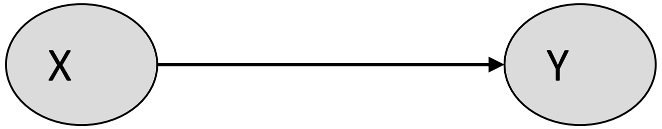
Функциональные зависимости

Функциональная зависимость

Y функционально зависит от X, если каждому значению X соответствует единственное значение Y.

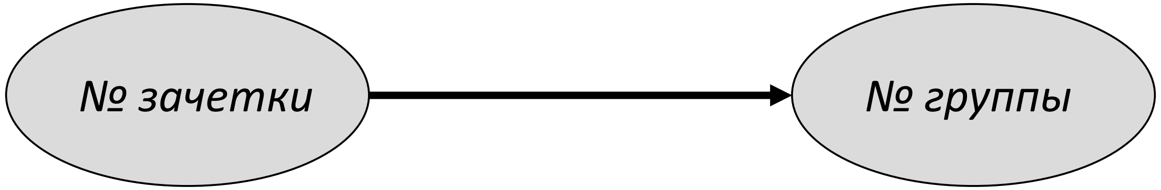
$X \rightarrow Y$ (X определяет Y)



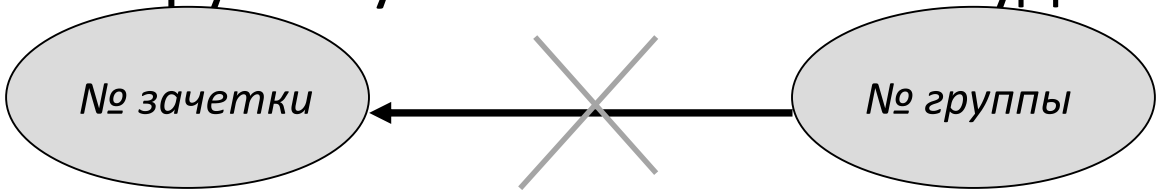
- Левая часть функциональной зависимости называется *детерминантом*.
- Определение ФЗ осуществляется на основе ограничений предметной области.

Определение ФЗ

- Например:
- № зачетки и № группы уникальны
- Каждый студент учится только в одной группе.



- В одной группе учатся несколько студентов.



Классификация функциональных зависимостей

- Тривиальные
- Нетривиальные

- Полные
- Неполные

Классификация функциональных зависимостей

Функциональная зависимость *тривиальна*, если ее правая часть является либо собственным подмножеством левой, либо равна ей, то есть функциональная зависимость $X \to Y$ тривиальна, если $Y \subseteq X$.

Тривиальные и нетривиальные ФЗ

- ***Тривиальные ФЗ:***
- *X**Y**$\rightarrow$**Y***
- ***X**$\rightarrow$**X***
- *X**Y**$\rightarrow$X**Y***
- ***№ зачетки** $\rightarrow$**№ зачетки***
- *№ зачетки, **№ группы** $\rightarrow$ **№ группы***

- ***Нетривиальные ФЗ:***
- ***X**$\rightarrow$**XY***
- *№ зачетки$\rightarrow$ № зачетки ,№ группы*

Полные и неполные ФЗ

Функциональная зависимость называется *полной*, если ни одно собственное подмножество ее левой части не определяет правую часть.

Для определения полноты ФЗ необходимо рассмотреть все ФЗ, имеющие место на схеме отношения.

- **полные {$X \rightarrow Y$, $Y \rightarrow Z$},**
- **неполные {$XY \rightarrow Z$, $Y \rightarrow Z$}**

Аксиомы вывода

Для вывода ФЗ используются следующие аксиомы вывода:

- F-аксиомы (аксиомы Армстронга, 6);
- β-аксиомы (3).

Аксиома рефлексивности (F1)

$X \to X$

Пример:

- *№ зачетки* $\to$ *№ зачетки*
- *Название фильма* $\to$ *Название фильма*
- *Имя режиссера* $\to$ *Имя режиссера*

Аксиома пополнения (F2)

Если отношение удовлетворяет функциональной зависимости $X \rightarrow Y$, то оно удовлетворяет и функциональной зависимости $XZ \rightarrow Y$

Аксиома пополнения (F2)

Если *№ зачетки* $\rightarrow$ *№ группы,*

то *№ зачетки, **Имя куратора*** $\rightarrow$ *№ группы*

Если

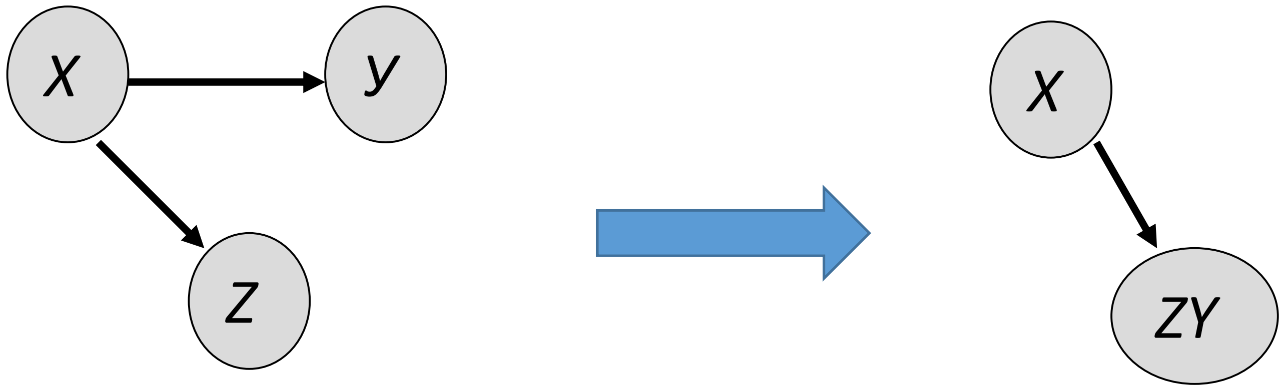
Название фильма, Год премьеры $\rightarrow$ *Имя режиссера,*

то

Название фильма, Год премьеры, Жанр $\rightarrow$ *Имя режиссера*

Аксиома аддитивности (F3)

Если отношение удовлетворяет функциональным зависимостям $X \rightarrow Y$ и $X \rightarrow Z$, то оно удовлетворяет и функциональной зависимости $X \rightarrow ZY$.



Аксиома аддитивности (F3)

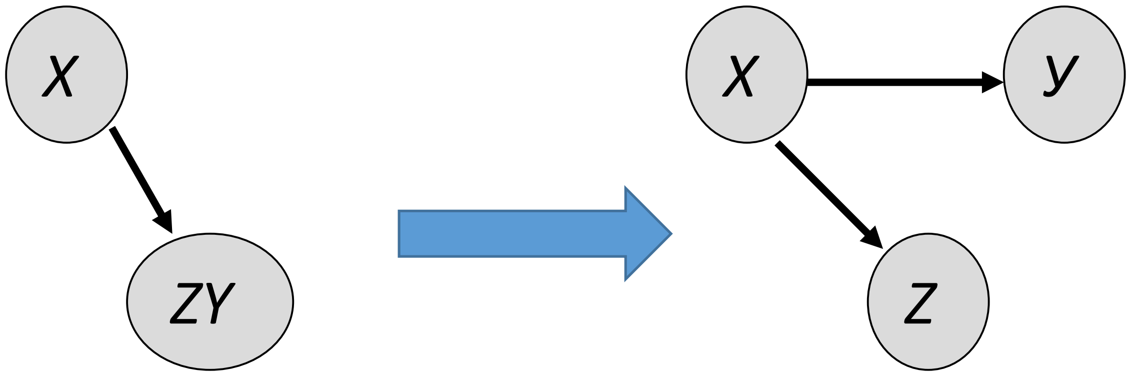
Если *№ зачетки* $\rightarrow$ *ФИО студента*

и *№ зачетки* $\rightarrow$ *№ группы*,

то *№ зачетки* $\rightarrow$ *ФИО студента, № группы*

Аксиома проективности (F4)

Если отношение удовлетворяет функциональной зависимости ***X→ZY,*** *то оно удовлетворяет и функциональным зависимостям* ***X→Y*** *и* ***X→Z***



Аксиома проективности (F4)

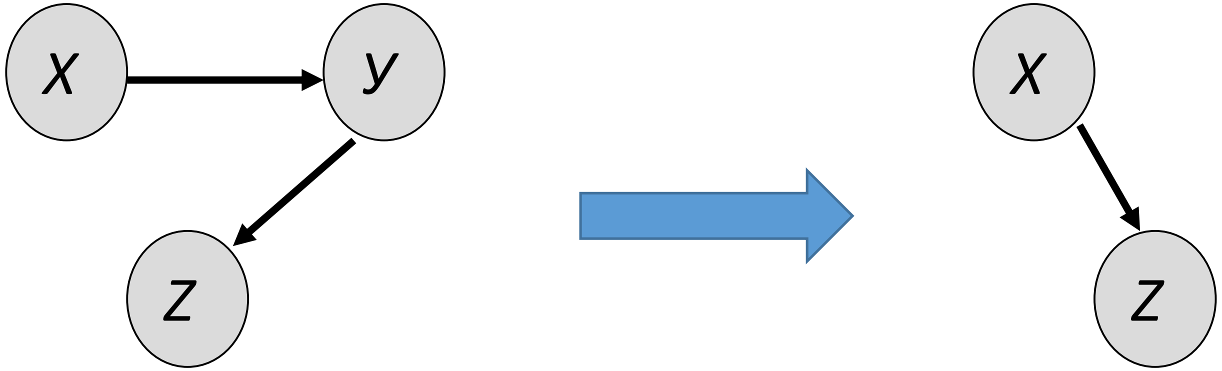
Если *№ зачетки* $\rightarrow$ *ФИО студента, № группы,*

то *№ зачетки* $\rightarrow$ *ФИО студента*

и *№ зачетки* $\rightarrow$ *№ группы*

Аксиома транзитивности(F5)

Если отношение удовлетворяет функциональным зависимостям X→Y *и* Y→Z, *то оно удовлетворяет и функциональной зависимости* X→Z.



Аксиома транзитивности(F5)

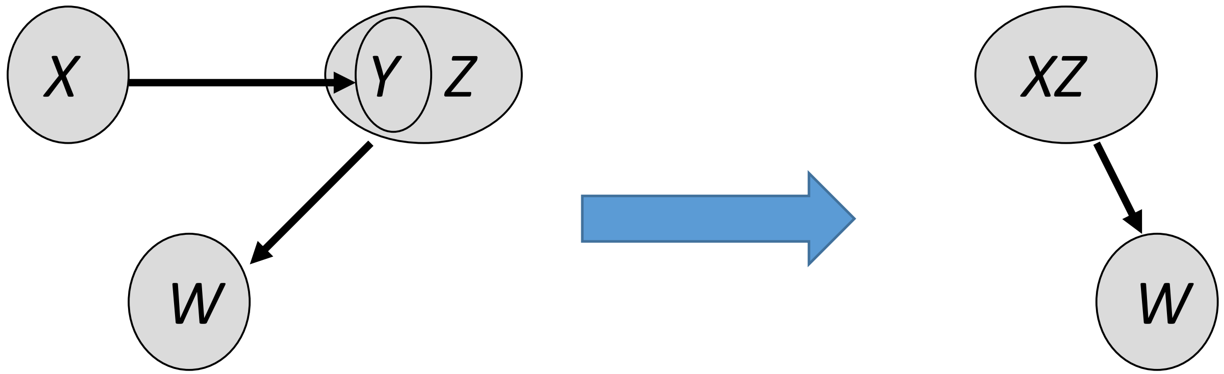
Если *№ зачетки* $\rightarrow$ *№ группы*

и *№ группы* $\rightarrow$*Название факультета*,

то *№ зачетки* $\rightarrow$ *Название факультета*

Аксиома псевдотранзитивности (F6)

Если отношение удовлетворяет функциональным зависимостям $\boldsymbol{X \rightarrow Y}$ *и* $\boldsymbol{YZ \rightarrow W}$*, то оно удовлетворяет и функциональной зависимости* $\boldsymbol{XZ \rightarrow W}$.



Независимые аксиомы вывода

- Рефлексивности (F1)
- Пополнения (F2)
- Псевдотранзитивности (F6)

Вывод аксиомы F3

1	$X \to Y$	Дано
2	$X \to Z$	Дано
3	$YZ \to YZ$	F1
4	$XZ \to YZ$	F6 (1,3)
5	$X \to YZ$	F6 (2,4)

Вывод аксиомы F5

1	$X \rightarrow Y$	Дано
2	$Y \rightarrow Z$	Дано
3	$XY \rightarrow Z$	F2 (2)
4	$X \rightarrow Z$	F6 (1,3)

Вывод функциональных зависимостей

Дано F={$A \to C$, $AC \to D$, $D \to E$ }.
Используя аксиомы Амстронга, доказать, что $A \to E$

1. $A \to C$ Дано
2. $AC \to D$ Дано
3. $A \to D$ Псевдотранзитивность (из 1,2)
4. $D \to E$ Дано
5. $A \to E$ Транзитивность (из 3, 4)

β-аксиомы

- ***Рефлексивность (β1) X$\rightarrow$X***
- ***Накопление (β2)***
- *Если отношение удовлетворяет функциональным зависимостям **X$\rightarrow$YZ** и **Z$\rightarrow$CW**, то оно удовлетворяет и функциональной зависимости **X$\rightarrow$ YZC**.*

β-аксиомы

- ***Проективность (β3)***
- *Если отношение удовлетворяет функциональной зависимости **$X \rightarrow YZ$,** то оно удовлетворяет и функциональной зависимости **$X \rightarrow Y$***

Порядок построения RAP последовательности вывода.

- Первая функциональная зависимость, получается путем применения аксиомы $\beta 1$.
- Каждая последующая функциональная зависимость вычисляется или из предыдущих функциональных зависимостей путем применения аксиомы $\beta 2$, или вводится из исходного множества функциональных зависимостей.
- На последнем шаге вывода может быть применена аксиома проективности $\beta 3$.

RAP последовательности вывода

- **R**eflexivity,
- **A**ccumulation,
- **P**rojectivity.

RAP последовательность вывода

Пусть F = {AB→E, AG→J, BE→I, E→G, IG→H}

Вывести AB→GH

- AB→AB $\beta 1$
- AB→E Дано
- AB→ABE $\beta 2$
- BE→I Дано

$$F = \{AB \to E,\ AG \to J,\ BE \to I,\ E \to G,\ IG \to H\}$$

- $AB \to ABEI$ $\beta 2$
- $E \to G$ Дано
- $AB \to ABEIG$ $\beta 2$
- $IG \to H$ Дано
- $AB \to ABEIGH$ $\beta 2$
- $AB \to GH$ $\beta 3$

Замыкания атрибутов

Замыкание множества атрибутов {A1,A2,…,An} на схеме R есть полное множество атрибутов, принадлежащих схеме R и функционально зависящих от{ A1,A2,…,An}. Обозначается замыкание как {A1,A2,…,An}$^{+}$*.*

Ключ (с т. зр. замыкания)

- подмножество атрибутов схемы отношения, замыканием которого является вся схема отношения и не имеющее собственного подмножества атрибутов, замыканием которого также является вся схема отношения.
  - Например, возможные ключи отношения Фильм:
  - {Название фильма, Год Премьеры},
  - {Название фильма, Режиссер}.

Замыкания атрибутов

- *Дана* схема отношения R={CBD} и множество функциональных зависимостей F={$C \rightarrow B$; $CB \rightarrow D$} на ней. Определить замыкание C.
- $C \rightarrow C$ $\beta 1$
- $C \rightarrow B$ Дано
- $C \rightarrow CB$ $\beta 2$
- $CB \rightarrow D$ Дано
- $C \rightarrow CBD$ $\beta 2$
- C^{+}={CBD}

Избыточные функциональные зависимости

Пусть дано множество функциональных зависимостей F на схеме отношения R, $X \subseteq R$*,* $Y \subseteq R$ *. Функциональная зависимость* $X \to Y$ *является избыточной для этого множества, если из множества функциональных зависимостей* $F-(X \to Y)$ *следует, что* $X \to Y$ *(* $F-(X \to Y) \models X \to Y$ *).*

Избыточные функциональные зависимости

1. $F = \{\underline{X \rightarrow YZ}, X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\}$
2. $F = \{X \rightarrow YZ, \underline{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z}\}$
3. $F = \{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z, \underline{X \rightarrow Z}\}$
4. $F = \{X \rightarrow Y, YZ \rightarrow W, \underline{XZ \rightarrow W}\}$
5. $F = \{X \rightarrow Y, \underline{XY \rightarrow Z}, Y \rightarrow Z\}$

Замыкание множества функциональных зависимостей

Множество функциональных зависимостей, которое не может быть дополнено ни одной новой функциональной зависимостью с помощью аксиом рефлексивности, пополнения и псевдотранзитивности называется замыканием множества функциональных зависимостей и обозначается F+.

Вычисление замыканий

Пусть имеет место $F=\{A \to B\}$ получить замыкание исходного множества

$F^+=\{A \to B,\ A \to A,\ B \to B,\ A \to AB,\ AB \to B,\ AB \to A,\ AB \to AB\}$

Эквивалентные множества

- *Два множества ФЗ эквивалентны, если их замыкания равны.*

Эквивалентные множества

- *Множество функциональных зависимостей $F'=F-(X\rightarrow Y)$ на схеме R эквивалентно множеству F на этой же схеме, если оно получено из F путем применения аксиом вывода и каждая функциональная зависимость F может быть восстановлена из вновь полученного множества F' путем последовательного применения аксиом вывода.*

Эквивалентные множества

1. $F = \{X \to YZ, X \to Y, X \to Z\}$
2. $F = \{X \to Y, X \to Z\}$

3. $F = \{X \to Y, Y \to Z, X \to Z\}$
4. $F = \{X \to Y, Y \to Z\}$

5. $F = \{X \to Y, XY \to Z, X \to Z\}$
6. $F = \{X \to Y, X \to Z\}$
7. $F = \{X \to YZ\}$

Покрытия

- Минимальное (оптимальное) покрытие
- Редуцированное покрытие (редуцированное, редуцированное слева, справа)
- Каноническое покрытие

Минимальные покрытия

- *Минимальное покрытие это покрытие, не содержащее избыточных функциональных зависимостей и содержащее наименьшее количество функциональных зависимостей.*
- $F=\{ A\to B, A\to C, A\to BC\}$
- F1={ $A\to B$, $A\to C$}
- Fmin={ $A\to BC$}

Редуцированные покрытия

- *Функциональная зависимость называется редуцированной , если ее левая и правая части не содержат посторонних атрибутов.*
- $F=\{ A \rightarrow B, A \rightarrow C\}$

Редуцированные покрытия

- *Функциональная зависимость называется редуцированной слева (справа), если ее левая (правая) часть не содержит посторонних атрибутов.*
- $F=\{ A \to B, AB \to C\}$
- $F=\{ A \to B, A \to BC\}$

Алгоритм получения редуцированного покрытия

- Удаляются посторонние атрибуты из левой части функциональных зависимостей.
- Удаляются посторонние атрибуты из правой части функциональных зависимостей.
- Удаляются функциональные зависимости типа $A \rightarrow \emptyset$.

Каноническое покрытие

Множество F – зависимостей называется каноническим, если каждая F-зависимость имеет вид $X \rightarrow A$, редуцирована слева и неизбыточна.

$$F=\{AB\rightarrow CD;\ AC\rightarrow BEK;\ A\rightarrow C; CD\rightarrow EK\}$$

1 шаг	2 шаг	3 шаг	Каноническое	Минимальное
$AB\rightarrow C$	$AB\rightarrow C$	$A\rightarrow C$	$A\rightarrow C$	$A\rightarrow BCD$
$AB\rightarrow D$	$AB\rightarrow D$	$A\rightarrow D$	$A\rightarrow D$	$CD\rightarrow EK$
$AC\rightarrow E$	$A\rightarrow E$	$A\rightarrow E$	$A\rightarrow B$	
$AC\rightarrow K$	$A\rightarrow K$	$A\rightarrow K$	$CD\rightarrow E$	
$AC\rightarrow B$	$A\rightarrow B$	$A\rightarrow B$	$CD\rightarrow K$	
$A\rightarrow C$	$A\rightarrow C$	$A\rightarrow C$		
$CD\rightarrow E$	$CD\rightarrow E$	$CD\rightarrow E$		
$CD\rightarrow K$	$CD\rightarrow K$	$CD\rightarrow K$		

Кольцевое покрытие

- это покрытие, эквивалентное множеству функциональных зависимостей и представленное в виде комплексных функциональных зависимостей.
- Любое покрытие может быть представлено в виде кольцевого.

Кольцевое покрытие

- $F=\{A \to C\}$, $CF=\{(A) \to C\}$
- $F=\{A \to C, C \to B\}$,

  $CF=\{(A) \to C, (C) \to B\}$
- $F=\{A \to C, C \to B, B \to AD\}$,

  $CF=\{(ABC) \to D\}$

Декомпозиция

- позволяет исключить избыточное дублирование данных;
- алгоритм декомпозиции базируется на концепции функциональной зависимости;
- критерием начала и окончания декомпозиции является нахождение отношения в той или иной нормальной форме.

Определение многозначной зависимости (MVD)

Пусть задано отношение R с атрибутами (или наборами атрибутов) A, B, C. Говорят, что существует ***многозначная зависимость*** B от A (или A многозначно определяет B), и это обозначается как A $\rightarrow\rightarrow$ B, если при заданных значениях атрибутов из A существует множество связанных значений атрибутов из B и это множество B-значений не зависит от значений атрибутов из C .

Пример: В отношении УЧЕБА имеются следующие MVD:

Предмет $\rightarrow\rightarrow$ Преподаватель
Предмет $\rightarrow\rightarrow$ Учебник

Пусть задано отношение R(A,B). MVD A $\rightarrow\rightarrow \varnothing$ и A $\rightarrow\rightarrow$ B называются ***тривиальными*** так как они присутствуют во любых отношениях .

Аксиомы MVD

Пусть R состоит из атрибутов (или набора атрибутов) A, B, C.
MVD обладают следующими ***аксиомами***:

1) Аксиома дополнения

$$\text{Если } A \to\to B\text{, то } A \to\to C$$

2) Аксиома пополнения

$$\text{Если } A \to\to B \text{ и } V \subseteq W\text{, то } (A, W) \to\to (B, V)$$

3) Аксиома транзитивности

$$\text{Если } A \to\to B \text{ и } B \to\to C\text{, то } A \to\to C - B$$

Дополнительные свойства MVD

1) Объединение

Если $A \rightarrow\rightarrow B$ и $A \rightarrow\rightarrow C$, то $A \rightarrow\rightarrow (B, C)$

2) Псевдотранзитивность

Если $A \rightarrow\rightarrow B$ и $(W, B) \rightarrow\rightarrow Z$,
то $(W, A) \rightarrow\rightarrow Z - (W, B)$

3) Смешанная псевдотранзитивность

Если $A \rightarrow\rightarrow B$ и $(A,B) \rightarrow\rightarrow C$, то $A \rightarrow\rightarrow (C - B)$

4) Пересечение и разность

Если $A \rightarrow\rightarrow B$ и $A \rightarrow\rightarrow C$,
то $A \rightarrow\rightarrow B \cap C$, $A \rightarrow\rightarrow B - C$, $A \rightarrow\rightarrow C - B$

Аксиомы связи FD и MVD

Существуют следующие две аксиомы, которые связывают многозначные и функциональные зависимости.

1) Аксиома репликации

Если $A \rightarrow B$, то $A \rightarrow\rightarrow B$

2) Аксиома соединения

Если $A \rightarrow\rightarrow B$ и $Z \subseteq B$, и для некоторого W, непересекающегося с B имеем $W \rightarrow Z$, то $A \rightarrow Z$