Медицинские информационные системы

Модуль 2. Мониторинг функционального организма человека.

Разработка моделей сложных систем (в том числе медицинских) по неполным данным о внутренней динамике

Булдакова Т.И. Исследование сложных систем и процессов: учебное пособие / Т.И. Булдакова. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 164с.

Ланцберг Анна Вильямовна
К.т.н., доцент кафедры ИУ6 (Компьютерные системы и сети)
lantsberg_av@bmstu.ru
Каб. 801 ГК

Моделирование динамических систем (ДС)

Что такое динамическая система?

Как ее моделировать?

- *По информации о физических процессах, протекающих в системе*
- *По данным о выходных реакциях системы на заданные входные воздействия*
- *На основе неполной информации о внутренней динамике системы по регистрируемым сигналам (биосигналы, показатели финансового рынка, информационные потоки в сетях связи, колебательные и волновые процессы)*

Сигнал представляет зависимость от времени одной или нескольких характеристик, описывающих состояние системы. По сути - это временной ряд

В зависимости от целей исследования разработка моделей систем по динамическим рядам характеристик может осуществляться на базе:

- ❑***Методов анализа временных рядов***
- ❑*Многомерного статистического анализа данных*
- ❑*Методов анализа детерминированного хаоса*
- ❑***Искусственных нейронных сетей***

Анализ временных рядов для моделирования ДС

Метод анализа временных рядов позволяют: *определить статистические характеристики и построить модели неизвестных процессов*

Исходные данные: *временной ряд, который отражает динамику доступных для измерения фазовых переменных*

Преимущество методов: *позволяет прогнозировать изменение только регистрируемых фазовых переменных*

Недостаток методов: *не дают возможности получить формализованное описание свойств системы*

Перспективно использование принципов информационного кибернетического моделирования, *которые позволяют с помощью информационной модели сымитировать поведенческие особенности сложной системы. Основа информационной модели – совокупность уравнений, описывающих процессы внутри системы*

Обратная задача нелинейной динамики (А.Н. Колмогоров, Дж. Габор)

Цель *– получение математической модели системы в виде динамических уравнений, решение которых должно с заданной степенью точности воспроизвести экспериментально полученный временной ряд a(t)*

Области использования:

- *Кодирование и сжатие информации*
- *Защита данных*
- *Синхронизация динамических систем*
- *Синтез моделей систем стабилизации*
- *Анализ сигналов динамических систем органического происхождения (сердечно-сосудистой системы)*

Что дает знание *реконструированной математической модели:*

1. *Возможность прогнозировать состояние системы на время* $t > t_0$*, где* t_0 *- длительность экспериментальной реализации*
2. *Возможность определить поведение системы в зависимости от ее параметров*

Реконструкция модельных уравнений

Реконструкция динамической системы состоит в восстановлении модельной системы по экспериментальному временному ряду $a_i(i\Delta t) = a_i$, *i=1,…,N*

Реконструкция выявляет скрытую информацию о свойствах системы по сигналу a(t), регистрируемому в эксперименте. Реализация a(t) представляет собой одну из переменных состояния системы или скалярную функцию от них.

Восстановленная математическая модель может быть представлена:

- *Дискретной моделью, описываемой разностными уравнениями (отображениями)*
- *Непрерывной моделью, описываемой системой дифференциальных уравнений*

Для решения задачи реконструкции необходимо ответить на вопросы:

1) *Как определить остальные фазовые переменные системы, если известна только одна a(t)*
2) *Какова размерность динамической системы, которую необходимо восстановить*
3) *Каков вид модельного оператора эволюции состояния системы*

Важно! *Единого подхода к решению задачи не существует! Обычно задают приближенный вид подходящих модельных уравнений и выбирают одну из возможных моделей.*

В общем случае для получения динамического описания системы на основе одномерного временного ряда необходимо реализовать 2 этапа:

I. *Восстановить фазовый портрет ДС: определить размерность пространства вложения, реконструировать аттрактор в новом модельном фазовом пространстве*
II. *Построить математическую модель исследуемой системы*

Реконструкция модельных уравнений

В общем случае для получения динамического описания системы на основе одномерного временного ряда необходимо реализовать 2 этапа:

I. *Восстановить фазовый портрет ДС: определить размерность пространства вложения, реконструировать аттрактор в новом модельном фазовом пространстве*

II. *Построить математическую модель исследуемой системы*

Этап I. Восстановление фазового портрета ДС. Реконструкция аттрактора

Аттрактор *– это множество состояний (точек фазового пространства) ДС, к которому она стремится с течением времени*

Для восстановления фазового портрета используют один из подходов:

- ❖*Метод задержки*
- ❖*Метод последовательного дифференцирования исходной реализации*

Этап I. Восстановление фазового портрета ДС. Реконструкция аттрактора. Метод задержки

Вектор состояния восстанавливается по формуле:

$$X(t) = [a(t), a(t+\tau), \dots, a(t+(n-1)\tau)] = (x_{1,} x_{2,} \dots, x_{n,})$$

n – размерность вложения

τ – задержка времени

Размерность вложения определяется из условия:

$$n \geq 2d + 1$$

d – фрактальная размерность исследуемой системы

В основе всех алгоритмов анализа временных рядов методами нелинейной динамики лежит ***теорема Такенса****.*

Согласно данной теореме: в качестве новых переменных состояния системы вводятся значения временного ряда, взятые через некоторый интервал времени τ:

$$x_1(t) = a(t), x_2(t) = a(t+\tau), x_3(t) = a(t+2\tau), \dots$$

Выбор задержки может оказывать существенное влияние на значение n.

Считается, что, если временной интервал между отсчетами равен Δt, то частоты больше, чем $1/2\Delta t$ разрешить невозможно

Метод задержки используется при построении конечно-разностных уравнений, описывающих систему

Этап I. Восстановление фазового портрета ДС. Реконструкция аттрактора. Метод последовательного дифференцирования исходной реализации

Вектор состояния представляется совокупностью производных:

$$X(t) = \left[a(t), \frac{da(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}a(t)}{dt^{n-1}}\right] = (x_{1,} x_{2,} \dots, x_{n,})$$

Так как известны значения a_i только в дискретные моменты времени $i\Delta t$, то координаты x_i вектора $X(t)$ определяются путем численного дифференцирования исходного временного ряда по приближенным математическим формулам.

Производные рассчитывают через конечные разности:

$$a^{(k+1)}(t) = \frac{\left[a^{(k)}(t+\Delta t) - a^{(k)}(t)\right]}{\Delta t}$$

где $a^{(k)}$ - производная k-го порядка наблюдаемого сигнала a(t)

$$a^{(k)}(t) = \frac{d^k a(t)}{dt^k}$$

Точность вычисления производных в этом случае тем хуже, чем больше уровень шумов и больше интервал дискретизации Δt.

Вычисление производных является самым уязвимым (ненадежным) местом в процедуре реконструкции

Этап I. Восстановление фазового портрета ДС. Определение размерности вложения

Размерность определяется по формуле Манэ:

$$n \geq 2d + 1$$

Необходимо вычислить величину d по следующему алгоритму:

1. *Вычислить функцию $f(R)$, как среднее число точек в сфере радиуса R:*

$$f(R) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j} \upsilon(R - |x_i - x_j|)\,,$$

где N – общее число точек,

$x_i = x(i, \Delta t)$,

значение функции υ оценивается в соответствии с выражением:

$$\upsilon(z) = \begin{cases} 1, \text{если } z > 0, \\ 0 \ - \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

2. *Построить график: по оси абсцисс откладывается $\ln R$, по оси ординат $\ln f(R)$. Тангенс угла наклона линейного участка определяет искомое значение d*

Необходимо учитывать ограничения на значение R. Должно выполняться условие:

$$R_{min} < R < R_{max}$$

Если R больше размеров аттрактора, то расстояние между всеми точками на аттракторе меньше, чем R.

Начиная с $R = R_{max}$, $f(R) = 1$ и $\ln f(R) = 0$

Если $R < R_{min}$, то структура аттрактора остается неразрешимой

Этап II. Построение модели исследуемой системы
Случай 1: Для задания вектора состояния использован метод задержки

Модельные уравнения представляются в виде дискретных отображений или систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для реконструкции n-мерного дискретного отображения математическая модель имеет вид:

$$x_{1,i+1} = F_1(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i})$$
$$\dots$$
$$x_{n,i+1} = F_n(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i})$$

где $x_{j,i}$ *- координаты вектора состояний в моменты времени* $i\Delta t$

F_j *- нелинейные функции*

Ключевым становится этап подгонки модельных уравнений к временным рядам.

Важно! Необходимо выбрать подходящую аппроксимацию нелинейных функций F_j *(исходя из априорных сведений о системе) и осуществить параметризацию модельных уравнений путем наилучшего согласования модели с экспериментальными данными.*

Оптимально! Использовать полиномиальную аппроксимацию, поскольку согласно теореме Вейерштрасса, полиномом достаточно высокой степени можно сколь угодно точно приблизить гладкую функцию

Этап II. Построение модели исследуемой системы Случай 1: Для задания вектора состояния использован метод задержки

Полиномиальная аппроксимация:

$$F_j(X_i) = \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_n=0}^{\nu} c_{j,l_1,l_2,\ldots,l_n} \prod_{k=1}^{n} x_{k,i}^{l_k}, \qquad \sum_{k=1}^{n} l_k \le \nu\,,$$

где $c_{j,l_1,l_2,\ldots,l_n}$ *- неизвестные коэффициенты*

Для нахождения коэффициентов функции F_j *следует решить систему M линейных алгебраических уравнений, в которой M равно количеству неизвестных коэффициентов:*

$$x_{j,i+1} = \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_n=0}^{\nu} c_{j,l_1,l_2,\ldots,l_n} \prod_{k=1}^{n} x_{k,i}^{l_k}, \qquad i = 1,\ldots,M$$

В данной системе M – это число точек скалярного временного ряда, которые используются для аппроксимации правых частей. Можно использовать не все точки доступные M, а только выборочные

Значения координат x_j *задаются по исходному временному ряду.*

Число неизвестных коэффициентов быстро растет с увеличением размерности вложения n и степени полинома ν.

В общем случае число коэффициентов k для каждой функции F_j *определяется по формуле:*

$$k = (n+\nu)!/(n!\,\nu!)$$

Этап II. Построение модели исследуемой системы Случай 1: Для задания вектора состояния использован метод последовательного дифференцирования исходной реализации

Так как взаимосвязь между координатами имеет вид:

$$X(t) = \left[a(t), \frac{da(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}a(t)}{dt^{n-1}}\right] = (x_{1,}\, x_{2,}\ \dots, x_{n,})$$

То:

$$x_1 = a(t);\ \frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \dots, \frac{dx_n}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Нелинейная функция $f(X)$ определяется аналогично функции F_j :

$$f(X) = \sum_{l_1,l_2,\dots,l_n=0}^{\nu} c_{j,l_1,l_2,\dots,l_n} \prod_{k=1}^{n} x_{k,i}^{l_k}, \qquad \sum_{k=1}^{n} l_k \le \nu\,,$$

После нахождения неизвестных коэффициентов $c_{j,l_1,l_2,\dots,l_n}$ будет окончательно сформирована математическая модель исследуемой системы

Возможные случаи, появляющиеся при реконструкции систем

Восстановленные уравнения локально описывают фазовую траекторию исходной системы

- Модель неустойчива, так как решение полученных уравнений воспроизводит исследуемый сигнал только в течение короткого промежутка времени

Наблюдается визуальное сходство фазовых портретов и плохая локальная предсказуемость фазовой траектории

- Решение восстановленных уравнений устойчиво по Пуассону. Реконструированный аттрактор имеет метрические характеристики, близкие к характеристикам исходного аттрактора

Имеется хорошая локальная предсказуемость фазовой траектории с любой ее точки на временах, превышающих характерное время корреляции

- Фазовый портрет реконструированной модели идентичен исходному, а сама система является устойчивой по Пуассону

Нейросетевая реконструкция ДС

Задача: *построить и проанализировать модель ДС по неполной, искаженной и зашумленной информации*

Решение: *спрогнозировать временной ряд, то есть предсказать будущую реакцию системы по ее предшествующему поведению.*

На основе информации о значении переменной x в моменты, предшествующие прогнозированию

$$x(k-1), x(k-2), \dots, x(k-N)$$

сеть выработает решение, каким будет наиболее вероятное значение последовательности $\hat{x}(k)$ в текущий момент k.

Для адаптации весовых коэффициентов сети используется фактическая погрешность прогнозирования и значения этой погрешности в предшествующие моменты времени

$$\varepsilon = x(k) - \hat{x}(k)$$

Необходимо определить:

- *сколько использовать предыдущих значений переменной x*
- *как далеко прогнозировать значение выходной переменной*

Обучение *ИНС осуществляется «с учителем»*

Формирование пары обучающих примеров осуществляется по принципу «скользящего окна»

Преимущества ИНС: *способность создавать нейронные аттракторы – виртуальные структуры, появляющиеся из коллективного состояния нейронных активностей (нейронных паттернов)*

Обобщенно: *нейронная сеть представляет суперпозиции простых функций одной переменной и их линейные комбинации и производит аппроксимации нелинейных функций.*

Матрица W синаптических связей сети находится исходя из условия минимизации ошибки аппроксимации но в отличии от полиномов, структура матрицы W задается первоначально произвольно. На последующих шагах аппроксимации значения элементов определяют, например, методом наименьших квадратов.

Нейронная сеть прямого распространения: рекуррентный многослойные персептрон RMLP

Исходные данные: *архитектура ИНС представлена тремя слоями (входной, промежуточный, выходной)*

Динамика системы *учитывается в рекуррентном воздействии на вход сети: на вход сети подаются элементы единичной задержки, которые создают запаздывание входных сигналов*

Система реализует отображение:

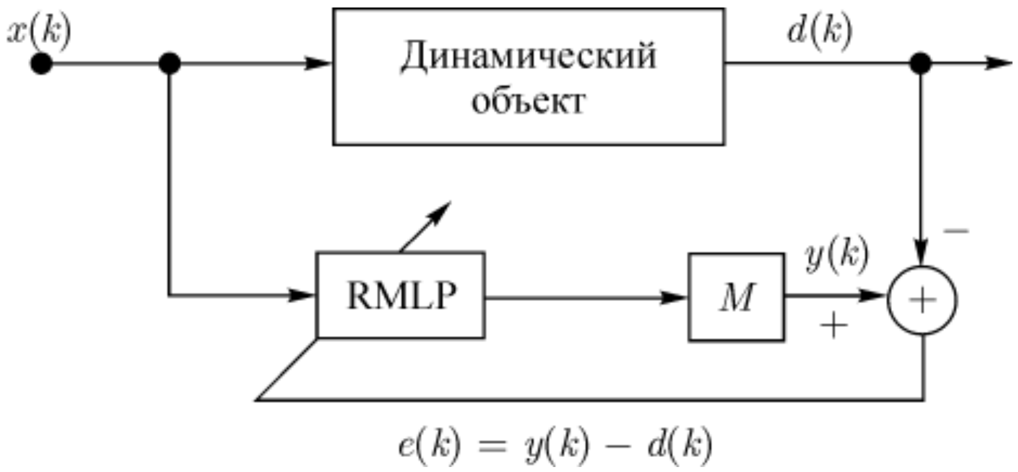
$$y(k+1) = f\left(x(k), x(k-1), \dots, x\big(k-(N-1)\big), y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-P)\right)$$

где $(N-1)$ - *количество задержек входного сигнала*

P – *количество задержек выходного сигнала.*

В результате сравнения выходного сигнала $y(n)$ *с заданным сигналом* $d(n)$ *рассчитывается значение погрешности* $\varepsilon(n)$, *управляющей процессом уточнения параметров нейронной сети:*

$$\varepsilon(n) = y(n) - d(n)$$



Рекуррентная нейронная сеть Хопфилда

Сеть Хопфилда: *восстанавливает по искаженному (зашумленному) образу ближайшего к нему эталонного. Входной вектор используется как начальное состояние сети, сеть эволюционирует, согласно своей динамике. Расчет весовых коэффициентов нейронов проводится на основе исходной информации перед началом функционирования сети. Обучение сети сводится к расчету без обучающих итераций, что ускоряет процесс обучения.*

Матрица весов W формируется по серии эталонных образцов

$$A^k = [a_1^k, \dots, a_n^k], k = 1, \dots, L$$

где L – это количество эталонных образцов.

Для биполярых векторов:

$$W$$

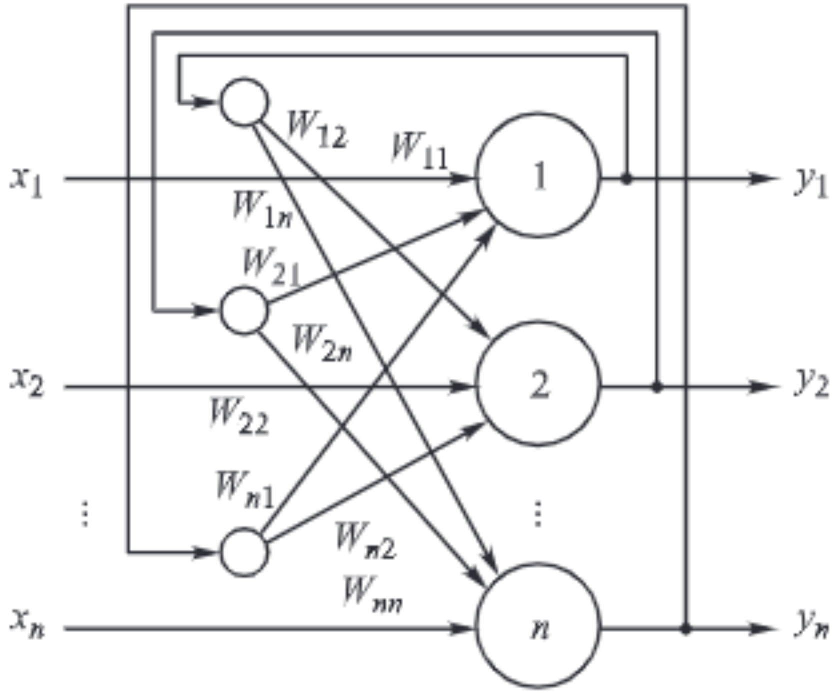
$$W_{ij} = \sum_k A_i^k A_j^k$$

Матрица W является симметричной, в ней обнуляется диагональ: $W_{ii} = 0$

Каждый элемент матрицы весов содержит информацию обо всех эталонных образах памяти.

При подаче на вход данных сеть «сходится» к одному из запомненных эталонов, представляющих множество равновесных точек, являющихся локальными минимумами функции энергии, которая содержит в себе всю структуру взаимосвязей в сети.

Обучение сети – это этап построения модели, сеть настраивается на решаемую задачу и подчиняется принципу минимизации энергии Е.



Рекуррентная нейронная сеть Хопфилда

Энергия E зависит от матрицы связей W и состояний нейронов V. Вычисление выходных сигналов осуществляется итерационно до тех пор, пока сеть не достигнет установившегося состояния

$$V_j(t+1) = \varphi\left(\sum_{i-1}^{n} V_i(t)X_{ij} - Q_j\right), j = 1,..,n$$

Q_j *- порог срабатывания j-го нейрона*

Функция активации φ может быть пороговой, сигмоидальной, кусочно-линейной и др. и определяется постановкой задачи и алгоритмом обучения

Энергия сети Хопфилда вычисляется:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_j W_{ij}V_iV_j + \sum_j Q_jV_j$$

Изменение энергии при изменении j-го нейрона равно:

$$\Delta E = -\Delta V_j \sum_{i \neq j} W_{ij}V_i$$

Эволюция системы из произвольного начального состояния может закончиться только в одной из стационарных точек, соответствующих локальному минимуму энергии E

Сети Хопфилда используются для запоминания статических образов, которые представляют точки аттракторов в фазовом пространстве нейронной системы.

Таким образом, запоминаемые объекты, распознаваемые образы ассоциируются с простейшими аттракторами и интерпретируются как положения устойчивого равновесия системы

Информация обо всех образах ассоциативной памяти содержится в каждом элементе матрицы связей W_{ij}

Сравнение этапов процедур реконструкции

Классическая реконструкция	Нейронные сети
1. Выбор класса моделей. Определяет способ формирования вектора фазовых переменных (задержка или дифференцирование)	1. Выбор архитектуры нейронной сети. Определяется постановкой задачи
2. Расчет размерности вложения по фрактальной размерности аттрактора. Численное дифференцирование временного ряда	2. Определение количественных характеристик сети (число слоев, количество нейронов в слоях)
3. Выбор вида аппроксимации для нелинейной функции f	3. Выбор способа обучения, формирование обучающей выборки
4. Расчет коэффициентов нелинейной функции f методом наименьших квадратов	4. Обучение сети, т.е. расчет матрицы синаптических весов. В многослойных сетях таких матриц несколько (для каждого слоя сети)
5. Исследование модели	5. Решение задачи с помощью обученной сети

Сравнение особенностей методов реконструкции

Классическая реконструкция	Нейронные сети
1. Фазовое пространство реконструированной системы имеет один аттрактор	1. Количество аттракторов в фазовом пространстве сети равно количеству распознаваемых образов
2. Зашумление сигнала снижает эффективность реконструкции	2. Нейронная сети способна распознавать зашумленные образы
3. Реконструкция проводится многократно, т.е. для каждой реализации сигнала одной и той же системы	3. Обучение проводится один раз, сразу для всех характерных типов сигналов, в том числе и разных систем (но одного класса)
4. Проводится без учета постановки задачи. Применяется для анализа состояния системы, прогноза ее развития	4. Постановка задачи учитывается при обучении сети. Применяется для распознавания образов

Спасибо за внимание!