Проверка статистических гипотез

Понятие статистической гипотезы. Проверка гипотез о параметрах законов распределения.

Понятие статистической гипотезы

- **Статистической гипотезой** (или просто **гипотезой**) называется любое предположение о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.
- Если гипотеза содержит некоторое утверждение о параметрах распределения случайной величины (когда сам закон распределения считается известным), то она называется **параметрической**, и **непараметрической** – в иных случаях.
- Нулевой (основной) гипотезой H_0 называется предположение, которое выдвигается изначально, пока наблюдения не заставят признать обратное.
- **Альтернативной** (**конкурирующей**) гипотезой H_1 называется гипотеза, которая противоречит нулевой гипотезе H_0 и которую принимают, если отвергнута основная гипотеза.
- Гипотезы бывают **простые** (содержащие только одно предположение) и **сложные** (состоящие из конечного или бесконечного числа простых гипотез).

Задачи статистической проверки гипотез:

- Относительно некоторой генеральной совокупности высказывается та или иная гипотеза H.
- Из этой генеральной совокупности извлекается выборка.
- Необходимо указать правило, с помощью которого можно было по выборке ответить на вопрос о том, следует ли отклонить гипотезу H или принять её.
- Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки.

! Статистическими методами гипотезу можно только **опровергнуть или не опровергнуть**, но не доказать.

Проверка статистических гипотез

- Имея две гипотезы H_0 и H_1, необходимо на основе выборочных данных либо принять основную гипотезу H_0, либо конкурирующую H_1.
- Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0 (или H_1), называется **статистическим критерием** (или просто **критерием**) проверки гипотезы H_0.
- **Статистикой** (или **тестом**) критерия называют случайную величину $\boldsymbol{\tau}$, которая служит для проверки статистических гипотез.

Общая схема проверки статистических гипотез

1. Для основной гипотезы H_0 формулируется альтернативная гипотеза H_1.

2. Выбирается уровень значимости проверки– малое число $\alpha > 0$.

3. Рассматриваются теоретические выборки значений случайных величин, о которых сформулирована гипотеза H_0, и выбирается (формируется) случайная величина τ. Значения и распределение τ полностью определяются по выборкам при предположении о верности гипотезы H_0. (обычно τ выбирают из перечисленных ниже:

U – нормальное распределение,

χ2 – распределение Пирсона,

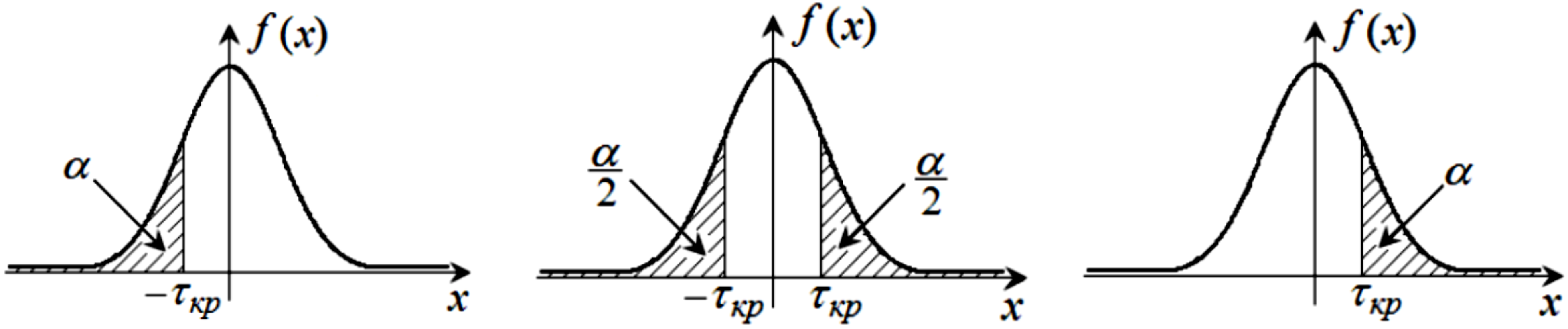
T – Стьюдента,

F – Фишера-Снедекора)

4. На числовой оси задают интервал D, такой, что вероятность попадания случайной величины τ в этот интервал: $P(\tau \in D) = 1 - \alpha$.

Интервал D называется **областью принятия гипотезы** H_0, а оставшаяся область числовой оси – **критической областью** (величина $\tau = \tau_{кр}$ – **критическое значение теста проверки**).

Различают три типа критических областей. Критическая область определяется с учётом гипотез:



5. По реализациям анализируемых выборок вычисляется конкретное (наблюдаемое) значение теста $\boldsymbol{\tau}$ (обозначим его $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\text{набл}}$) и проверяется выполнение условия $P(\tau \in D) = 1 - \alpha$:

а) если оно выполняется (например, $\boldsymbol{\tau}_{\text{набл}} < \boldsymbol{\tau}_{\text{кр}}$ для правосторонней

области), то гипотеза H_0 принимается в том смысле, что она не противоречит опытным данным и нет оснований её отвергнуть;

б) если условие не выполняется ($\boldsymbol{\tau}_{\text{набл}} > \boldsymbol{\tau}_{\text{кр}}$ для правосторонней области), то полагается, что гипотеза H_0 неверна и её отвергают.

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят критическое значение, удовлетворяющее приведённым выше соотношениям.

Принятие гипотезы H_0 следует расценивать не как раз и навсегда установленный, абсолютно верный содержащийся в ней факт, а лишь как достаточно правдоподобное, не противоречащее опыту утверждение.

Ошибки при проверке гипотез

ошибка* I *рода	***ошибка* II *рода***
Отвергается основная (нулевая) гипотеза, хотя она верна.	Отвергается конкурирующая гипотеза, хотя она верна.
Вероятность ошибки $P(H_1 \mid H_0) = \alpha$, α – ***уровень значимости критерия*** (обычно $\alpha = 0{,}05$; 0,01; 0,005; 0,001).	Вероятность ошибки $P(H_0 \mid H_1) = \beta$ (величина β, как правило, заранее неизвестна)
Вероятность принять верную (нулевую) гипотезу $P(H_0 \mid H_0) = 1 - \alpha$.	Вероятность принять верную (конкурирующую) гипотезу $P(H_1 \mid H_1) = 1 - \beta$, $(1 - \beta)$ – ***мощность критерия***.

Гипотеза о математическом ожидании нормального распределения при известной дисперсии генеральной совокупности

- Пусть генеральная совокупность X распределена по нормальному закону.
- Генеральная средняя ***a*** хотя и неизвестна, но есть основания предполагать, что она равна предполагаемому значению $\boldsymbol{a_0}$.
- Необходимо проверить гипотезу H_0: $a = a_0$ против альтернативной: H_1: $a \neq a_0$, или H_1: $a < a_0$, или H_1: $a > a_0$.

H_0	Статистика критерия	H_1	Область принятия H_0
$a = a_0$	$U = \dfrac{\bar{x} - a_0}{\sigma}\sqrt{n}$	$a \neq a_0$	$\lvert U \rvert < u_{кр}$, $\Phi(u_{кр}) = 0{,}5 - \dfrac{\alpha}{2}$
$\sigma^2 = \sigma_г^2$ известно		$a < a_0$	$U > -u_{кр}$, $\Phi(u_{кр}) = 0{,}5 - \alpha$
		$a > a_0$	$U < u_{кр}$, $\Phi(u_{кр}) = 0{,}5 - \alpha$

Пример 1

- Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ извлечена выборка объёма $n=100$, и по ней найдено выборочное среднее 26,5. Требуется на уровне значимости $\alpha=0,05$ проверить гипотезу H_0: $a=a_0=25$ против альтернативной гипотезы H_1: $a \neq a_0$.
- Решение. Найдём значение статистики критерия

$$U = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{26,5 - 25}{5}\sqrt{100} = 3.$$

из соотношения $\Phi(u_{кр}) = 0,5 - \frac{0,05}{2} = 0,475$ находим по таблице Лапласа $u_{кр} = 1,96$

Т. к. $|U| > u_{кр}$, то основная гипотеза отвергается.

Гипотеза о математическом ожидании нормального распределения при неизвестной дисперсии генеральной совокупности

H_0	Статистика критерия	H_1	Область принятия H_0
$a = a_0$ $\sigma^2 = \sigma_г^2$ неизвестно	$T = \dfrac{\bar{x} - a_0}{s}\sqrt{n}$	$a \neq a_0$	$\lvert T \rvert < t_{кр}$, $t_{кр} = t_{\alpha, n-1}$ для двусторонней области
		$a < a_0$	$T > -t_{кр}$, $t_{кр} = t_{\alpha, n-1}$ для односторонней области
		$a > a_0$	$T < t_{кр}$, $t_{кр} = t_{\alpha, n-1}$ для односторонней области

s – исправленное среднее квадратическое отклонение.

Значение $t_{кр}$ находим по таблице Стьюдента

Пример 2

- По выборке объёма n = 16, извлечённой из нормальной генеральной совокупности, найдены $\bar{x}$ =12, 4 и s = 1,2. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: *a*= 11,8 при конкурирующей гипотезе H_1: *a* ≠ 11,8.
- <u>Решение</u>: Найдём наблюдаемое значение статистики критерия

$$T = \frac{\bar{x} - a_0}{s}\sqrt{n} = \frac{12,4 - 11,8}{1,2}\sqrt{16} = 2$$

Поскольку конкурирующая гипотеза имеет вид $a \neq a_0$, то искомая критическая область двусторонняя. Из таблицы критических точек распределения Стьюдента найдём по уровню значимости α = 0,05 и числу степеней свободы k = n−1= 15 критическую точку $t_{кр} = t_{кр}(0,05;15) = 2,13$.

Т. к. $|T| < t_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Гипотеза о сравнении генеральных дисперсий нормального распределения

- **Гипотезы о дисперсиях** возникают достаточно часто, так как дисперсия характеризует такие исключительно важные показатели, как точность машин, приборов, технологических процессов, степень однородности совокупностей, риск, связанный с отклонением доходности активов от ожидаемого уровня, и т. д.

H_0	Статистика критерия	H_1	Область принятия H_0
$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ a_x и a_y неизвестны	$F = \dfrac{s_{\max}^2}{s_{\min}^2}$	$\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$	$F < F_{кр}$, $F_{кр} = F_{\alpha/2,\, n_1-1,\, n_2-1}$
		$\sigma_x^2 > \sigma_y^2$	$F < F_{кр}$, $F_{кр} = F_{\alpha,\, n_1-1,\, n_2-1}$

Пример 3

Измерения одной и той же физической величины проведены двумя методами. Получены следующие результаты:

В первом случае: $x_1=9{,}6$; $x_2=9{,}8$; $x_3=10{,}0$; $x_4=10{,}2$; $x_5=10{,}6$.

Во втором случае: $y_1=10{,}4$; $y_2=9{,}7$; $y_3=10{,}0$; $y_4=10{,}3$.

Предполагается, что результаты измерений распределены в выборке нормально и выборки независимы. Можно ли считать, что оба метода обеспечивают одинаковую точность измерений, если принять уровень значимости $\alpha=0{,}1$?

Решение примера 3

Будем судить о точности методов по величине дисперсии.

Основная гипотеза H_0: D(X)=D(Y)

Альтернативная гипотеза H_1: D(X)≠D(Y)

Найдем исправленные выборочные дисперсии: $s_X^2 = 0{,}148;\ s_Y^2 = 0{,}1$

Находим статистику: $F_{\text{набл}} = \frac{0{,}148}{0{,}1}$ =1,48

Критическая область двусторонняя, поэтому по уровню значимости α/2=0,05 и числам степеней свободы k_1=5-1=4, k_2=4-1=3 находим критическую точку $F_{кр}$(0,05; 4; 3)=9,12.

Т.к. $F_{набл} < F_{кр}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу. Следовательно, оба метода обеспечивают одинаковую точность измерений.

Проверка гипотез о равенстве двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (большие независимые выборки)

Имеются две независимые выборки больших объемов (n_1>30, n_2>30), по которым найдены выборочные средние. Генеральные дисперсии D(X), D(Y) известны.

Необходимо проверить на ровне значимости α нулевую гипотезу H_0: M(X)=M(Y).

H_0	Статистика критерия	H_1	Область принятия H_0
$a_x = a_y$ σ_x^2 и σ_y^2 известны	$U = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_2}}}$	$a_x \neq a_y$	$\lvert U \rvert < u_{кр}$, $\Phi(u_{кр}) = 0{,}5 - \dfrac{\alpha}{2}$
		$a_x < a_y$	$U > -u_{кр}$, $\Phi(u_{кр}) = 0{,}5 - \alpha$
		$a_x > a_y$	$U < u_{кр}$, $\Phi(u_{кр}) = 0{,}5 - \alpha$

Пример 4

Для проверки эффективности новой технологии отобраны две группы рабочих: в первой группе численностью n1=50 чел., где применялась новая технология, выборочная средняя выработка составила x =85 (изделий), во второй группе численностью n2=70 чел. выборочная средняя–y = 78 (изделий). Предварительно установлено, что дисперсии выработки в группах равны соответственно σ_x^2=100 и σ_y^2 =74.

На уровне значимости α=0,05 выяснить влияние новой технологии на среднюю производительность.

Решение примера 4

Проверяемая гипотеза $H_0: a_x = a_y$, т. е. средние выработки рабочих одинаковы по новой и старой технологиям.

В качестве конкурирующей гипотезы можно взять $H_1: a_x > a_y$

Находим фактическое значение статистики критерия

$$U = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}} = \frac{85 - 78}{\sqrt{\frac{100}{50} + \frac{74}{70}}} = 4.$$

При альтернативной гипотезе H_1 по таблице Лапласа из соотношения

$$\Phi(u_{кр}) = 0{,}5 - 0{,}05 = 0{,}45$$

найдём критическое значение $u_{кр} = 1{,}64$

Т.к. $U > u_{кр}$, то гипотеза H_0 отвергается, можно сделать вывод, что новая технология позволяет повысить среднюю выработку рабочих.

Проверка гипотезы о равенстве двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы (малые независимые выборки)

Имеются две независимые выборки малых объемов ($n_1<30$, $n_2<30$), по которым найдены выборочные средние и исправленные выборочные дисперсии. Генеральные дисперсии D(X), D(Y) неизвестны, но предполагаются одинаковыми.

Необходимо проверить на ровне значимости α нулевую гипотезу H_0: M(X)=M(Y).

H_0	Статистика критерия	H_1	Область принятия H_0
$a_x = a_y$ σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны, но равны	$T = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$, $s = \sqrt{\dfrac{s_x^2 \cdot (n_1 - 1) + s_y^2 \cdot (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}}$	$a \neq a_0$	$\lvert T \rvert < t_{кр}$, $t_{кр} = t_{\alpha, n_1 + n_2 - 2}$ для двусторонней области
		$a < a_0$	$T > -t_{кр}$, $t_{кр} = t_{\alpha, n_1 + n_2 - 2}$ для односторонней области
		$a > a_0$	$T < t_{кр}$, $t_{кр} = t_{\alpha, n_1 + n_2 - 2}$ для односторонней области

Пример 5

Из двух партий изделий, изготовленных на двух одинаково настроенных станках, извлечены малые выборки, объемы которых n = 10 и m = 12. Получены следующие результаты:

Первый станок

Контролируемый размер изделий x_i	3,4	3,5	3,7	3,9
Частота (число изделий) n_i	2	3	4	1

Второй станок

Контролируемый размер изделий y_i	3,2	3,4	3,6
Частота (число изделий) m_i	2	2	8

При условии значимости 0,02 проверим гипотезу H_0: M(X) = M(У) о равенстве средних размеров изделий при конкурирующей гипотезе H_1 : M(X) ≠ M(У). Предполагается, что случайные величины X и У распределены нормально.

Решение примера 5

Найдем выборочные средние и исправленные дисперсии для каждой выборки:

$\bar{x}$	3,6	s_x^2	0,0267
$\bar{y}$	3,5	s_y^2	0,0255

Для рассматриваемого критерия Стьюдента предполагается, что генеральные дисперсии одинаковы, поэтому надо сравнить дисперсии, используя критерий Фишера – Снедекора при $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

$F_{набл}$ = 0,0267 /0,0255 = 1,05. По таблице имеем $F_{кр}(0{,}01; 9; 11) = 4{,}63$.

Так как $F_{набл} < F_{кр}$, дисперсии различаются незначимо.

Теперь вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента. $T_{набл} = 1{,}45$.

По уровню значимости 0,02 и числу степеней свободы $k = n + m - 2 = 10 + 12 - 2 = 20$ находим по таблице Стьюдента критическую точку $t_{дв.кр}\ (0{,}02; 20) = 2{,}53$.

Так как $T_{набл} < t_{дв.кр}$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу; следовательно, средние размеры изделий существенно не различаются.

Проверка гипотезы о равенстве двух средних нормальных генеральных совокупностей с неизвестными дисперсиями (зависимые выборки)

Пусть генеральные совокупности Х и У распределены нормально, причем их дисперсии неизвестны.

Из этих совокупностей извлечены зависимые выборки одинакового объема n, варианты которых соответственно равны Xi и Уi.

Введем обозначения:

di = Xi - Уi - разности вариант с одинаковыми номерами;

$\bar{d} = {\sum d_i}/{n}$ - средняя разностей вариант с одинаковыми номерами;

$s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - (\sum d_i)^2/n}{n-1}}$ - «исправленное» среднее квадратическое отклонение.

Для того чтобы проверить нулевую гипотезу H_0: M(X) = M(У) о равенстве двух средних нормальных совокупностей X и У с неизвестными дисперсиями в случае двух зависимых выборок одинакового объема при конкурирующей гипотезе H_1: M(X) ≠M(У), надо:

1) вычислить наблюдаемое значение критерия $T_{\text{набл}} = \bar{d}\,\frac{\sqrt{n}}{s_d}$

2) по таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы k = n - 1 найти критическую точку $t_{\text{дв.к}}$ (a, k):

- если $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{дв.к}}(\alpha, k)$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу;
- если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{дв.к}}(\alpha, k)$, нулевую гипотезу отвергают.

Пример 6

Двумя приборами в одном и том же порядке измерены шесть деталей и получены следующие результаты измерений (мкм):

x_i	2	3	5	6	8	10
y_i	10	3	6	1	7	4

При уровне значимости 0,05 проверим нулевую гипотезу о равенстве результатов измерений в предположении, что они распределены нормально.

<u>Решение</u>: $d_1 = -8$, $d_2 = 0$, $d_3 = -1$, $d_4 = 5$, $d_5 = 1$, $d_6 = 6$.

Выборочная средняя $\bar{d} = 0{,}5$, «исправленное» среднее квадратическое отклонение, $s_d = 5{,}01$

$T_{набл} = 0{,}24$.

По таблице находим критическую точку $t_{дв.кр}(0{,}05;\ 5) = 2{,}57$.

Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности

Пусть n - объем выборки, по которой найдена исправленная дисперсия s^2.

При заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии σ^2 гипотетическому (предполагаемому) значению σ_0^2

H_0	Статистика критерия	H_1	Область принятия H_0
$\sigma^2 = \sigma_0^2$ a неизвестно	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}$
		$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha;n-1}$
		$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha;n-1}$

Если число степеней свободы $k > 30$, то критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$ можно найти из **равенства Уилсона — Гильферти**:

$$\chi^2_{кр}(\alpha, k) = k\left[1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right]^3,$$

где z_α находят, используя функцию Лапласа, из равенства $\Phi(z_\alpha) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$.

Пример 7

Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии контролируемого размера изделий, которая не должна превышать σ_0^2 =0,1. Взята проба из 25 случайно отобранных изделий. Получены следующие результаты измерений:

Контролируемый размер изделий пробы x_i	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
Частота n_i	2	6	9	7	1

При уровне значимости 0,05 проверим, обеспечивает ли станок требуемую точность.

Решение примера 7

H_0: σ^2 =0,1.

H_1: σ^2 >0,1.

Найдем исправленную выборочную дисперсию.

s^2=0,1975

Найдем наблюдаемое значение критерия: $\chi^2_{набл}$=48

Найдем по таблице критическую точку: $\chi^2_{кр}(0,05; 24) = 36,4$.

Имеем $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, следовательно, нулевую гипотезу отвергаем, т.е. станок не обеспечивает необходимую точность и требует наладки.

Сравнение наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события

Пусть по достаточно большому числу n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, но неизвестна, найдена относительная частота m/n (где m - число появлений события).

Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что неизвестная вероятность p равна гипотетической вероятности p_0, т.е. H_0: $p = p_0$

H_0	Статистика критерия	H_1	Область принятия H_0
$p = p_0$ достаточно большие n, $np_0 > 5$, $nq_0 > 5$, $q_0 = 1 - p_0$	$U = \frac{p^* - p_0}{\sqrt{p_0 q_0}}\sqrt{n}$, $p^* = \frac{m}{n}$	$p \neq p_0$	$\lvert U \rvert < u_{кр}$, $\Phi(u_{кр}) = 0{,}5 - \frac{\alpha}{2}$
		$p < p_0$	$U > -u_{кр}$, $\Phi(u_{кр}) = 0{,}5 - \alpha$
		$p > p_0$	$U < u_{кр}$, $\Phi(u_{кр}) = 0{,}5 - \alpha$

Пример 8

Партия изделий принимается, если вероятность того, что изделие окажется бракованным, не превышает 0,02. Среди случайно отобранных 480 изделий оказалось 12 дефектных. Можно ли принять партию?

Решить самостоятельно.

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий нескольких нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объема (критерий Кочрена)

Пусть генеральные совокупности X_1 , X_2, … , X_m распределены нормально.

Из этих совокупностей извлечены m независимых выборок одинакового объема n и по ним найдены исправленные выборочные дисперсии s_1^2, s_2^2, ... , s_m^2, все с одинаковым числом степеней свободы $k = n - 1$.

Требуется на уровне значимости α проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий, т.е. гипотезу $H0: D(X_1) = D(X_2) = … = D(X_m)$ о равенстве между собой генеральных дисперсий.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем **критерий Кочрена (Кохрена)** - отношение максимальной исправленной дисперсии к сумме всех исправленных дисперсий.

Для этого надо:

1) вычислить *наблюдаемое значение критерия*

$$G_{\text{набл}} = \frac{s^2_{\max}}{s^2_1 + s^2_2 + \ldots + s^2_l};$$

2) по таблице критических точек распределения Кочрена найти *критическую точку* $G_{\text{кр}}(\alpha, k, l)$:

- **если $G_{\text{набл}} < G_{\text{кр}}$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу;**
- **если $G_{\text{набл}} > G_{\text{кр}}$, нулевую гипотезу отвергают.**

При условии однородности дисперсий независимых выборок одинакового объема в качестве оценки генеральной дисперсии принимают **средню̀ю арифметическую исправленных дисперсий.**

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий нескольких нормальных генеральных совокупностей по выборкам различного объема (критерий Бартлетта)

Пусть генеральные совокупности X_1 , X_2, … , X_m распределены нормально.

Из этих совокупностей извлечены m независимых выборок, вообще говоря, различных объемов n_i (некоторые объемы могут быть одинаковыми; если все выборки имеют одинаковый объем, используется критерий Кочрена).

По выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии s_1^2, s_2^2, ... , s_m^2.

Требуется на уровне значимости α проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий, т.е. гипотезу H_0: $D(X_1) = D(X_2) = ... = D(X_m)$ о равенстве между собой генеральных дисперсий.

Введем обозначения:

$k_i = n_i - 1$ — число степеней свободы дисперсии s_i^2;

$k = \sum\limits_{i=1}^{l} k_i$ — сумма чисел степеней свободы;

$(\overline{s})^2 = \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{l} k_i s_i^2$ — средняя арифметическая исправленных дисперсий, взвешенная по числам степеней свободы;

$$V = 2{,}303\left(k\lg(\overline{s})^2 - \sum_{i=1}^{l} k_i \lg s_i^2\right);$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(l-1)}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k}\right).$$

Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий нормальных совокупностей, надо:

1) вычислить наблюдаемое значение критерия Бартлетта

$B_{набл} = V/C$;

2) по таблице критических точек распределения χ^2 по уровню значимости α и числу степеней свободы $m - 1$ (где m - число выборок) найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha, m-1)$ правосторонней критической области:

- если $B_{набл} < \chi^2_{кр}$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу;
- если $B_{набл} > \chi^2_{кр}$, нулевую гипотезу отвергают.

При условии однородности дисперсий в качестве оценки генеральной дисперсии принимают среднюю арифметическую исправленных дисперсий, взвешенную по числам степеней свободы:

$$(\overline{s})^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m} k_i s_i^2 .$$

Пример 9

По четырем независимым выборкам объемом n_1 = 17, n_2 = 20, n_3 = 15, n_4 = 16, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии, соответственно равные 2,5; 3,6; 4, 1; 5,8. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу об однородности дисперсий и оценить генеральную дисперсию.

Решить самостоятельно

Сравнение двух вероятностей биномиальных распределений

Пусть в двух генеральных совокупностях проводятся независимые испытания: в результате каждого испытания событие А может появиться в первой совокупности с неизвестной вероятностью p_1 а во второй - с неизвестной вероятностью p_2.

По выборкам, извлеченным из первой и второй совокупностей, найдены соответствующие частоты $w_1(A) = m_1/n_1$ и $w_2(A) = m_2/n_2$, где m_1, m_2 - числа появлений события А; n_1 , n_2 - количество испытаний.

В качестве оценок неизвестных вероятностей примем относительные частоты: $p_1 = w_1$, $p_2 = w_2$.

При заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $\mathbf{H_0}$:

$\mathbf{p_1 = p_2 = p}$ о равенстве вероятностей появления события в двух генеральных совокупностях, имеющих биномиальные распределения,

наблюдаемое значение критерия

$$U_{\text{набл}} = \frac{\dfrac{m_1}{n_1} - \dfrac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}\left(1 - \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}\right)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}};$$

при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 \neq p_2$ по таблице функции Лапласа находим критическую точку $u_{кр}$ из равенства $\Phi(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$

- если $|U_{набл}| < u_{кр}$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу;
- если $|U_{набл}| > u_{кр}$, нулевую гипотезу отвергают.

При конкурирующей гипотезе H_1:$p_1 > p_2$ критическую точку правосторонней критической области находят из равенства $\Phi(u_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$

Та же формула используется и для левосторонней области.

Пример 10

За смену отказали 15 элементов устройства А, состоящего из 800 элементов, и 25 элементов устройства В, состоящего из 1000 элементов. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу H_0: $p_1 = p_2 = p$ о равенстве вероятностей отказа элементов обоих устройств при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 \neq p_2$

Решить самостоятельно.