО $L = Q + U = \frac{\rho \cdot [1 - (m+2)\rho^{m+1} + (m+1) \cdot \rho^{m+2}]}{(1 - \rho^{m+2}) \cdot (1 - \rho)}$
9	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО $W = \frac{Q}{\lambda_c} = \left[ \frac{\rho}{(1 - \rho)} - \frac{(m+1) \cdot \rho^{m+1}}{(1 - \rho^{m+1})} \right] \cdot \frac{1}{\mu}$
10	Среднее время пребывания заявок в СМО $T = \frac{L}{\lambda_c} = \left[ \frac{1}{(1 - \rho)} - \frac{(m+1) \cdot \rho^{m+1}}{(1 - \rho^{m+1})} \right] \cdot \frac{1}{\mu}$



**Показатели оценки качества функционирования СМО М/М/2/м**

№	Показатели СМО
1	Загрузка обслуживающего аппарата $\rho = \frac{\varphi}{2} = \frac{\lambda}{2\mu}$
2	Вероятность простоя обслуживающего аппарата $P_0 = \frac{(1-\rho)}{(1+\rho-2\rho^{m+3})}$
3	Вероятность, что в СМО, $i$ - заявок $P_i = 2 \cdot \rho^i \cdot P_0$
4	Вероятность отказа заявкам в обслуживании $P_{отк} = P_{m+2} = \frac{(2\rho^{m+2} - 2\rho^{m+3})}{(1+\rho-2\rho^{m+3})}$
5	Интенсивность потока обслуженных заявок $\lambda_c = (1 - P_{отк}) \cdot \lambda = \frac{(1+\rho-2\rho^{m+2})}{(1+\rho-2\rho^{m+3})} \cdot \lambda$
6	Коэффициент использования обслуживающего аппарата $U = \lambda_c / 2\mu = (1 - P_{отк}) \cdot \rho$
7	Среднее число заявок в очереди на обслуживание $Q = \frac{2 \cdot (m \cdot \rho^{m+4} - m \cdot \rho^{m+3} - \rho^{m+3} + \rho^3)}{(1-\rho) \cdot (1+\rho-2\rho^{m+3})}$
8	Среднее число заявок в СМО $L = Q + 2U = \frac{2 - 2(m+3) \cdot \rho^{m+2} + 2(m+2) \cdot \rho^{m+3}}{(1-\rho) \cdot (1+\rho-2\rho^{m+3})} \cdot \rho$
9	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО $W = \frac{Q}{\lambda_c} = \frac{m\rho^{m+3} - m\rho^{m+2} - \rho^{m+2} + \rho^2}{(1-\rho) \cdot (1+\rho-2\rho^{m+2}) \cdot \mu}$
10	Среднее время пребывания заявок в СМО $T = \frac{L}{\lambda_c} = \frac{(m+2)\rho^{m+3} - (m+3)\rho^{m+2} + 1}{(1-\rho) \cdot (1+\rho-2\rho^{m+2}) \cdot \mu}$

**Показатели оценки качества функционирования СМО  
М/М/1/м и М/М/2/м при  $\rho = 1$**

№	СМО М/М/1/м	СМО М/М/2/м
1	Вероятность отказа заявкам в обслуживании	
	$P_{отк} = 1/(m + 2)$	$P_{отк} = 2/(2m + 5)$
2	Коэффициент использования обслуживающего аппарата	
	$U = \frac{(m + 1)}{(m + 2)}$	$U = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)}$
3	Интенсивность потока обслуженных заявок	
	$\lambda_c = \frac{(m + 1)}{(m + 2)} \cdot \lambda$	$\lambda_c = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)} \cdot \lambda$
4	Среднее число заявок в очереди на обслуживание	
	$Q = \frac{m \cdot (m + 1)}{2 \cdot (m + 2)}$	$Q = \frac{m \cdot (m + 1)}{(2m + 5)}$
5	Среднее число заявок в СМО	
	$L = \frac{(m + 1)}{2}$	$L = \frac{(m + 2) \cdot (m + 3)}{(2m + 5)}$
6	Среднее время нахождения заявок в очереди СМО	
	$T = \frac{m}{2 \cdot \mu}$	$W = \frac{m \cdot (m + 1)}{(2m + 3) \cdot \mu}$
7	Среднее время пребывания заявок в СМО	
	$T = \frac{(m + 2)}{2 \cdot \mu}$	$T = \frac{(m + 2) \cdot (m + 3)}{(2m + 3) \cdot 2 \cdot \mu}$
8	Относительная пропускная способность СМО	
	$q = \frac{(m + 1)}{(m + 2)}$	$q = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)}$
9	Абсолютная пропускная способность СМО	
	$A = \frac{(m + 1)}{(m + 2)} \cdot \lambda$	$A = \frac{(2m + 3)}{(2m + 5)} \cdot \lambda$

## Приложение 2

### Вспомогательные формулы для расчёта характеристик работы СМО

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \frac{1}{1-\rho}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho^i = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \rho^{i-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \rho^i = \frac{\rho(1+\rho)}{(1-\rho)^3}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \rho^{i-1} = \frac{(1+\rho)}{(1-\rho)^3}$$

$$\sum_{i=1}^N \rho^i = \frac{\rho(1-\rho^N)}{(1-\rho)}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^3 \rho^{i-1} = \frac{(1+4\rho+\rho^2)}{(1-\rho)^4}$$

$$\sum_{i=1}^N i^m \rho^i = \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{i=1}^N i^{m-1} \rho^i$$

Момент ( $\alpha$ ) распределения Эрланга порядка ( $k$ )

$$t_k^\alpha = \frac{(\alpha+k-1)!}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{t}{k}\right)^\alpha$$

## Приложение 3

### Знания, получаемые в процессе изучения вопросов, изложенных в учебно-методическом пособии

#### В процессе изучения учебно-методического пособия студент

##### должен знать:

1. Основные принципы и правила разработки Ф-схем систем и сетей массового обслуживания (СеМО), корректно отражающих работу рассматриваемых систем организационного управления (СОУ).
2. Основные законы, теоремы и формулы, используемые при анализе СОУ, формализуемых в виде СМО, а также разомкнутых и замкнутых СеМО.
3. Основные правила проведения функционально-стоимостного анализа СОУ для выбора наилучшего варианта среди сравниваемых.

##### должен уметь:

1. Применять аналитические выражения для анализа СОУ, формализуемых в виде одноканальных и многоканальных СМО с отказами, ограниченной длиной очереди, ожиданием и приоритетами.
2. Применять аналитические выражения для анализа СОУ, формализуемых в виде разомкнутых и замкнутых СеМО.
3. Применять аналитические выражения для проведения функционально-стоимостного анализа СОУ, формализуемых в виде разомкнутых и замкнутых СеМО.

##### должен владеть:

1. Принципами разработки аналитических моделей для анализа СОУ, формализуемых в виде СеМО..
2. Принципами корректировки и совершенствования аналитических моделей для проведения экспресс-анализа СОУ.
3. Принципами разработки критериев для проведения функционально-стоимостного анализа СОУ.