

Динамическое программирование. Рекуррентные соотношения с одним и двумя параметрами



Рекуррентные соотношения с 2 параметрами. Задача о блоке.

Задача 1. В таблице размера $m \cdot n$, с элементами 0 и 1 найти квадратный блок максимального размера, состоящий из одних единиц. При $m=5$, $n=6$ искомый блок выделен цветом.

1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1

Положение любого квадратного блока определяется его размером и положением нижней правой вершины. Максимальный размер блока $\max = 3$, координаты правого нижнего угла: $b = 4$, $c = 5$.

Решение задачи о блоке из единиц

Пусть $T[i,j]$ – функция, значение которой равно размеру максимального квадратного блока из единиц, правый нижний угол которого расположен в позиции (i,j) . Значения ее в 1 строке и 1 столбце совпадают с элементами $a[1,j]$ и $a[i,1]$:

$$T[1,j] = a[1,j], T[i,1] = a[i,1].$$

При $i > 1, j > 1$ для функции T выполняются рекуррентные соотношения:

$$T[i,j] = 0, \text{ если } A[i,j] = 0,$$

$$T[i,j] = \min(T[i-1,j], T[i,j-1], T[i-1,j-1]) + 1 \\ \text{при } A[i,j] = 1.$$

Для приведенного примера слева составлена таблица значений $T[i,j]$.

1	1	0	1	0	1
1	2	1	1	1	0
1	0	1	2	2	1
1	1	1	2	3	2
1	0	1	2	0	1

Задача о рюкзаке

Задача.

На складе имеется n неделимых предметов. Для каждого предмета известна его масса $m[i]$ (кг) и стоимость $c[i]$ (ус. ед.).

Определить максимальную суммарную стоимость предметов, которые можно унести со склада, при условии, что суммарная

масса предметов не должна превышать $p = 15$ кг.



$m[i]$	4	5	3	7	6
$c[i]$	5	7	4	9	8

Задача о рюкзаке



Задача. На складе имеется n неделимых предметов. Для каждого предмета известна его масса $m[i]$ (кг) и стоимость $c[i]$ (ус. ед.).

$m[i]$	4	5	3	7	6
$c[i]$	5	7	4	9	8

$n = 5.$

Определить максимальную суммарную стоимость предметов, которые можно унести со склада, при условии, что суммарная масса предметов не должна превышать $p = 15$ кг.

Решение. Пусть $T[i,j]$ – функция, значения которой равны суммарной стоимости унесенных предметов, при условии, что выбираются предметы из первых i предметов, j – максимально возможная их масса. Решению задачи соответствует $T[5, 15]$.

Решение задачи о рюкзаке



Для задачи $T(n, p)$ определим подзадачи $T(i, j)$, i – количество начальных предметов, из которых делается выбор, j – максимум возможной суммарной массы уносимых предметов. Аргумент i задает количество предметов для подзадачи.

Найдем рекуррентные соотношения для вычисления функции T :

$T(0, 0) = 0$, $T(0, j) = 0$ при $j \geq 1$, $T(i, 0) = 0$ при $i \geq 1$.

Если предмет с номером i остается на складе, то $T(i, j) = T(i-1, j)$.

Если предмет с номером i уносится со склада, то это уменьшает возможную суммарную массу для $i-1$ первых предметов на $m[i]$, увеличивая значение решения на $c[i]$: $T(i, j) = T(i-1, j-m[i]) + c[i]$.

Этот вариант возможен, если $m[i] \leq j$. Из двух вариантов выбираем лучший.

Решение задачи о рюкзаке



Таким образом, при $i \geq 1$, $j \geq 1$ соотношение имеет вид:

$$T(i, j) = T(i-1, j) \text{ при } j < m[i],$$

$$T(i, j) = \max(T(i-1, j), T(i-1, j-m[i]) + c[i]) \text{ при } m[i] \leq j. \quad T(5, 15) = 20$$

j i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
2	0	0	0	0	5	7	7	7	7	12	12	12	12	12	12	12
3	0	0	0	4	5	7	7	9	11	12	12	12	16	16	16	16
4	0	0	0	4	5	7	7	9	11	12	12	14	16	16	18	20
5	0	0	0	4	5	7	8	9	11	12	13	15	16	17	19	20

Построение списка уносимых предметов



Список уносимых со склада предметов будем формировать “с конца”. Рассмотрим элементы таблицы функции $T(5, 15)$ и $T(4, 15)$. Так как значения обоих этих элементов равны 20, то это значит, что можно набрать стоимость 20 ед. без пятого предмета, используя в списке только предметы с номерами 1 – 4, т.е. пятый предмет в список не включаем. Теперь рассмотрим элементы $T(4, 15)$ и $T(3, 15)$. Их значения не равны, $16 \neq 20$. Это означает, что четвертый предмет должен быть обязательно включен в список уносимых предметов, а масса других предметов списка должна быть не больше $15 - m[4] = 15 - 7 = 8$ (кг.).

Построение списка уносимых предметов

Далее рассмотрим элементы $T(3, 8)$ и $T(2, 8)$. Их значения не равны, $11 \neq 7$, значит, третий предмет включается в список, а масса других предметов списка должна быть не больше $8 - m[3] = 8 - 3 = 5$ (кг.).

Теперь рассмотрим элементы $T(2, 5)$ и $T(1, 5)$. Их значения не равны, $7 \neq 5$, значит второй предмет включается в список. Так как его масса равна 5 (кг.), то первый предмет не может включаться в список.

Таким образом, в искомый список входят предметы с номерами 2, 3, и 4.

