Подготовка к экзамену по дисциплине «Математические методы анализа данных и принятия решений», зима 2025-26гг.

1 Линейная регрессия. Примеры задач.

1. Описать модель линейной регрессии. Сформулировать и доказать теорему об оценке метода наименьших квадратов.

2. Описать модель линейной регрессии. Сформулировать и доказать теорему об оптимальности оценки метода наименьших квадратов в классе линейных несмещенных оценок.

3. Описать модель линейной регрессии. Получить оценки матрицы ковариации оценки метода наименьших квадратов и остаточной дисперсии.

4. Описать модель линейной регрессии. Получить формулу для вектора остатков и его числовые характеристики.

5. По данным вида (x_k, y_k), $k = \overline{1, m}$, связывающим измерения y_k и факторы x_k, вычислить оценку коэффициентов простой линейной регресии. Вычислить оценки остаточной дисперсии и матрицы ковариаций оценки метода наименьших квадатов, если данные имеют вид: $(2.74, 6.78)$, $(3.20, 9.86)$, $(1.82, 7.86)$.

6. По данным вида (x_k, y_k), $k = \overline{1, m}$, связывающим измерения y_k и факторы x_k, вычислить оценку коэффициентов простой линейной регресии. Вычислить оценки остаточной дисперсии и матрицы ковариаций оценки метода наименьших квадатов, если $\frac{\sum_{k=1}^{m} x_k}{m} = 2.69$, $\frac{\sum_{k=1}^{m} y_k}{m} = 8.21$, $\frac{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}{m} = 9.09$, $\frac{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}{m} = 75.18$, $\frac{\sum_{k=1}^{m} x_k y_k}{m} = 25.67$, $m = 50$.

2 Метод опорных веторов. Примеры задач.

7. Дать определение оптимальной разделяющей гиперплоскости. Сформулировать и доказать леммы об оптимальной разделяющей гиперплоскости.

8. Дать определение оптимальной разделяющей гиперплоскости. Сформулировать и доказать теорему об оптимальной разделяющей гиперплоскости.

9. Дать определение оптимальной разделяющей гиперплоскости. Сформулировать постановку задачи и вывести соотношения алгоритма построения оптимальной разделяющей гиперплоскости. Дать определение опорных векторов.

10. Метод опорных векторов в спрямляющем пространстве. Сформулировать оптимизационную задачу. Получить функционал двойственной задачи. Получить выражение для проекции разделяющей гиперплоскости в пространстве признаков.

11. Методом опорных векторов разделить линейно разделимые классы $\omega_1 = \{\overrightarrow{x}_1\}$, $\omega_2 = \{\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3\}$. Где $\overrightarrow{x}_1 = (1,1)^T$, $\overrightarrow{x}_2 = (1,2)^T$, $\overrightarrow{x}_3 = (2,3)^T$

12. Методом опорных векторов в спрямляющем пространстве с воспроизводящим ядром $K(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = ((\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})+1)^2$ разделить линейно неразделимые классы $\omega_1 = \{\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2\}$, $\omega_2 = \{\overrightarrow{x}_3\}$. Где $\overrightarrow{x}_1 = (0,0)^T$, $\overrightarrow{x}_2 = (2,0)^T$, $\overrightarrow{x}_3 = (1,0)^T$

3 Нейронные сети *(если успеем)*

13. Однослойные нейронные сети и их обучение. Многослойные нейронные сети прямого распространения. Описать работу нейронной сети с пороговой функцией активации. Привести простейший пример работы такой сети. В чем недостаток использования такой сети. Доказать, что решение достигается за конечное число итераций.

14. Описать работу сети ADALINE. В чем преимущество работы такой сети по сравнению с сетью с пороговой функцией активации. Обосновать и описать LMS алгоритм для этой сети.

15. Описать принципиальную схему алгоритма обратного распространения ошибки. Привести цепное правило вычисления производных. Построить алгоритм обратного распространения ошибки для корректировки весов связей многослойной сети.

4 Метод главных компонент

16. Постановка задачи снижения размерности. Описать метод главных компонент. Привести пример.

5 Байесовский классификатор

17. Описать основные принципы байесовского анализа. Сформулировать и доказать теорему Байеса. Сформулировать определения априорной и апостериорной ФПВ, функции правдоподобия. Рассмотреть пример получения апостериорной ФПВ для математического ожидание в случае нормального распределения.

18. Описать основные принципы байесовского анализа. Использование теоремы Байеса при последовательном поступлении нескольких массивов данных (привести схему). Ввести понятие функции потерь. Как используют функцию потерь для нахождения байесовской точечной оценки. Проиллюстрировать на примере.

19. Проверка гипотез. Вывести байесовское решающее правило, минимизирующее ошибку решения. Привести пример для нормального распределения.

20. Проверка гипотез. Ввести понятие функции риска. Поставить задачу на минимизацию среднего риска. Ввести понятие матрицы потерь. Вывести байесовское решающее правило минимизирующее функцию риска.

21. Проверка гипотез. Сформулировать и доказать критерий Неймана-Пирсона. Вывести решающее правило Неймана-Пирсона проверки гипотез. Привести пример.

22. Оценка ФПР. Описать принцип максимума энтропии. Привести примеры при трех различных вариантах априорной информации.