**ГАОУ ВО**
**«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА»**

**Бабичева Т.А.**

**Кафедра математики**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**«МАТЕМАТИКА»**

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО КОМБИНАТОРИКЕ

**Махачкала – 2018 г.**

УДК 512.542.74
ББК 22.17

**Бабичева Т.А. Учебное пособие «Решение задач по комбинаторике»** (практикум) – Махачкала: ДГУНХ, 2018. – 44 с.

**Составитель:** Бабичева Татьяна Анатольевна – старший преподаватель кафедры математики Дагестанского государственного университета народного хозяйства.

**Внутренний рецензент:** Гереева Тату Рашидовна, к.э.н., доцент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» ДГУНХ.

**Внешний рецензент:** Магомедова Вазипат Гусейновна**,** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа ДГУ.

Учебное пособие «Решение задач по комбинаторике» (практикум) размещено на официальном сайте www.dgunh.ru

Цель данного пособия – помочь студентам лучше освоить понятия курса, научить решать задачи по этому разделу математики. Для закрепления теоретических знаний, приобретения навыков в решении задач и с целью самопроверки.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Комбинаторика - раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами. Формулы и принципы комбинаторики используются в теории вероятностей для подсчета вероятности случайных событий и, соответственно, получения законов распределения случайных величин. Это, в свою очередь, позволяет исследовать закономерности массовых случайных явлений, что является весьма важным для правильного понимания статистических закономерностей, проявляющихся в природе и технике.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Комбинаторику можно рассматривать как часть теории множеств, так как любую комбинаторную задачу можно свести к задаче о конечных множествах и их отображениях. Центральная задача комбинаторики - задача о размещении объектов в соответствии со специальными правилами. В комбинаторике нам дана совокупность $n$ элементов ($n$ - множество или генеральная совокупность объема $n$), из которой мы будем в соответствии с определенными правилами выбирать часть этой совокупности ($m$ - подмножество, $n$- множества или выборку объема $m$). Для доказательства основных формул комбинаторики достаточно применить принцип математической индукции и правила сложения и умножения.

## 1.1. Элементы теории множеств

Напомним, что под множеством понимают совокупность элементов произвольной природы, рассматриваемую как единое целое. Множества обычно обозначаются заглавными буквами $A$, $B$, $C$.

Конечные множества обычно задаются перечислением своих элементов или свойством:

$L = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$ - множество букв латинского алфавита;

F = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) – множество цифр;

В = {Ц, Г} — множество исходов опыта, заключающегося в подбрасывании монеты один раз, определяется своими элементами Ц (монета падает цифрой вверх) и Г (монета падает гербом вверх).

**Определение.** Если каждый элемент множества *X* является в то же время элементом множества *У*, то говорят, что *X* - часть или подмножество множества *У*: $X \subset У$.

Множество $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ четных чисел является частью множества $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ всех цифр.

**Определение.** Пересечением множеств *X* и *У* называется множество $X \cap У$, состоящее из элементов, которые принадлежат как *X*, так и *У*.

Пересечением множества $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ четных цифр и множества $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ нечетных цифр является пустое множество $A \cap B = \varnothing$. Если $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{2,3,4\}$, то $A \cap B = \{2,3\}$.

**Определение.** Объединением множеств *X* и *У* называют множество $X \cup У$, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *X*, *У*.

Объединением множества $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ четных цифр и множества $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ нечетных цифр является множество $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ всех цифр. Если $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{2,3,4\}$, то $A \cup B = \{1,2, 3,4\}$.

Для конечного множества *A* через $n\ (A)$ обозначим число его элементов. Число элементов пустого множества, очевидно, равно нулю $n\ (\varnothing) = 0$. Число элементов множества $A = \{a\}$, образованного единственным элементом $a$, равно единице, $n\ (A) = 1$. Число элементов множества $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, составленного из цифр, равно десяти: $n\ (F) = 10$.

**Теорема 1.** Если пересечение конечных множеств $A$ и $B$ пусто, то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов множеств $A$ и $B$, т.е. если $A \cap B = \varnothing \Rightarrow n\ (A \cup B) = n\ (A) + n\ (B)$.

Это правило легко распространить на любое конечное число множеств.

**Определение.** Два любых элемента $a$ и $b$ представляют собой упорядоченную пару, если предварительно оговорено, какой из них считается первым, а какой - вторым $(a, b)$.

**Определение.** Декартовым произведением множеств $A$ и $B$ называется множество всех тех упорядоченных пар, в которых первый член является элементом $A$, а второй - элементом $B$: $(A \cdot B)$

$A = \{a, l, i\}$, $n\ (A) = 3$,

$B=\{b, c\}$, $n\ (B) = 2$,

$A \cdot B = \{(a, b), (a, c), (l, b), (l, c), (i, b), (i, c)\}$, $n\ (A \cdot B) = 6$,

$B \cdot B = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$, $n\ (B \cdot B) = 4$.

**Теорема 2.** Если множества $A$ и $B$ конечны, то число пар в их декартовом произведении $A \cdot B$ равно произведению чисел элементов этих множеств:

$n\ (A \cdot B) = n\ (A) \cdot n\ (B)$

$A = \{1, 2, 3\}$, $n\ (A) = 3$

$B =\{4, 5,6\}$, $n\ (B) = 3$

$A \cdot B = \{14, 15, 16, 24, 25,26, 34,35, 36\}$,

$n\ (A \cdot B) = n\ (A) \cdot n\ (B) = 3 \cdot 3 = 9$.

Применяя метод математической индукции, это правило легко распространить на любое конечное число множеств.

## 1.2. Правила сложения и умножения в комбинаторике

Из теорем 1-2 следуют два простых правила комбинаторики.

**Правило суммы.** Если два действия взаимно исключают друг друга, причем одно из них можно выполнить $m$ способами, а другое – $n$ способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $n + m$ способами.

**Правило умножения.** Пусть требуется выполнить последовательно $k$ действий. Если первое действие можно выполнить $n_1$ способами, второе действие $n_2$ способами, третье - $n_3$ способами и так до $k$-го действия, которое можно выполнить $n_k$ способами, то все $k$ действий вместе могут быть выполнены $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Эти правила дают удобный универсальный метод решения многих задач.

**Задача 1.** В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту и профорга. Сколькими способами можно это сделать?

*Решение.* Старостой может быть выбран любой из 30 учащихся, то есть существует 30 способов выбора старосты. После того, как староста уже выбран, профоргом можно выбрать любого из оставшихся 29 учащихся. Согласно правилу умножения, общее число способов выбора старосты и профорга равно $30 \cdot 29 = 870$.

**Задача 2.** Необходимо составить варианты контрольной работы, каждый из которых должен содержать три задачи. Первая задача выбирается из любого параграфа I главы сборника, вторая - из любого параграфа II главы, а третья - из любого параграфа III главы. Сколько видов контрольной работы можно составить, если I и III глава содержат два параграфа, а II глава - три параграфа?

*Решение.* Нужно найти число способов выбора трех задач из трех соответствующих глав. Первую задачу можно выбрать двумя способами, так как I глава содержит 2 параграфа. Вторую задачу можно выбрать тремя способами, так как II глава содержит 3 параграфа. Третью задачу можно выбрать двумя способами, так как III глава содержит 2 параграфа. Общее число способов выбора трех задач по теореме умножения равно $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$. Таким образом, можно составить 12 различных видов контрольной работы.

**Задача 3.** Четыре мальчика и четыре девочки садятся на 8 расположенных подряд стульях, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки - на места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать?

*Решение.* Первый мальчик может сесть на любое из четырех четных мест, второй - на любое из оставшихся трех мест, третий - на любое из оставшихся двух мест. Последнему мальчику предоставляется всего одна возможность. Согласно правилу умножения мальчики могут занять четыре места $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами. Столько же возможностей имеют и девочки. Таким образом, согласно правилу умножения, мальчики и девочки могут занять все стулья $24 \cdot 24 = 576$ способами.

**Задача 4.** Имеется 20 изделий 1-го сорта и 30 изделий 2-го сорта. Необходимо выбрать 2 изделия одного сорта. Сколькими способами можно это сделать?

*Решение.* Согласно условию задачи следует выбрать 2 изделия одного сорта, неважно какого. Это могут быть либо изделия 1-го сорта, либо изделия 2-го сорта. По правилу умножения два изделия 1-го сорта можно выбрать $20 \cdot 19 = 380$ способами. Аналогично два изделия 2-го сорта можно выбрать $30 \cdot 29 = 870$ способами. Выбор 2 изделий 1-го сорта исключает выбор 2 изделий 2-го сорта. Тогда по правилу сложения общее число способов выбора изделий одного сорта равно $380 + 870 = 1250$.

Мы рассмотрели некоторые общие правила решения комбинаторных задач. С их помощью можно решать задачи самых разных типов. Однако, как в геометрии неудобно всегда сводить решение задачи к аксиомам, а удобнее пользоваться теоремами, так и в комбинаторике вместо решения задачи по общим правилам часто удобнее пользоваться готовыми формулами для некоторых типов задач, которые встречаются чаще других.

## 2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

### 2.1. Выборки

Рассмотрим множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, содержащее $n$ различных элементов, которое будем называть $n$-множеством или генеральной совокупностью объема $n$. Из $n$-множества можно образовать его части (подмножества).

**Определение.** Подмножество, состоящее из $m$ элементов $n$-множества, называют $m$-подмножеством $n$-множества или соединением из $n$ элементов по $m$, или выборкой объема $m$ из генеральной совокупности объема $n$.

Возможны два способа выбора:

1. *Выбор без возвращения*, при котором однажды выбранный элемент удаляется из генеральной совокупности. Выборка (соединение) в этом случае не содержит повторяющихся элементов.

2. *Выбор с возвращением*, при котором выбор производится каждый раз из всей генеральной совокупности, то есть перед следующим выбором предыдущий выбранный элемент возвращается в

генеральную совокупность. В выборке (соединении) в этом случае встречаются повторения.

Какие выборки одного и того же объема считать различными и какие одинаковыми, зависит от правил выбора соединения (подмножества, выборки).

Два соединения могут отличаться либо 1) составом, если они содержат хотя бы по одному различному элементу, либо 2) порядком входящих элементов.

В зависимости от правил выбора соединения делят на три типа: размещения, перестановки, сочетания. В зависимости от способа выбора (без возвращения или с возвращением) каждый тип соединения может быть без повторений или с повторениями.

## 2.2. Размещения с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по $m$ различным местам $m$ из $n$ различных предметов?

Также классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений с повторениями, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по $m$ различным местам $m$ из $n$ предметов, среди которых есть одинаковые?

**Определение.** Размещениями из $n$ элементов по $m$ называются соединения из $n$ элементов по $m$, которые отличаются друг от друга либо своими элементами (составом), либо порядком их расположения.

На языке теории множеств это звучит следующим образом: размещения из $n$ элементов по $m$ - это упорядоченное $m$ -подмножество $n$-множества (упорядоченная $m$ -выборка из генеральной совокупности объема $n$). Термин «упорядоченная» означает, что порядок следования элементов в выборке существенен: выборки с одними и теми же элементами, но с разным порядком их следования различны.

**Задача.** Пусть имеется множество, содержащее 4 буквы: $\{A, B, C, D\}$. Записать все возможные размещения из 4 указанных букв по две: а) без повторений; б) с повторениями.

*Решение*. а) Таких размещений 12: ($AB$), ($AC$), ($AD$), ($BC$), ($BD$), ($BA$), ($CA$), ($CB$), ($CD$), ($DA$), ($DB$), ($DC$). Заметим, что размещения отличаются порядком входящих в них элементов и их составом. Размещения $AB$ и $BA$ содержат одинаковые буквы, но порядок их расположения различен.

б) Таких размещений 16. К приведенным для случая ($a$) размещениям добавляются размещения из одинаковых элементов ($AA$), ($BB$), ($CC$), ($DD$).

**Задача.** Пусть имеется множество, содержащее 2 буквы $\{A, B\}$. Записать все возможные размещения с повторениями из 4-х букв.

*Решение.* Таких размещений 16: ($AAAA$), ($BBBB$), ($AAAB$), ($AABA$), ($ABAA$), ($BAAA$), ($AABB$), ($ABAB$), ($BABA$), ($BBAA$), ($ABBA$), ($BAAB$), ($BBBA$), ($BBAB$), ($BABB$), ($ABBB$).

**Теорема 3.** Число различных размещений без повторений $A_n^m$ из $n$ элементов по $m$ равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{1}$$

для выборки без возвращения.

Число размещений с повторениями $\overline{A_n^m}$ из $n$ элементов по $m$ равно

$$\overline{A_n^m} = n^m \tag{2}$$

для выборки с возвращением.

*Доказательство.* Для доказательства воспользуемся правилом умножения. Рассмотрим выборки без возвращения. Для выбора первого элемента имеется $n$ возможностей, второго — $(n - 1)$ (перед вторым выбором в генеральной совокупности осталось $(n - 1)$ элементов), при $m$-ом выборе $(n - m + 1)$ возможностей. Таким образом, по правилу умножения

$A_n^m = n\,(n - 1)\,(n - 2)\ldots\,(n - m + 1).$

Запишем выражение в более удобном виде, умножив и разделив его на $(m - n)!$

$$A_n^m = \frac{(n-m)!(n-m+1)\ldots(n-2)(n-1)n}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Считается, что $0! = 1$, что позволяет использовать эту формулу для случая $m = n$.

Рассмотрим выборки с возвращением. Для выбора первого элемента имеется $n$ возможностей, второго - тоже $n$ (перед выбором очередного элемента предыдущий выбранный элемент зафиксирован и возвращен в генеральную совокупность), при $m$-м выборе тоже $n$ возможностей. Таким образом $\overline{A_n^m} = n^m$.

**Задача.** В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

*Решение.* В данной задаче генеральной совокупностью являются 12 страниц газеты, и выборкой без возвращения 4 выбранные из них страницы для фотографий. В данной задаче важно не только то, какие выбраны страницы, но и в каком порядке (для расположения фотографий). Таким образом, задача сводится к классической задаче об определении числа размещений без повторений из 12 элементов по 4 элемента:

$A_{12}^{4} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880.$

Таким образом, 4 фотографии на 12 страницах можно расположить 11880 способами.

**Задача.** У мальчика остались от набора для настольной игры штампы с цифрами 1, 3 и 7. Он решил с помощью этих штампов нанести на все книги пятизначные номера – составить каталог. Сколько различных пятизначных номеров может составить мальчик?

*Решение.* Можно считать, что опыт состоит в 5-кратном выборе с возращением одной из 3 цифр {1, 3, 7}. Таким образом, число пятизначных номеров определяется числом размещений с повторениями из 3 элементов по 5:

$\overline{A_{3}^{5}} = 3^{5} = 243.$

**Задача.** Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона, который состоит из 7 цифр. Сколько существует вариантов выбора при условии: а) все цифры номера различны; б) все цифры номера могут быть любыми из имеющихся десяти; в) четыре последние цифры телефонного номера одинаковы.

*Решение.*

а) В данной задаче генеральной совокупностью является десять цифр {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}. Так как цифры в номере повторяться не могут, то опыт состоит в 7-кратном выборе без возвращения одной из этих 10 цифр. В номере важен порядок следования цифр. Следовательно, число вариантов выбора определяется числом размещений без повторений из 10 цифр по 7:

$A_{10}^{7} = \frac{10!}{3!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604800.$

б) Опыт состоит в 7-кратном выборе с возвращением любой цифры из 10. То есть число вариантов выбора определяется числом размещений с повторениями из 10 элементов по 7: $\overline{A_{10}^{7}} = 10^{7}$.

в) Первые четыре цифры выбираются из любых десяти с возвращением, а три последние цифры номера однозначно определяются уже выбранной четвертой цифрой. Таким обратом, число вариантов выбора определяется числом размещений с повторениями из 10 элементов по 4: $\overline{A_{10}^{4}} = 10^{4}$.

## 2.3. Перестановки без повторений

Классической задачей комбинаторики является задача о числе перестановок без повторения, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно разместить $n$ различных предметов на $n$ различных местах?

**Определение.** Размещения, в которых участвуют все $n$ элементов генеральной совокупности, называются перестановками без повторений из $n$ элементов. Перестановки состоят из одних и тех же элементов, но отличаются между собой порядком.

**Задача.** Пусть имеется множество букв $\{A, B, C\}$. Записать все возможные перестановки.

*Решение.* Этому множеству букв соответствует 6 перестановок: ($ABC$), ($ACB$), ($BAC$), ($BCA$), ($CBA$), ($CAB$).

**Теорема.** Число перестановок $n$ различных элементов равно $n!$, т.е. $P_n = n!$

*Доказательство.* Так как перестановки являются частным случаем размещений, то при $n = m$ получаем

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

**Замечание.** При больших п для подсчета факториала используют таблицу логарифмов факториалов либо приближенную формулу Стирлинга

$$\ln n! = n \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi n} + \frac{\theta}{12n}, \ 0 < \theta < 1.$$

**Задача.** Сколько можно составить четырехбуквенных «слов» из букв слова «брак»?

*Решение.* Генеральной совокупностью являются 4 буквы слова «брак»
{б, р, а, к}. Число «слов» определяется перестановками этих 4 букв, т.е.

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

**Задача.** Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

*Решение.* В исходной генеральной совокупности - 9 разных книг. Будем считать выделенные 4 книги за одну. Тогда для остальных 6 книг существует $P_6 = 6! = 720$ перестановок. Однако четыре определенные книги можно переставить между собой $P_4 = 4! = 24$ способами. По правилу умножения имеем $P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280$.

## 2.4. Перестановки с повторениями

Для случая, когда среди выбираемых $n$ элементов есть одинаковые (выборка с возвращением), задачу о числе перестановок с повторениями можно выразить вопросом: сколькими способами можно переставить $n$ предметов, расположенных на $n$ различных местах, если среди $n$ предметов имеются $k$ различных типов ($k < n$), т. е. есть одинаковые предметы.

**Определение.** Перестановками с повторениями называются соединения из генеральной совокупности, каждое из которых содержит $n$ элементов, среди которых элемент

$a_1$ повторяется $n_1$ раз,

$a_2$ повторяется $n_2$ раз,

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$a_n$ повторяется $n_k$ раз

$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

и которые отличаются друг от друга только порядком расположения различных элементов.

**Теорема.** Число перестановок с повторениями $\overline{P_n}(n_1, \ n_2, \ldots, n_k)$ равно $\overline{P_n}(n_1, \ n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_3!}$ .

*Доказательство.* Доказательство очевидно, так как перестановки одинаковых элементов в перестановке с повторениями не дают новой перестановки.

**Задача.** Сколько разных буквосочетаний можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

*Решение.* Здесь 1 буква «м», 4 буквы «и», 3 буквы «с» и 1 буква «п», всего 9 букв.

Следовательно, число перестановок с повторениями равно

$\overline{P_9}(1, 4, 3, 1) = \dfrac{9!}{1!4!3!1!} = 2520.$

### 2.5. Сочетания без повторений

Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать $m$ из $n$ различных предметов?

**Определение.** Сочетаниями из $n$ различных элементов по $m$ называются соединения из $n$ элементов по $m$ ($m \le n$), которые отличаются друг от друга только составом элементов.

**Задача.** Пусть имеется множество, содержащее 4 буквы $\{A, B, C, D\}$. Запишем все возможные сочетания из указанных букв по 3.

*Решение.* Таких сочетаний 4: $ABC$, $ACD$, $ABD$, $BCD$. Здесь в число сочетаний не включены, например, $ACB$, $BCA$, так как они не отличаются по составу от последовательности букв $ABC$, потому что перестановка элементов нового сочетания не дает.

**Теорема.** Число сочетаний из $n$ элементов по $m$ равно $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ .

*Доказательство.* Вспомним, что и сочетания, и размещения из $n$ элементов по $m$ - это выборки объема $m$ из генеральной совокупности объема $n$ и разница между ними в том, что в случае размещении важен и состав, и порядок элементов, тогда как в случае сочетаний важен только состав элементов. Пусть имеется какое-то одно сочетание. Для того, чтобы образовать все размещения с такими же элементами, нужно осуществить всевозможные перестановки элементов этого сочетания. Поскольку в сочетании $m$ элементов, то существует $m!$ перестановок. Следовательно, одному сочетанию, состоящему из $m$ элементов, соответствует $m!$ размещений с этими элементами. Поэтому

$$A_n^m = m!\ C_n^m \Rightarrow C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} .$$

Числа $C_n^m$ называются биномиальными коэффициентами: они являются коэффициентами в разложении бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0\, a^0 b^n + C_n^1\, a^1 b^{n-1} + C_n^2\, a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^n\, a^n b^0 = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}$$

и обладают рядом замечательных свойств:

$C_n^m = C_n^{n-m}$ ,

$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ ,

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n ,$$

$$\sum_{m=0}^{n} nC_n^m = n2^{n-1} ,$$

$$\sum_{m=0}^{n} n^2 C_n^m = n\left(n+1\right)2^{n-2} ,$$

$$\sum_{m=0}^{n} \left(-1\right)^m C_n^m = 0.$$

**Задача.** Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

*Решение.* Генеральной совокупностью является 10 различных книг. Из них нужно выбрать 4, причем порядок выбора книг не играет роли. Нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4: $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210.$

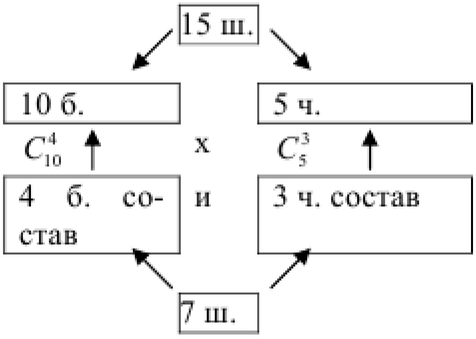
**Задача.** Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров, чтобы среди них были 3 черных?

*Решение.* Имеем 15 шаров: 10 белых и 5 черных. Нужно выбрать 7 шаров: 4 белых и 3 черных. Разобьем 15 шаров на 2 генеральные совокупности:

1) 10 белых шаров;

2) 5 черных шаров. 4 белых шара будем выбирать из I генеральной совокупности, порядок выбора безразличен, их можно выбрать $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210$ способами. 3 черных шара будем выбирать из II генеральной совокупности, их можно выбрать $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ способами. Тогда по правилу умножения искомое число способов равно $C_{10}^4 \cdot C_5^3 = 2100$.

Решение этой задачи можно схематически представить следующим образом:




**Задача.** Десять команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу, лучшие из которых занимают 1-е, 2-е и 3-е место. Две команды, занявшие последние места, не будут участвовать в следующем таком же первенстве. Сколько разных вариантов результата первенства может быть, если учитывать только положение первых трех и последних двух команд.

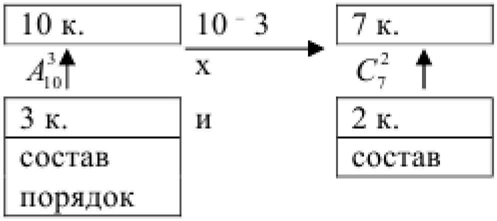
*Решение.* Имеется генеральная совокупность объема 10 команд. Из нее будем выбирать 5 команд в 2 этапа:

1) сначала на первые 3 места из 10 с учетом состава и порядка команд;

2) затем на последние 2 места из оставшихся 7 с учетом только состава (порядок выбывших команд не важен). Первые 3 места могут быть распределены $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720$ способами. Число способов исключить 2 команды из оставшихся 7 равно $C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21$. Согласно правилу умножения получаем, что число разных результатов неравенства равно

$A_{10}^3 \cdot C_7^2 = 15120.$

Решение этой задачи можно схематически представить следующим образом:




**Задача.** Сколько существует вариантов опроса 11 учащихся на одном занятии, если ни одни из них не будет подвергнут опросу дважды и на занятии может быть опрошено любое количество учащихся, причем порядок, в котором опрашиваются учащиеся, безразличен?

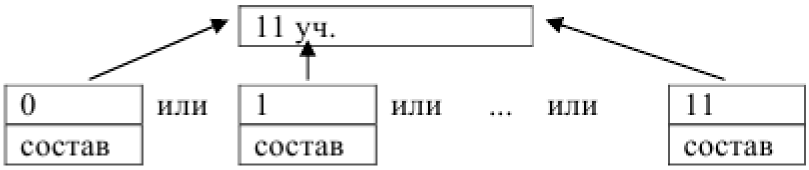
*Решение.*

*I способ*. Имеется генеральная совокупность объема 11 учащихся. Преподаватель может не опросить ни одного из 11 учащихся, что является одним из вариантов. Этому случаю соответствует $C_{11}^0$. Преподаватель может опросить только одного из учащихся, таких вариантов $C_{11}^1$. Если преподаватель опросит двух учащихся, то число вариантов опроса $C_{11}^2$. Для опроса трех учащихся существует $C_{11}^3$ вариантов и т. д. Наконец, могут быть опрошены все учащиеся. Число вариантов в этом случае $C_{11}^{11}$.

Число всех возможных вариантов опроса можно найти по правилу сложения

$$C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + C_{11}^3 + \ldots + C_{11}^{11} = 2^{11}.$$

Решение этой задачи можно схематически представить следующим образом:




$$C_{11}^{0} \quad + \quad C_{11}^{1} \quad + \quad \ldots \quad + \quad C_{11}^{11}$$

*II способ.* Имеется генеральная совокупность, состоящая из 2 элементов: $\{a,\ b\}$, где $a$ - ученик опрошен, $b$ - ученик не опрошен на данном занятии. Опыт состоит в 11-кратном выборе с возвращением одного из элементов этого множества – каждый из 11 учеников либо опрошен, либо не опрошен. В данной задаче важно не только то, какие выбраны элементы множества (сколько учеников опрошено и сколько нет), но и в каком порядке (т. е. какой именно ученик опрошен или нет). Число способов такого выбора определяется числом размещений с повторениями из 2 элементов по 11; $\overline{A_2^{11}} = 2^{11}$.

## 2.6. Сочетания с повторениями

Рассмотрим задачу о числе сочетаний с повторениями: имеется по $r$ одинаковых предметов каждого из $n$ различных типов; сколькими способами можно выбрать $m$ ($m \le r$) из этих ($n \cdot r$) предметов?

**Определение.** Сочетаниями с повторениями называются соединения из $n$ элементов по $m$ (выбор с возвращением $m$ элементов), которые отличаются только составом и при этом отдельные соединения могут содержать повторяющиеся элементы.

**Задача.** Имеются 2 буквы $A$, 2 буквы $B$, 2 буквы $C$. Сколькими способами можно выбрать две из этих шести букв?

*Решение.* Существует 6 способов выбора 2 букв из 6 с повторениями: ($AA$), ($AB$), ($AC$), ($BC$), ($BB$), ($CC$). Порядок следования букв не учитывается.

**Теорема.** Число $\overline{C_n^m}$ сочетаний с повторениями равно

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} .$$

*Доказательство.* Пусть имеются предметы $n$ различных типов. Сколько соединений по $m$ элементов можно из них сделать, если не принимать во внимание порядок элементов. Расположим в каждом сочетании элементы по типам (сначала все элементы 1-го типа, потом 2-го и т. д.). После этого перенумеруем все элементы в сочетании, но к номерам элементов второго типа прибавим 1, третьего типа - 2 и т. д. Тогда из каждого сочетания с повторениями получится сочетание без повторений, состоящее из чисел 1, 2,..., $n + m - 1$, причем в каждое сочетание входит $m$ элементов. Отсюда следует, что

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} .$$

**Задача.** В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т. д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные 4 заказа на литературу. Сколько существует вариантов такого заказа?

*Решение.* Так как 4 заказанные книги могут быть и из одного раздела науки, и из разных разделов, при этом порядок выбора разделов не важен, то число вариантов заказа определяется числом сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, т. е.

$$\overline{C_{16}^4} = C_{16+4-1}^4 = C_{19}^4 = \frac{19!}{4!15!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3876.$$

**Задача.** В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

*Решение.* Очевидно, что порядок, в котором выбираются пирожные, не существен, причем в комбинации могут входить повторяющиеся элементы (например, можно купить 7 эклеров). Следовательно, число способов покупки 7 пирожных определяется числом сочетаний с повторениями из 4 элементов по 7, т.е.

$$\overline{C_4^7} = C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

## 2.7. Комбинаторика разбиений

Рассмотрим в этом классе задач две следующие задачи:

1. Даны $n$ различных предметов и $k$ различных групп. Сколькими способами можно распределить $n$ различных предметов по $k$ различным группам, если допускаются пустые группы. Ниже покажем, что число способов равно $k^n$.

2. Даны $n$ различных предметов и $k$ различных групп. Сколькими способами можно распределить $n$ различных предметов по $k$ группам, если в первой группе $n_1$ предметов, во второй - $n_2$, в $k$-й - $n_k$, где

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

Ниже покажем, что число способов равно $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$.

Рассмотрим решение первой задачи.

Пусть генеральной совокупностью будет $k$ различных групп {1, 2,..., $k$}. Можно считать, что опыт состоит в $n$-кратном выборе с возвращением номера группы для каждого предмета. Заметим, что поскольку предметы разные, то важно не только, какие группы выбираются для предметов, но и в каком порядке выбираются эти группы. Таким образом, число способов разбить $n$ различных предметов на $k$ групп определяется числом размещений с повторениями и $k$ элементов по $n$: $\overline{A_k^m} = k^n$.

Рассмотрим решение второй задачи.

Разбиение $n$ предметов по $k$ группам можно выполнить следующим образом. Сначала положим все $n$ предметов в ряд. После этого возьмем первые $n_1$ предметов и поместим их в первую группу, вторые $n_2$ предмета - во вторую группу,…,последние $n_k$ предметов в $k$-ю группу. Ясно, что меняя положение предметов в ряду, можно получить всевозможные разбиения предметов. Так как число перестановок из $n$ элементов равно $n!$, то число расположения предметов в ряд равно $n!$ При этом заметим, что любая перестановка первых $n_1$ предметов ничего не меняет, так же как и вторых $n_2$,…, и последних $n_k$. В силу правила произведения получим $n_1!\,n_2!\ldots n_k!$ перестановок предметов, не меняющих результата раздела. Таким образом, число способов разбиения на группы равно

$$P_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} .$$

Формула совпадает с формулой для числа перестановок с повторениями. К этому же результату можно прийти иначе. Первые $n_1$ предметов выбираем из $n$ предметов. Так как порядок выбранных предметов безразличен, то имеет $C_n^{n_1}$ выборов. После этого следующие $n_2$ предмета выбираем из оставшихся $n$ - $n_1$. Это можно сделать $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами, и т. д. Наконец, последние $n_k$ предметов выбираем из оставшихся $n_k$. Это можно сделать $C_{n_k}^{n_k}$, т. е. единственным способом. По правилу произведения получаем, что число способов разбиения на группы равно $C_{n_1}^{n_1}\, C_{n-n_1}^{n_2}, \ldots, C_{n_k}^{n_k} = \dfrac{n!(n-n_1)\ldots n_k}{n_1!(n-n_1)!n_2!(n-n_2)!n_k!n_k!} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ .

Как видим, задачи о разбиениях привели к уже известным формулам комбинаторики.

**Задача.** 7 одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шаров).

Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам?

*Решение.* Мы имеем 7 шариков, которые распределяем по 4 лункам (лунки могут быть пустые), т. е. это соответствует первой задаче о разбиениях, число способов равно $4^7 = 16348$.

**Задача.** При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

*Решение.* Это задача о разделе 28 костей между 4 игроками по 7 костей.

Используя полученную выше формулу для числа способов такого раздела (задача 2), имеем $\frac{28!}{7!7!7!7!} \approx 47 \cdot 10^{15}$.

## 2.8. Рекомендации по решению задач

Решение комбинаторных задач представляет известную трудность для начинающих. Причин много, но одна из них очевидна - при изложении комбинаторики используется своя специфическая терминология (генеральная совокупность, выборка, правила выбора). В задаче же этих терминов, как правило, нет – сформулирована она на обычном литературном языке и комбинаторные понятия присутствуют в ней в неявной форме. Поэтому после усвоения содержания задачи нужно ее «перевести» на математический язык.

Для этого необходимо выяснить,

1) что является генеральной совокупностью - она всегда будет присутствовать в задаче, т. е. комбинаторные задачи связаны с выбором объектов, а этот выбор из чего-то (генеральной совокупности) производится; каков объем генеральной совокупности;

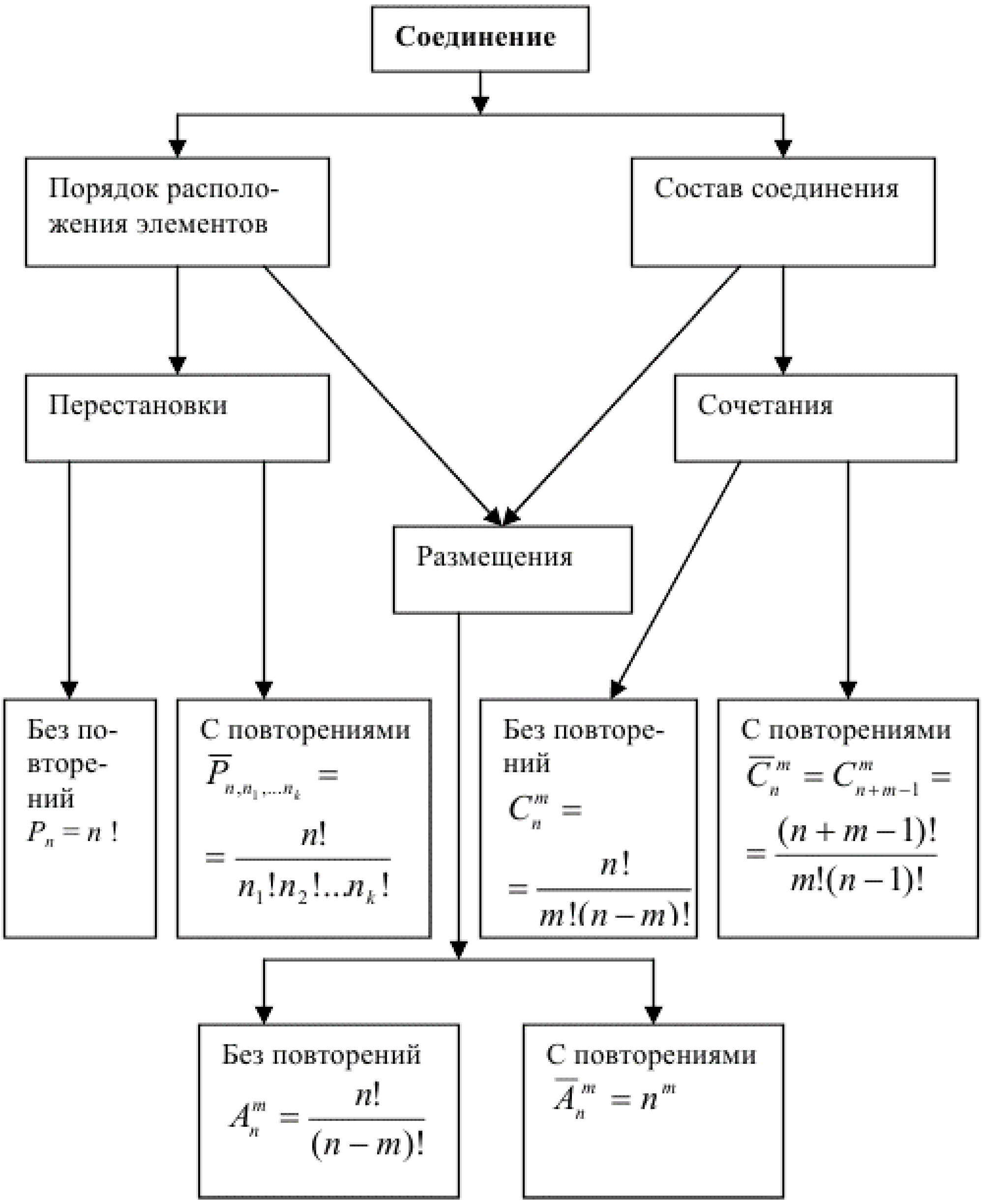
2) одна или несколько генеральных совокупностей;

3) что является выборкой и каков объем выборки;

4) правила выбора: допустимы или нет повторы, важен ли порядок выбираемых элементов, возможно ли изменение состава.

После этого полезно для себя переформулировать задачу на языке генеральных совокупностей и выборок. В зависимости от ситуации выбрать нужную формулу (см. таблицу). Иногда в более сложных задачах приходится использовать совместно несколько формул.

Сводка формул дли всех видов соединений



## 3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Чем занимается комбинаторный анализ?
2. Что такое генеральная совокупность объема и? Приведите примеры.
3. Что такое выборка объема $m$? Приведите примеры.
4. Что такое соединения из $n$ элементов по $m$? Примеры.
5. Понятие факториала. Чему равно 5!, 0!, 10!?
6. Правило произведения в комбинаторике.
7. Правило суммы в комбинаторике.
8. Что такое размещения из $n$ элементов по $m$? Примеры.
9. Вывод формулы для числа размещений из $n$ элементов по $m$ без повторений и с повторениями $A_n^m$, $\overline{A_n^m}$.
10. Вычислите $A_n^1$, $A_6^4$, $A_6^6$, $A_n^n$, $\overline{A_n^2}$, $\overline{A_6^4}$, $\overline{A_6^6}$.
11. Что такое перестановки без повторений из $m$ элементов? Примеры.
12. Формула для числа перестановок без повторений из $m$ элементов.
13. Формула Стирлинга.
14. Что такое перестановки с повторениями? Примеры.
15. Формула для числа перестановок с повторениями.
16. Что такое сочетания из $n$ элементов по $m$ (без повторений и с повторениями)?
17. В чем различия между сочетаниями и размещениями?
18. Связь между числами $A_n^m$ и $C_n^m$.
19. Вывод формулы для $C_n^m$. Вычислите $C_n^1$, $C_n^n$, $C_6^3$, $C_n^2$, $C_n^0$.
20. Что такое биноминальные коэффициенты, их свойства?
21. Основные задачи комбинаторики разбиений.

## 4. БАНК ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Имеется множество чисел $\{1, 2, 3, 4\}$. Составить следующие виды соединений по 2 элемента из четырех: а) размещения без повторений; б) размещения с повторениями; в) сочетания без повторений; г) сочетания с повторениями.
2. Из Москвы до Новосибирска можно добраться поездом и самолетом; из Новосибирска в Томск - поездом, самолетом, автобусом, пароходом. Сколькими способами можно осуществить путешествие по маршруту Москва - Новосибирск-Томск?

   *Ответ*: 8.
3. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? Дайте ответ на этот же вопрос, если подъем и спуск осуществляются различными путями.

   *Ответ*: 49; 42.
4. Стадион имеет 4 входа. Сколькими способами болельщик может войти на стадион в один вход, а выйти через другой?

   *Ответ*: 12.
5. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?

   *Ответ*. Если взято яблоко.
6. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1,2, 3, 4, 5, если:

   а) ни одна из цифр не повторяется более одного раза;

   б) цифры могут повторяться;

в) числа должны быть нечетными (цифры могут повторяться)?

*Ответ*: а) 300; б) 1080; в) 540.

7. Сколькими способами можно разместить 4 книги на полке?

*Ответ*: 24.

8. Сколькими способами можно поставить в ряд 6 человек для выполнения их группового портрета? Сколькими способами можно это сделать, если поставить трех человек в переднем ряду и трех во втором?

*Ответ*: 720.

9. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «лодка»?

*Ответ*: 120.

10. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «математика»?

*Ответ*: 151200.

11. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?

*Ответ*: 389188800.

12. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

*Ответ*: $A_{10}^{6} = 151200$.

13. Сколькими способами можно выбрать трех делегатов на студенческую конференцию из группы в 20 человек?

*Ответ*: 1140.

14. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получить вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер.

Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

*Ответ*: 60.

15. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?

*Ответ*: 10.

16. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если материал пяти различных цветов?

*Ответ*: 60.

17. В театре 10 актеров и 8 актрис. Сколькими способами можно распределить между ними роли в пьесе, в которой 5 мужских и 3 женские роли?

*Ответ*: $A_{10}^{5} \cdot A_{8}^{3} = 10160640$.

18. Из колоды в 52 карты выбирают 3. Сколькими способами может быть сделан выбор «тройка, семерка, туз»?

*Ответ*: 64.

19. На олимпиаду пришло 8 студентов. Сколькими способами их можно распределить в 3 аудитории?

*Ответ*: $6501 = 3^{8}$.

20. Сколькими способами можно распределить 10 специалистов по четырем цехам, чтобы в них попало соответственно 1, 2, 3, 4 специалиста?

*Ответ*: 12600.

21. Сколькими способами можно расселить 8 студентов по трем комнатам: одноместной, трехместной и четырехместной?

*Ответ*: 280.

22. Учителю для урока труда нужно принести 28 листов цветной бумаги. В учительской имеется белая, синяя, красная, зеленая и

желтая бумага. Сколькими способами учитель может выбрать нужные ему 28 листов?

*Ответ*: 35960.

23. Сколькими способами можно выбрать 6 одинаковых или разных пирожных в кондитерской, где есть 11 разных сортов пирожных?

*Ответ*: 8008.

24. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечетны (1,3, 5, 7, 9)?

*Ответ*: 15625.

25. Сколькими способами можно рассадить 7 человек за круглым столом?

*Ответ*: 5040.

26. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

*Ответ*: 720.

27. Восемь девушек отправились в путешествие на двух лодках, в меньшей из которых могли поместиться не более четырех, а в большей - не более шестерых. Сколькими различными способами они могут распределиться в разные лодки? (Распределения считаются различными, если хотя бы одна из девушек окажется в другой лодке.)

*Ответ*: $C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 = 154$.

28. В классе 29 учеников. Сколько существует различных вариантов присутствия (отсутствия) этих учеников в классе?

*Ответ*: 229.

29. Числа 1, 2,..., 9 записываются в случайном порядке. Сколько существует вариантов такой записи, если: а) числа будут записаны в порядке возрастания: б) числа 1 и 2 будут стоять

рядом и в порядке возрастания; в) на четных местах будут стоять четные числа; г) сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10?

*Ответ*: а) 1; 2) $8! = 40320$; в) $5!\,4! = 2880$; г) $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$.

30. Сколько четных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2?

*Ответ*: 16.

31. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти можно изобразить цифрами 0, 1,2, 3, 4, 5, причем в запись числа входят только различные цифры?

*Ответ*: $9 \cdot 4! = 216$.

## 5. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

### *Вариант 1*

1. Из двух спортивных обществ, насчитывающих 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

*Ответ*: $10^4$.

2. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в эстафете 100 + 200 + 100 + 800? Сколькими способами можно это сделать?

*Ответ*: 657720.

3. Сколько различных браслетов можно сделать, имея пять одинаковых изумрудов, шесть одинаковых рубинов и семь одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней). (Браслет

не изменится при циклической перестановке камней и при переворачивании).

*Ответ*: 408408.

***Вариант 2***

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

*Ответ*: 20.

2. 25 выпускников школы решили обменяться фотографиями. Сколько было всего заказано фотографий?

*Ответ*: 600.

3. Сколько ожерелий можно составить из семи бусинок разных размеров (надо использовать все 7 бусинок)? (Надо учесть, что ожерелье остается неизменным при циклической перестановке бусинок и при переворачивании).

*Ответ*: 360.

***Вариант 3***

1. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «камзол»?

*Ответ*: 8.

2. Сколько нечетных чисел можно составить из цифр числа 3694 (каждую цифру можно использовать не более одного раза)?

Ответ: 12.

3. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется 2 туза?

*Ответ*: 226093964.

***Вариант 4***

1. Бросается игральная кость с шестью гранями и запускают волчок, имеющий восемь граней. Сколькими способами могут они упасть?

*Ответ*: 48.

2. Сколько четных чисел можно составить из цифр числа 3694 (каждую цифру можно использовать не более одного раза)?

*Ответ*: 12.

3. На железнодорожной станции имеется 10 светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый и зеленый?

*Ответ*: 59049.

### *Вариант 5*

1. На ферме есть 20 коз и 24 овец. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну козу? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?

*Ответ*: 480; 437.

2. Поезду, в котором находится 10 пассажиров, предстоит сделать 5 остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры, выходящие на остановках?

*Ответ*: 9.765.625.

3. Сколько различных «слов» можно образовать из букв слова «зебра»?

*Ответ*: 120.

### *Вариант 6*

1. Из слов, среди которых 12 мужского, 9 женского и 10 среднего рода, выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

*Ответ*: 1080.

2. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной оценки?

*Ответ*: 81.

3. Сколько различных «слов» можно образовать из букв слова «баран»?

*Ответ*: 60.

**Вариант 7**

1. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»?

*Ответ*: 9.

2. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать?

*Ответ*: 27405.

3. На полке стоит 5 книг в черных переплетах и 4 книги в синих переплетах, причем все книги разные. Сколькими способами можно расставить книги так, чтобы книги в черных переплетах стояли рядом?

*Ответ*: 14400.

**Вариант 8**

1. Из учебников, среди которых 3 экземпляра по алгебре, 7 экземпляров по геометрии и 7 экземпляров по тригонометрии, надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами можно это сделать?

*Ответ*: 147.

2. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

*Ответ*: 45.

3. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать

стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

*Ответ*: 5040.

### *Вариант 9*

1. Имеются 3 волчка с 6; 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами могут они упасть при одновременном запуске?

*Ответ*: 480.

2. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел?

*Ответ*: 18.

3. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

*Ответ*: 729.

### *Вариант 10*

1. Сколькими способами можно выбрать 4 карты из полной колоды карт (52) по одной карте каждой масти?

*Ответ*: 28561.

2. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел?

*Ответ*: 10.

3. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выбрать одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

*Ответ*: 12180.

## *Вариант 11*

1. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого, если среди всех книг нет одинаковых?

*Ответ*: 63.

2. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор точек и тире. Сколько букв может быть в азбуке Морзе, если буква не должна содержать более четырех знаков?

*Ответ*: 30.

3. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется один туз?

*Ответ*: 33542132800.

## *Вариант 12*

1. Для проведения экзамена создается комиссия из 2 преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из пяти преподавателей?

*Ответ*: 10.

2. Автомобильные номера состоят из трех букв (всего используется 30 букв) и четырех цифр (используется 10 цифр). Сколько автомобилей можно занумеровать таким образом, чтобы никакие два автомобиля не имели одинакового номера?

*Ответ*: $27 \cdot 10^7$.

3. Сколько различных «слов» можно образовать из букв слова «водород»?

*Ответ*: 420.

### *Вариант 13*

1. Для дежурства в классе в течение недели (кроме воскресенья) выделены 6 учащихся. Сколькими способами можно установить очередность дежурства, если каждый учащийся дежурит один раз?

*Ответ*: 720.

2. Па пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если все путевки одинаковы?

*Ответ*: 10.

3. На первой из двух параллельных прямых лежит 10 точек, на второй - 20. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

*Ответ*: 2800.

### *Вариант 14*

1. Имеется три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами могут они упасть, если известно, что, по крайней мере, два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1.

*Ответ*: 22.

2. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, используя цифры 1 и 2?

*Ответ*: 1024.

3. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить 8 открыток?

*Ответ*: 24310.

### *Вариант 15*

1. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт (52) по одной карте каждой масти при условии, что среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых, то есть двух королей, двух десяток и т. д.

*Ответ*: 17 160.

2. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причем первый и третий должны написать по 5 глав, второй - 4, а четвертый - 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?

*Ответ*: 171 531 360.

3. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого - 9 книг. Сколькими способами они могут обменять 2 книги одного на две книги другого, если все книги разные?

*Ответ*: 756.

### *Вариант 16*

1. В седьмом классе изучаются 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков?

*Ответ*: 240240.

2. Сколько диагоналей имеет выпуклый 15-угольник?

*Ответ*: 90.

3. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз?

*Ответ*: 17 189 320 434.

### *Вариант 17*

1. Сколько шестизначных чисел кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

*Ответ*: 120.

2. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если все путевки различны?

*Ответ*: 60.

3. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

*Ответ*: 293 930.

### *Вариант 18*

1. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выделить 2 человек для дежурства, если один из них должен быть старшим?

*Ответ*: 870.

2. Для освещения зала может быть включено различное количество из имеющихся 10 ламп. Сколько существует различных способов освещения?

*Ответ*: 1024.

3. В розыгрыше первенства по футболу было сыграно 153 матча. Каждые команды встретились между собой один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше первенства?

*Ответ*: 18.

### *Вариант 19*

1. Сколько различных двухзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3,4? (Цифры не повторяются).

*Ответ*: 12.

2. В чемпионате страны по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд, причем каждые 2 команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?

*Ответ*: 306.

3. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

*Ответ*: 371.

## *Вариант 20*

1. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выделить 2 человек для дежурства, если старшего быть не должно?

*Ответ*: 435.

2. Сколько различных «слов» можно образовать из букв слова «задача»?

*Ответ*: 120.

3. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

*Ответ*: 17 417 000.

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


## Обязательная литература

1. ***Гмурман, В.Е.*** Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2001. – 480 с.
2. ***Гмурман, В.Е.*** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2001. – 400 с.

## Дополнительная литература

1. ***Письменный, Д.Т.*** Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрес-пресс, 2008. – 287 с.
2. ***Савельев. Л.Я.*** Комбинаторика и вероятность / Л.Я. Савельев. – Новосибирск: Наука, 1975. – 423 с.
3. ***Калинина, В.Н.*** Математическая статистика / В.Н. Калинина, В.Ф. Панкин. – М.: Высшая школа, 1998. – 336 с.
4. Теория вероятностей. Сборник задач. / под ред. А.В. Скорохода. – Киев: Высш. школа, 1980. – 432 с.
5. ***Виленкин, Н.Я.*** Комбинаторика / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1969. – 328 с.
6. ***Слободской, М.И.*** Начала комбинаторного анализа / М.И. Слободской. – Томск: Офсетная лаборатория ТИСИ, 1991. – 27 с.
7. ***Кочева, З.Н.*** Теория вероятностей. Банк задач для самостоятельной работы студентов / З.Н. Кочева, Л.И. Цепилевич. – Томск, 1996. – 27 с.