Прикладные методы оптимизации

Тверская Е. С.
e_tverskaya@bmstu.ru

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)

Москва, 2025

ИУ-6
Компьютерные системы и сети

Введение в оптимизацию

Основные предпосылки и наводящие соображения.

Пример 1

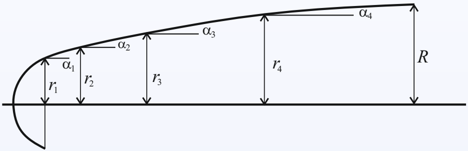
Рассмотрим упрощенный вариант задачи выбора профиля носовой части летательного аппарата с минимальным сопротивлением в потоке газа.

- Критерий качества - любое сопротивление тела при заданной скорости.
- Переменные, которые подбираются - конструктивные параметры.
- Необходимо определить структуру математической модели профиля носовой части.

Введение в оптимизацию

Основные предпосылки и наводящие соображения.

Упрощенный профиль носовой части летательного аппарата (профиль состоит из одной сферической секции и нескольких конических).



$\boldsymbol{R}$ – радиус основания;
$\boldsymbol{\alpha_i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, 4}$ – углы наклона конусов;
$\boldsymbol{r_i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, 4}$ – радиусы оснований конических секций.

$\boldsymbol{\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4, r_i, i = 1, 2, 3, 4}$ – переменные, от которых зависит лобовое сопротивлние;
$\boldsymbol{D(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)}$ – функция, оценивающая лобовое сопротивление по значениям переменых.

Введение в оптимизацию
Основные предпосылки и наводящие соображения.

Ограничения на переменные.

- Первая группа ограничений:

$$r_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

- Вторая группа ограничений:

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi/2, \quad i = 1, \ldots, 4;$$

$$\alpha_4 \leqslant \alpha_3 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_1.$$

- Третья группа ограничений:

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, r_1, \ldots, r_4) \geqslant V^*;$$
$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, r_1, \ldots, r_4) \leqslant L^*.$$

Введение в оптимизацию

Основные предпосылки и наводящие соображения.

Задача оптимизации профиля в математическом виде.

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, r_1, \ldots r_4) \longrightarrow \min .$$

При ограничениях

$$0 \leqslant r_i \leqslant R, \quad i = 1, \ldots, 4;$$
$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi/2, \quad i = 1, \ldots, 4;$$
$$\alpha_4 \leqslant \alpha_3 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_1;$$
$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, r_1, \ldots, r_4) - V^* \geqslant 0;$$
$$L^* - L(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, r_1, \ldots, r_4) \geqslant 0;$$

Введение в оптимизацию
Постановка задачи оптимизации

В общем случае помимо **ограничений - неравенств** (см. пример) присутствуют **ограничения - равенства**

Нелинейная непрерывная задача условной оптимизации (NCP — Nonlinear Constrained Optimization Problem)

$$F(\mathrm{x}) \longrightarrow \min, \quad \mathrm{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n; \tag{1}$$

$$c_i(\mathrm{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots m'; \tag{2}$$

$$c_i(\mathrm{x}) \geqslant 0, \quad i = m' + 1, \ldots m \tag{3}$$

Функция $F(\mathrm{x}) = F(x_1, \ldots, x_n)$ в (1) – **целевая функция**.
$x_1, \ldots, x_n$ – **параметры оптимизациии**.
$\Omega \subset \mathbb{R}_n$ – **допустимое множество**, т.е. множество допустимых решений.
$x^* = \underset{\mathrm{x} \in \Omega}{\operatorname{argmin}} F(\mathrm{x})$ – **оптимальное решение (локальный минимум)**.
Ограничения (2) – **ограничения типа раверств**.
Ограничения (3) – **ограничения типа нераверств**.

Введение в оптимизацию
Классификация оптимизационных задач

Таблица 1: Стандартная схема классификации оптимизационных задач по типам их функций

Типы $F(\mathbf{x})$	Типы $c_i(x)$
Функция одной переменной	Ограничения отсутствуют
Линейная функция	Простые ограничения на переменные
Сумма квадратов линейных функций	Линейные функции
Квадратичная форма	Линейные функции с разреженной матрицей коэффициентов
Сумма квадратов нелинейных функций	Гладкие нелинейные функции
Гладкая нелинейная функция	Гладкие нелинейные функции с разреженной матрицей Якоби
Нелинейная функция с разреженной матрицей Гессе	Негладкие нелинейные функции
Негладкая нелинейная функция	

Введение в оптимизацию
Условия оптимизации

Определение

Точка $\mathbf{x}^*$ является точкой ***сильного локального минимума (strong local minimum)*** в задаче NCP если $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{x}) \text{ определена на } \boldsymbol{N}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\delta}),$$
$$\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*) < \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}),\ \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{N}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\delta}),\ \boldsymbol{y} \neq \mathbf{x}^*.$$

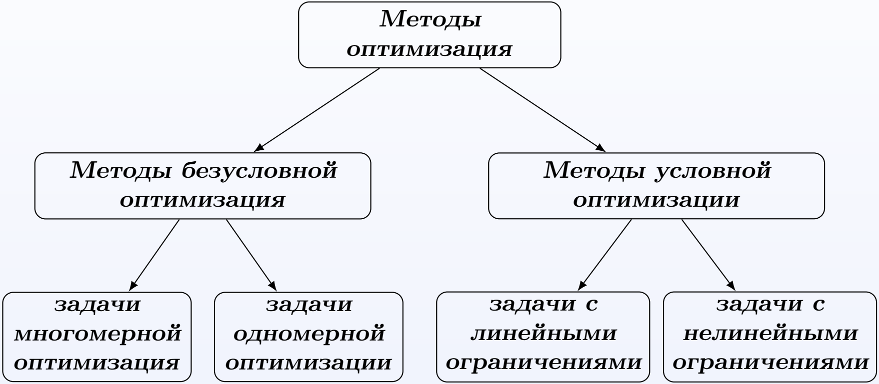
Определение

Точка $\mathbf{x}^*$ является точкой ***слабого локального минимума (weak local minimum)*** в задаче NCP если $\exists \delta > 0$ такое, что

$\boldsymbol{F}(\mathbf{x})$ определена на $\boldsymbol{N}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\delta})$,

$\boldsymbol{F}(\mathbf{x}^*) \leqslant \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}),\ \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{N}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\delta})$,

$\mathbf{x}^*$ не удовлетворяет определению сильного локального минимума.


Методы оптимизация
Методы безусловной оптимизация
Методы условной оптимизации
задачи многомерной оптимизация
задачи одномерной оптимизации
задачи с линейными ограничениями
задачи с нелинейными ограничениями

Введение в оптимизацию
Условия оптимизации (безусловная оптимизация)

Одномерный случай

Пусть $f(\mathbf{x}) \in C^2(\mathbb{R})$

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

Необходимые условия минимума в одномерной задаче без ограничений

$$f'(\mathbf{x}^*) = 0; \tag{4}$$

$$f''(\mathbf{x}^*) \geqslant 0. \tag{5}$$

Достаточные условия минимума в одномерной задаче без ограничений

$$f'(\mathbf{x}^*) = 0; \tag{6}$$

$$f''(\mathbf{x}^*) > 0. \tag{7}$$

Введение в оптимизацию
Условия оптимизации (безусловная оптимизация)

Многомерный случай

Пусть $\boldsymbol{F}(\mathbf{x})$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные на некотором множестве

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{x}) \longrightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Необходимые условия минимума в многомерной задаче без ограничений

$$||\boldsymbol{g}(\mathbf{x}^*)|| = 0; \tag{8}$$

$$\boldsymbol{G}(\mathbf{x}^*) \text{ положительно полуопределена.} \tag{9}$$

Достаточные условия минимума в многомерной задаче без ограничений

$$||\boldsymbol{g}(\mathbf{x}^*)|| = 0; \tag{10}$$

$$\boldsymbol{G}(\mathbf{x}^*) \text{ положительно определена.} \tag{11}$$