Введение в статистическую теорию распознавания образов.

Тверская Е. С.
e_tverskaya@bmstu.ru

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)

Москва, 2025

ИУ-6
Компьютерные системы и сети

Случайные векторы и их свойства

Введение. Основные понятия теории вероятностей.

Определение

Случайное испытание – испытание (опыт, эксперимент), наблюдаемые результаты которого случайны, то есть их нельзя с уверенностью предсказать исходя из начальных условий испытания. При этом предполагается, что результаты случайного испытания подчиняются некоторым закономерностям, которые и являются предметом исследований теории вероятностей.

Случайные векторы и их свойства

Введение. Основные понятия теории вероятностей.

Определение

Случайное испытание – испытание (опыт, эксперимент), наблюдаемые результаты которого случайны, то есть их нельзя с уверенностью предсказать исходя из начальных условий испытания. При этом предполагается, что результаты случайного испытания подчиняются некоторым закономерностям, которые и являются предметом исследований теории вероятностей.

Замечание к определению

Теория вероятностей - наша плата за незнание и отсутствие реальных возможностей учета всех факторов, влияющих на наблюдаемые результаты проводимых испытаний (опытов, экспериментов).

Случайные векторы и их свойства

Введение. Основные понятия теории вероятностей.

Определение

Случайное испытание – испытание (опыт, эксперимент), наблюдаемые результаты которого случайны, то есть их нельзя с уверенностью предсказать исходя из начальных условий испытания. При этом предполагается, что результаты случайного испытания подчиняются некоторым закономерностям, которые и являются предметом исследований теории вероятностей.

Замечание к определению

Теория вероятностей - наша плата за незнание и отсутствие реальных возможностей учета всех факторов, влияющих на наблюдаемые результаты проводимых испытаний (опытов, экспериментов).

Определение

Исходом называют результаты случайного испытания, характеризуемый значениями параметров, представленных вектром $\boldsymbol{\omega}$, которые удалось определить при проведении этого случайного испытания.

Случайные векторы и их свойства

Введение. Основные понятия теории вероятностей.

Требования к реализуемому набору исходов

(а) Все исходы в наборе являются взаимноисключающими, т. е. случайное испытание не должно завершиться одновременно двумя и более исходами.

(б) При проведении случайного испытания должен реализоваться один из исходов в выбранном наборе.

Исходы в таком наборе называют ***элементарными событиями*** ω, а их совокупность ***пространством элементарных событий*** Ω.

Случайные векторы и их свойства

Введение. Основные понятия теории вероятностей.

Требования к реализуемому набору исходов

(а) Все исходы в наборе являются взаимноисключающими, т. е. случайное испытание не должно завершиться одновременно двумя и более исходами.

(б) При проведении случайного испытания должен реализоваться один из исходов в выбранном наборе.

Исходы в таком наборе называют ***элементарными событиями*** ω, а их совокупность ***пространством элементарных событий*** Ω.

Определение

Случайным событием α называется свойство изучаемой системы, которое проявляется или не проявляется при проведении случайного испытания. При этом, если $A \subset \Omega$ - множество элементарных событий, при реализации каждого из которых случайное событие α происходит и не происходит при реализации любого элементарного события $\omega \in \bar{A} \triangleq \Omega \setminus A$, то A называют ***характеристическим множеством*** случайного события α.

Случайные векторы и их свойства

Введение. Основные понятия теории вероятностей.

Аксиоматическое определение вероятности (определение Колмогорова)

Пусть Ω – пространство элементарных событий некоторого случайного испытания и $\Omega \neq \emptyset$. Тогда

I Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств из Ω называют ***сигма-алгеброй*** $\mathcal{A}$, если выполняются три следующие аксиомы:

(1) $(\emptyset \in \mathcal{A}) \quad \wedge \quad (\Omega \in \mathcal{A})$,

(2) $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A})$,

(3) $(A_k \in \mathcal{A},\ k \geqslant 1) \Rightarrow \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}\right) \wedge \left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}\right)$.

Случайные векторы и их свойства

Введение. Основные понятия теории вероятностей.

Аксиоматическое определение вероятности (определение Колмогорова)

Пусть Ω – пространство элементарных событий некоторого случайного испытания и $\Omega \neq \emptyset$. Тогда

I Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств из Ω называют ***сигма-алгеброй*** $\mathcal{A}$, если выполняются три следующие аксиомы:

(1) $(\emptyset \in \mathcal{A}) \quad \wedge \quad (\Omega \in \mathcal{A})$,

(2) $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A})$,

(3) $(A_k \in \mathcal{A},\ k \geqslant 1) \Rightarrow \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}\right) \wedge \left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}\right)$.

II Пару $\{\Omega,\ \mathcal{A}\}$, состоящую из пространства элементарных событий Ω некоторого случайного испытания и определенной на ней сигма-алгеброй $\mathcal{A}$ называют ***измеримым пространством***.

Случайные векторы и их свойства
Введение. Основные понятия теории вероятностей.

Аксиоматическое определение вероятности (определение Колмогорова)

III ***Вероятностью*** (вероятностной мерой) на измеримом пространстве $\{\Omega,\ \mathcal{A}\}$ называют отображение $\mathbf{P}:\mathcal{A}\to[0,\ 1]\subset\mathbb{R}^1$, определенное на сигма-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из Ω и удовлетворяющее следующим аксиомам:

(1) $\mathbf{P}(\Omega)=1$,

(2) $(A_k\in\mathcal{A},\ k\leqslant 1)\ \wedge\ (A_k\bigcap A_j=\emptyset,\ k\neq j)\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(A_k\right).$$

Случайные векторы и их свойства

Введение. Основные понятия теории вероятностей.

Аксиоматическое определение вероятности (определение Колмогорова)

III ***Вероятностью*** (вероятностной мерой) на измеримом пространстве $\{\Omega,\ \mathcal{A}\}$ называют отображение $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,\ 1] \subset \mathbb{R}^1$, определенное на сигма-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из Ω и удовлетворяющее следующим аксиомам:

(1) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,

(2) $(A_k \in \mathcal{A},\ k \leqslant 1) \ \wedge \ (A_k \bigcap A_j = \emptyset,\ k \neq j) \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(A_k\right).$$

IV Совокупность непустого множества Ω, являющегося пространством элементарных событий некоторого случайного испытания, определенной на нем сигма-алгеброй $\mathcal{A}$ и определенной на сигма-алгебра $\mathcal{A}$ вероятности $\mathbf{P}$ называют ***вероятностным пространством*** $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}\}$.

Случайные векторы и их свойства

Скалярные случайные величины.

Определение

Пусть $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}\}$ – вероятностное пространство некоторого случайного испытания и задано отображение $\xi : \Omega \to U \subset \mathbb{R}^1$. Если $\forall x \in \mathbb{R}^1$ множество $A_x \triangleq \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$, то есть является характеристическим множеством ($\xi(\omega) < x$ – случайное событие), то $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ – ***скалярная случайная величина*** и в $\mathbb{R}^1$ определена функция $F_\xi(x) \triangleq \mathbf{P}(A_x)$ – ***функция распределения вероятностей*** скалярной случайной величины, $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Случайные векторы и их свойства

Скалярные случайные величины.

Определение

Пусть $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}\}$ – вероятностное пространство некоторого случайного испытания и задано отображение $\xi : \Omega \to U \subset \mathbb{R}^1$. Если $\forall x \in \mathbb{R}^1$ множество $A_x \triangleq \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$, то есть является характеристическим множеством ($\xi(\omega) < x$ – случайное событие), то $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ – ***скалярная случайная величина*** и в $\mathbb{R}^1$ определена функция $F_\xi(x) \triangleq \mathbf{P}(A_x)$ – ***функция распределения вероятностей*** скалярной случайной величины, $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Замечание

Принято писать не

$$F_\xi(x) \triangleq \mathbf{P}\left(A_x\right), \; A_x \triangleq \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}, \; \forall x \in \mathbb{R}^1,$$

а $F_\xi(x) \triangleq \mathbf{P}\{\xi(\omega) < x\}$.

Случайные векторы и их свойства

Случайные векторы.

Определение

Пусть $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}\}$ – вероятностное пространство некоторого случайного испытания и задано отображение $\xi : \Omega \to W \subset \mathbb{R}^n$. Если $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $A_X \triangleq \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < X\} \in \mathcal{A}$, то есть $\xi(\omega) < X$ – случайное событие с характеристическим множеством A_X, то $\xi(\omega), \omega \in \Omega$ – ***n*-мерный случайный вектор** и $\forall X \in \mathbb{R}^n$ определена функция $F_\xi(x) \triangleq \mathbf{P}(A_X)$ – ***функция распределения вероятностей***.

Случайные векторы и их свойства

Случайные векторы.

Определение

Пусть $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}\}$ – вероятностное пространство некоторого случайного испытания и задано отображение $\xi : \Omega \to W \subset \mathbb{R}^n$. Если $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $A_X \triangleq \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < X\} \in \mathcal{A}$, то есть $\xi(\omega) < X$ – случайное событие с характеристическим множеством A_X, то $\xi(\omega), \omega \in \Omega$ – ***n*-мерный случайный вектор** и $\forall X \in \mathbb{R}^n$ определена функция $F_\xi(x) \triangleq \mathbf{P}(A_X)$ – ***функция распределения вероятностей***.

Замечание

- В рассматриваемой ситуации

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}, \ \xi(\omega) = [\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)]^{\mathrm{T}},$$
$$\{\xi(\omega) < X\} \Leftrightarrow \left\{\xi_k(\omega) < x_k, \ \forall k = \overline{1, n}\right\}.$$

- Используют сокращенную форму записи: $F_\xi(X) = \mathbf{P}\{\xi(\omega) < X\}$ или $F_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\left\{\xi_k(\omega) < x_k, \ k = \overline{1, n}\right\}$.

Случайные векторы и их свойства

Совместная функция распределения вероятностей. Свойства.

1. $0 \leqslant F_{\xi}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 1$;
2. $F_{\xi}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – неубывающая функция по каждому аргументу;
3. $F_{\xi}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – непрерывная слева по каждому аргументу;
4. $F_{\xi}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет не более счетного множества конечных скачков;
5. $F_{\xi}(x_1, x_2, \ldots, x_{x-1}, -\infty, x_{k+1} \ldots, x_n) \equiv 0, \quad \forall k \in \overline{1, n}$;
6. $F_{\xi}(x_1, x_2, \ldots, x_{x-1}, +\infty, x_{k+1} \ldots, x_n) = F_{\eta_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{x-1}, x_{k+1} \ldots, x_n)$, $\forall k \in \overline{1, n}$, где $\eta_k(\omega) \triangleq [x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$;
7. $F_{\xi}(+\infty, \ldots, +\infty) \equiv 1$.

Случайные векторы и их свойства

Совместная функция распределения вероятностей. Свойства.

Определение

n-мерный случайный вектор $\boldsymbol{\xi}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, принимающий не более счетного множества возможных значений, $\{X_k\}_{k=1}^{N \leqslant \infty}$ называют ***дискретным случайным вектором***.

Случайные векторы и их свойства

Совместная функция распределения вероятностей. Свойства.

Определение

n-мерный случайный вектор $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, принимающий не более счетного множества возможных значений, $\{X_k\}_{k=1}^{N \leqslant \infty}$ называют ***дискретным случайным вектором***.

Замечание

Функция распределения вероятностей n-мерного случайного вектора $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ определяется следующим равенством:

$$F_\xi(X) = \sum_{X_k < X} \mathrm{P}\{\xi(\omega) = X_k\}.$$

Случайные векторы и их свойства

Совместная функция плотности распределения вероятностей. Свойства.

Определение

Непрерывным случайным вектором называется n-мерный случайный вектор $\boldsymbol{\xi}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, вероятность попадания которого в любую область из $\mathbb{R}^n$ бесконечно малого диаметра – бесконечно мала и $\forall X \in \mathbb{R}^n$ определена скалярная функция

$$f_{\xi}(X) \triangleq \lim_{U(X)\to X} \frac{\mathbf{P}\{\xi \in U(X)\}}{\mu\{U(X)\}}, \quad \text{где}$$

$U(X)$ – окрестность точки X,
$\mu\{U(X)\}$ – мера окрестности точки $X \in \mathbb{R}^n$ т. е. при $n = 1$ – длина, при $n = 2$ – площадь, $n = 3$ – объем, при $n > 3$ – гиперобъем.
$f_{\xi}(X)$ – ***функция плотности распределения вероятностей*** n-мерного случайного вектора.

Случайные векторы и их свойства

Совместная функция плотности распределения вероятностей. Свойства.

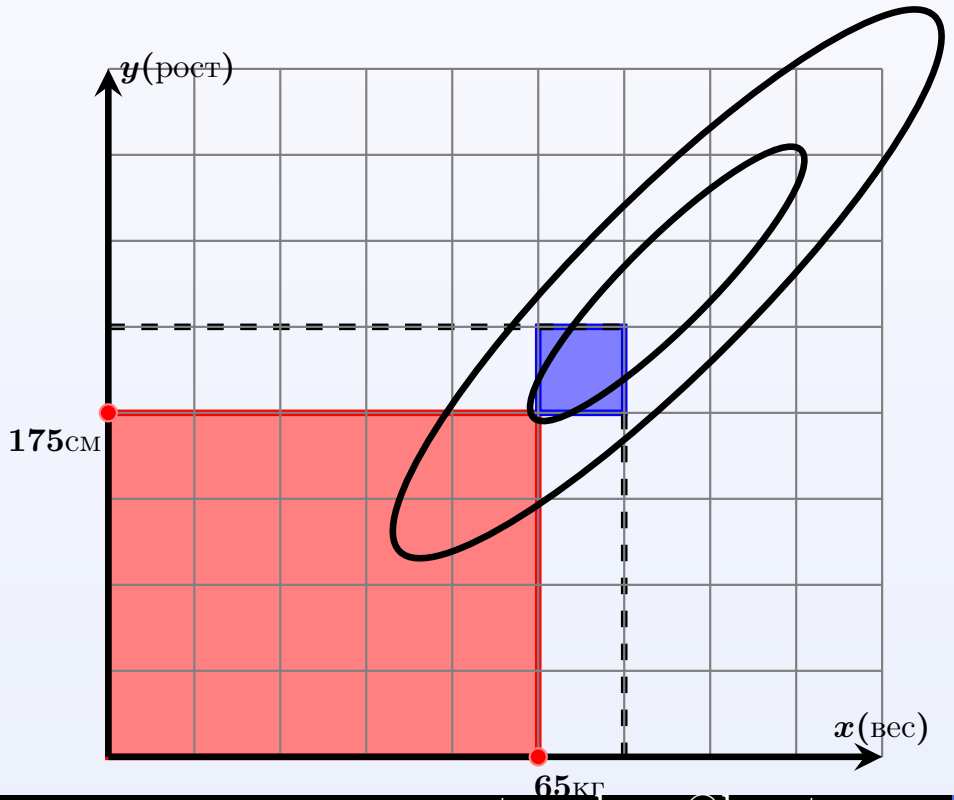
1. $f_\xi(X) \geqslant 0, \forall X \in \mathbb{R}^n.$
2. $\mathrm{P}\{\xi(\omega) \in G \subset \mathbb{R}^n\} = \int\limits_G f_\xi(X)\,dX.$
3. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\xi(X)\,dX = 1.$
4. $F_\xi(X) = \int\limits_{-\infty}^{X} f_\xi(Y)\,dY = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \dots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_\xi(y_1, \dots y_n)\,dy_1 \dots dy_n.$
5. $\exists \dfrac{\partial^n F_\xi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \Rightarrow f_\xi(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\partial^n F_\xi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$
6. Если $\eta_k(\omega) \triangleq [\xi_1(\omega), \dots, \xi_{k-1}(\omega)\xi_{k+1}(\omega), \dots, \xi_n(\omega)]^{\mathrm{T}}, \forall k \in \overline{1,n}$, тогда

$$f_{\eta_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)\,dx_k.$$

Случайные векторы и их свойства
Пример: ФР и ФПВ.

Задача.

Пусть $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]^{\mathrm{T}}$ – случайный вектор, компоненты которого являются высота и вес студента МГТУ им. Н. Э. Баумана, соответсвенно. Найдем значение $\boldsymbol{F_\xi}(\mathbf{65кг}, \mathbf{175см})$ и $\boldsymbol{f_\xi}(\mathbf{65кг}, \mathbf{175см})$.



$$\boldsymbol{F_\xi}(\mathbf{65кг}, \mathbf{175см}) \triangleq \mathbf{P}\left(\boldsymbol{x} < \mathbf{65},\ \boldsymbol{y} < \mathbf{175}\right) =$$

$$= \frac{\text{число студентов в данной области}}{\text{общее число студентов}};$$

$$\boldsymbol{f_\xi}(\mathbf{65кг}, \mathbf{175см})\triangle\boldsymbol{x}\,\triangle\boldsymbol{y} \simeq$$

$$\simeq \frac{\text{число студентов в данной области}}{\text{общее число студентов}}.$$

Случайные векторы и их свойства
Некоторые функции распредедения

1. *Равномерное распределение.*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & x < a \text{ или } x > b. \end{cases}$$

2. *Экспоненциальное распределение.*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - \exp(-\lambda x), & x \geqslant 0. \end{cases} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda \exp(-\lambda x), & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Случайные векторы и их свойства
Некоторые функции распредедения

1. ***Нормальное (гауссовское) распределение.***

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt;$$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где m – математическое ожидание (среднее значение),
σ – среднее квадратическое отклонение (σ^2 – дисперсия).

- ***2. Многомерное нормальное распределение***

$$f_\xi(X) = \frac{1}{\sqrt[n]{(2\pi)^n\,|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X-M)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(X-M)\right),$$

где Σ – ковариационная матрица.