ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

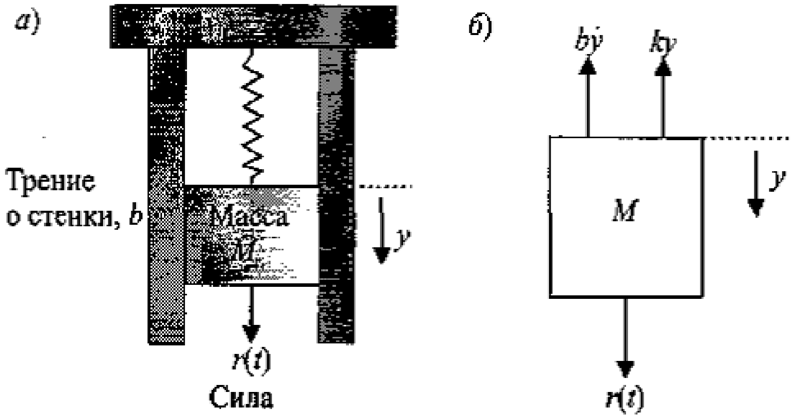


Рис. 1
(а) Система пружина-масса
с демпфированием
(б) Условное обозначение

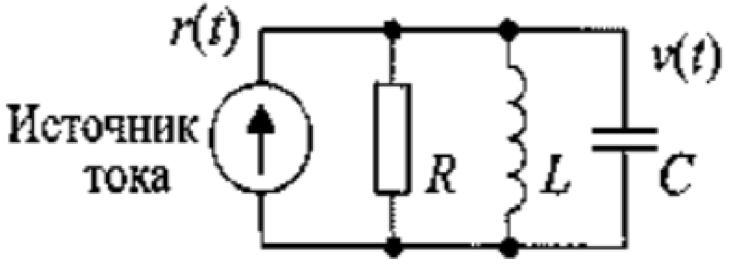


Рис.2. RLC - цепь

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=r(t), \qquad v(t)=\frac{dy(t)}{dt}.$$

$$M\frac{dv(t)}{dt}+bv(t)+k\int_0^t v(t)\,dt=r(t).$$

$$y(t)=K_1e^{-\alpha_1t}\sin(\beta_1t+\theta_1).$$

$$\frac{v(t)}{R}+C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,dt=r(t).$$

$$v(t)=K_2e^{-\alpha_2t}\cos(\beta_2t+\theta_2).$$

(для случая r(t)=I)

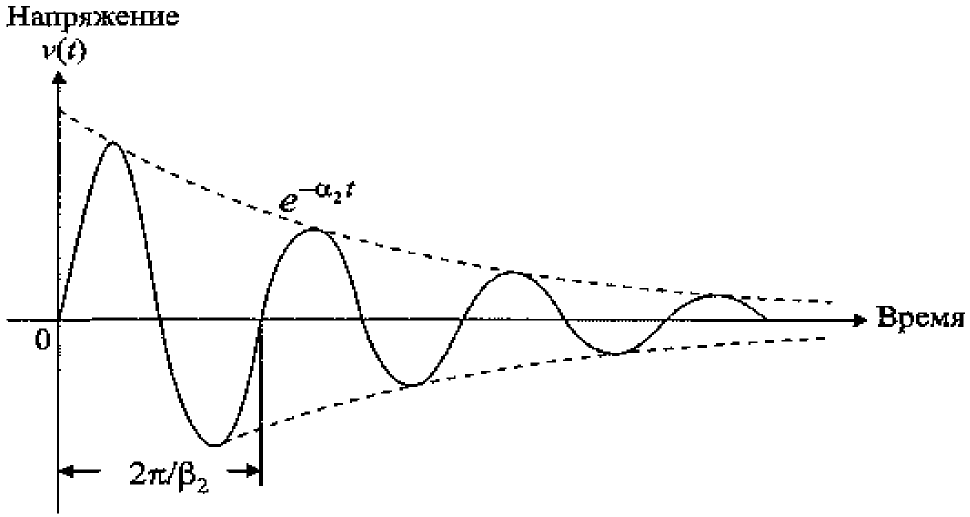


Рис.3. Типичное решение для недодемпфированоой системы

Передаточная функция. Применяем преобразование Лапласа:

$$Ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = R(s)$$

$$\frac{выход}{вход} = G(S) = \frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{1}{MS^2 + bs + k}$$

$$G(S) = \frac{K_1}{TS^2 + T_1S + 1}$$

Передаточная функция существует только для линейных стационарных (с постоянными параметрами) систем. В нестационарных системах один или несколько параметров зависят от времени, поэтому преобразованием Лапласа воспользоваться нельзя. Передаточная функция описывает поведение системы в терминах вход-выход и не несет никакой информации о внутренних переменных и характере их изменения.

Типы звеньев и их характеристики

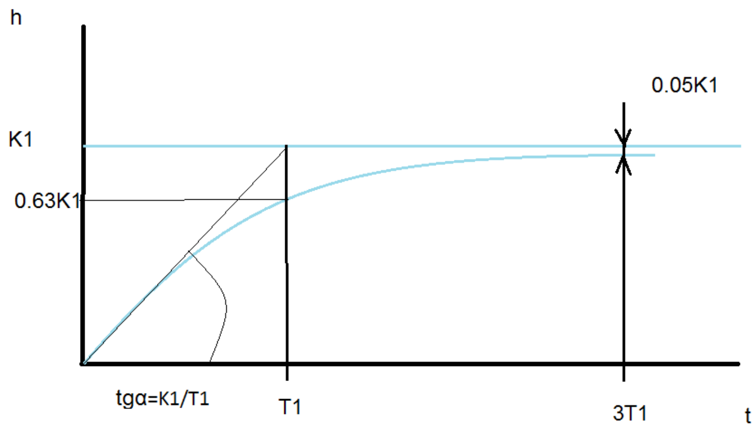
$$W(S) = \frac{k_1 N(S)}{L(S)}$$

1. Позиционные звенья – N(S) и L(S) в качестве свободных членов имеют 1 и для этих звеньев статическая характеристика имеет вид: $x_2 = k_1 x_1$ и называется позиционной:

- идеальное усилительное безынерционное звено $W(S) = \dfrac{x_2(S)}{x_1(S)} = k_1$
- апериодическое инерционное звено

А) Передаточная функция $W(S) = \dfrac{k_1}{T_1 S + 1}$

В) Переходная функция



$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{S}\frac{W(S)}{}\right] = L^{-1}\left[\frac{k_1}{S(T_1 S + 1)}\right] = k_1(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \cdot 1(t)$$

Типы звеньев и их характеристики

C) ИПФ $$W(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{k_2}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}$$

D) АФЧХ

$$W(j\omega)=\frac{k_1}{T_1 j\omega+1}=U(\omega)+jV(\omega)\Rightarrow\frac{k_1}{T_1 j\omega+1}\cdot\frac{T_1 j\omega-1}{T_1 j\omega-1}=$$

$$=\frac{k_1}{T_1^2\omega^2+1}+j\frac{k_1T_1\omega}{T_1^2\omega^2+1}\Rightarrow A(\omega)=|W(j\omega)|=\sqrt{U^2+V^2}=\frac{k_1}{\sqrt{T_1^2\omega^2+1}}$$

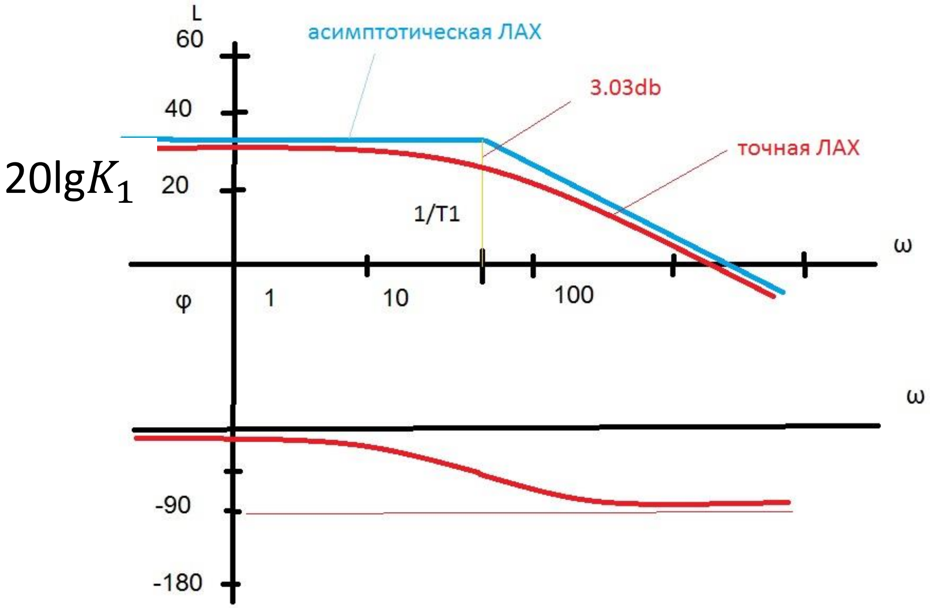
$$\varphi(\omega)=\arg W(j\omega)=arctg\frac{V}{U}=-arctgT_1\omega$$

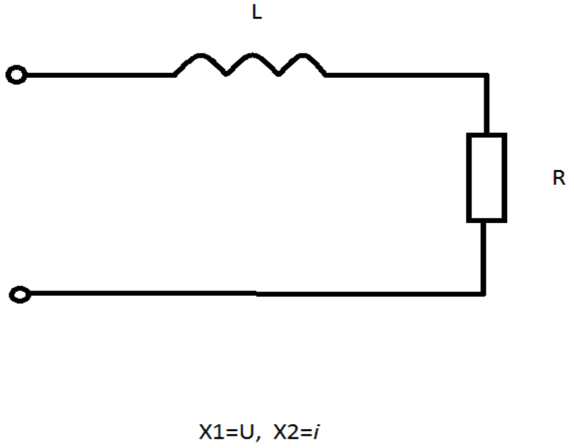
E) ЛАФЧХ

$$L(\omega)=20\lg A=20\lg k_1-20\lg\sqrt{T_1^2\omega^2+1}$$

при $\omega\to 0$ $\quad L=20\lg k_1$ горизонтальная прямая

при $\omega\to\infty$ $\quad L=20\lg k_1-20\lg T_1\omega$ прямая с наклоном -20db/дек





Типы звеньев и их характеристики

- апериодическое звено 2-го порядка

А)
$$W(S) = \frac{k}{T_2^2 S^2 + T_1 S + 1}, \quad T_1 \geq 2T_2$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2} \Rightarrow W(S) = \frac{k}{(T_3 S + 1)(T_4 S + 1)}$$

- колебательное звено

А)
$$W(S) = \frac{k}{T_2^2 S^2 + 2T_1 S + 1}, \quad T_1 < 2T_2$$

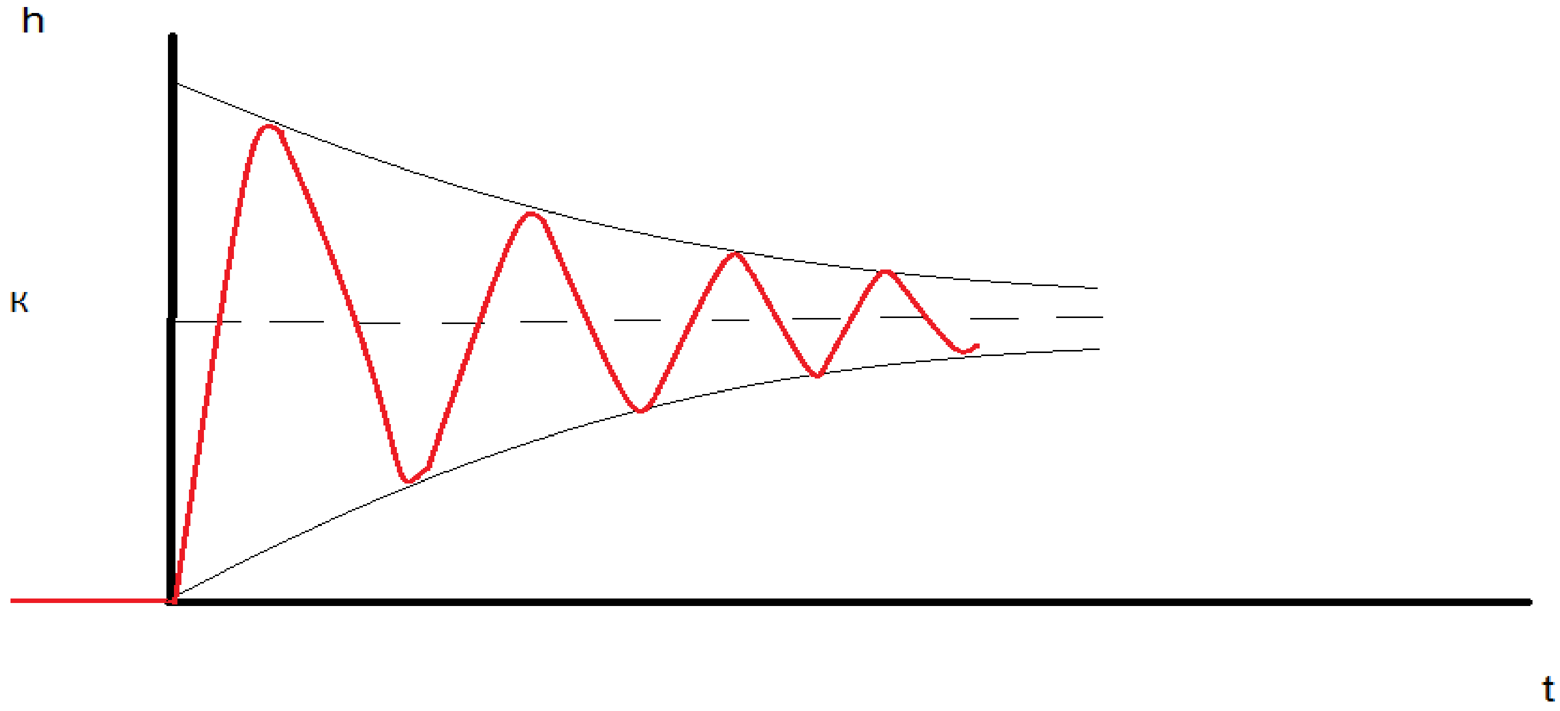
корни характеристического уравнения комплексные, а для записи передаточной функции используется следующий вид:

$$W(S) = \frac{k}{T^2 S^2 + 2\xi T S + 1}$$

где T - постоянная времени колебательного звена, ξ - много названий (коэффициент затухания, декремент затухания, коэффициент демпфирования);

Типы звеньев и их характеристики

в) $h(t) = k(1 - e^{-\frac{\xi}{T}t}(\cos\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t)\,, \quad t > 0$



Типы звеньев и их характеристики

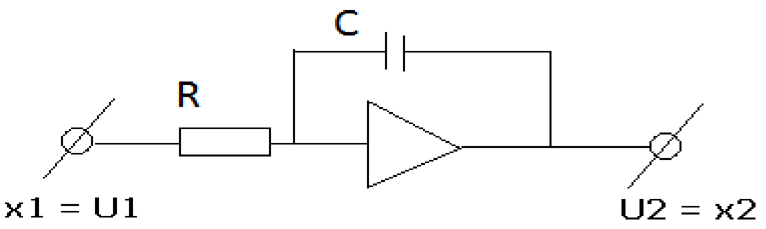
2. Интегрирующие $$W(S)=\frac{k_u L(S)}{S^{\upsilon} N(S)}$$

где υ - порядок астатизма, $N(S)$ и $L(S)$ в качестве свободных членов имеют 1. Звенья, содержащие интеграторы, называются астатическими.

k_u - коэффициент передачи по скорости, $k_u \dot{x}_2 = x_1$. Статическое уравнение связывает установившееся значение скорости и постоянное значение входного воздействия.
$t \to \infty \ \ (S \to \infty)$ таким образом задаётся установившийся режим. В статическом (установившемся) режиме k_u "как бы" соответствует статическому $k=\infty$

- идеальное интегрирующее звено

А) $$W(S)=\frac{k_u}{S}$$



Типы звеньев и их характеристики

3. Дифференцирующие $$W(S)=\frac{K_g S^k L(S)}{N(S)}=\frac{x_2(S)}{x_1(S)}$$

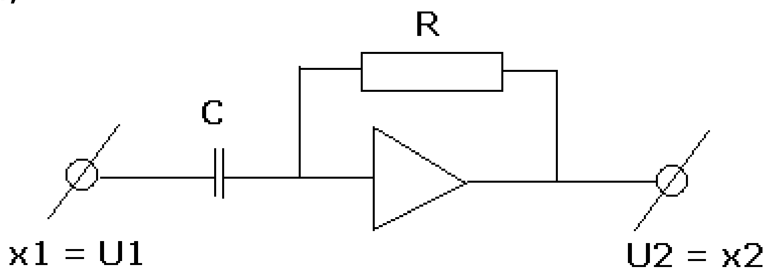
- идеальное дифференцирующее звено

A) $W(S)=K_g S$

B) $h(t)=K_g\delta(t)\,,\quad t>0$

C) $\omega(t)=K_g\,\frac{d\delta(t)}{dt}\,,\quad t>0$

бесконечный рост амплитуды с ростом частоты требует бесконечного роста энергии, следовательно, в реальных системах такой вид характеристики возможен лишь в ограниченном диапазоне частот



D) $W(j\omega)=jK_1\omega$

$A(\omega)=K_1\omega$, $\varphi=+90^0$

E) $L(\omega)=20\lg K_g+20\lg\omega\,,\quad \varphi(\omega)=90^0$

положительная фаза означает опережение сигнала на выходе по отношению к сигналу на входе. Физически это означает, что, как следует из уравнения звена, оно реагирует на скорость изменения входного сигнала, а не на сам входной сигнал. То есть, данное звено реагирует на тенденцию (обладает свойством предвидения).

Типы звеньев и их характеристики

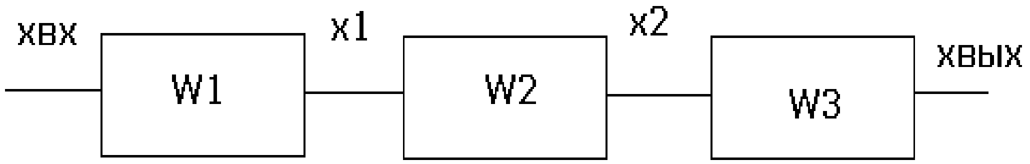
- реальное дифференцирующее звено

А) $W(S) = \dfrac{KS}{TS + 1}$

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ

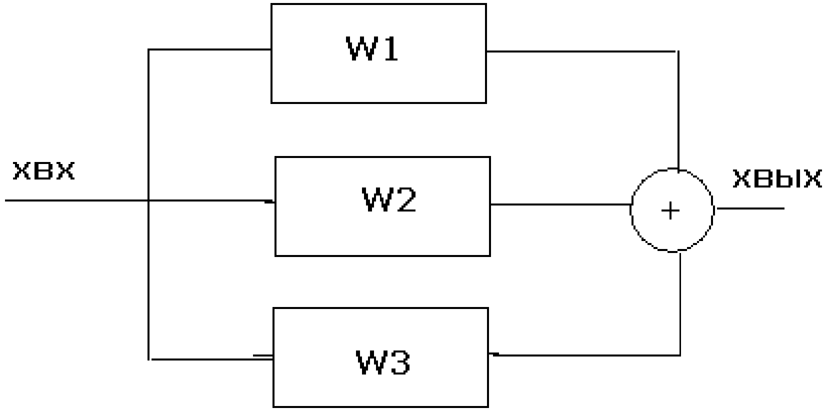
Преобразование систем

1. Цепь из последовательно соединенных звеньев



$$W(S) = \frac{x_{вых}(S)}{x_{вх}(S)} = \prod_{i=1}^{n} W_i(S)$$

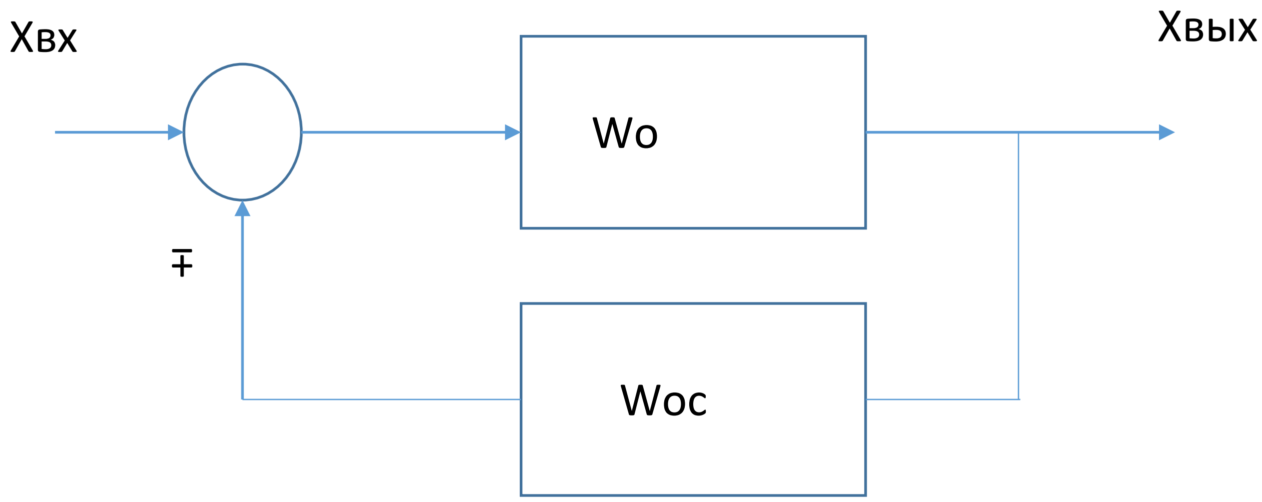
2. Цепь из параллельно соединенных звеньев



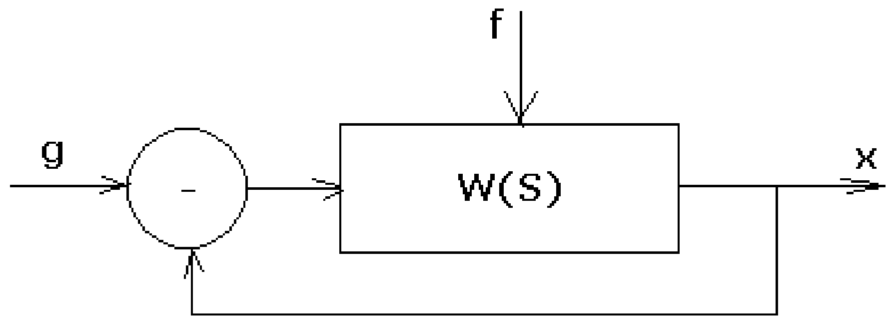
W(S)=$\sum_{i=1}^{n} Wi(S)$

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ

3. Местная обратная связь



$$W(S)=\frac{Хвых(S)}{Хвх(S)}=\frac{Wo}{1\pm WoWoc}$$



<u>При расчёте САР используются следующие передаточные функции:</u>

1) главная передаточная функция (ГПС) – показывает нам нашу управленческую задачу при $f=0$ и равняется $W(S)=\dfrac{x(S)}{g(S)}=\dfrac{W(S)}{1+W(S)}$

2) передаточная функция по ошибке – с какой точность мы обрабатываем входной сигнал: $W(S)=\dfrac{\varepsilon(S)}{g(S)}=\dfrac{1}{1+W(S)}$

3) передаточная функция по возмущению – каким образом возмущение пробирается на выход, при $g=0$ и равна $W(S)=\dfrac{x(S)}{f(S)}=\dfrac{M(S)}{1+W(S)}$, где $M(S)$

Процесс управления и требования к нему

Процесс управления определяется решением системы дифференциальных уравнений замкнутой системы относительно регулируемой величины X(t).

$$x(t) = x_{собств}(t) + x_{вынужд}(t)$$

$$x_{собств}(t) = C_i e^{\lambda_i t}$$

C_i - определяется по начальным условиям, его значение определяется после добавления частного решения $x_{вынужд}(t)$, то есть, в полном решении, поэтому форма собственного движения, которая и является переходным процессом в системе, зависит не только от корней характеристического уравнения (хотя эта зависимость главная), но и от вида правой части (от вынужденного движения).

Форма вынужденного движения определяет точность системы управления, то есть, установившаяся ошибка в системе равняется $\varepsilon_{уст} = x_{вынужд}(t) - g(t)$, а полное значение ошибки в системе это просто $\varepsilon_{полн} = x(t) - g(t)$.

Процесс управления и требования к нему

В результате, с точки зрения протекания процесса управления, требования к системе управления задаются по следующим трём компонентам:

1) установившаяся ошибка – определяет точность системы, задаётся в установившемся режиме (после окончания переходного процесса);

2) устойчивость системы – качественный показатель, гарантирующий сходимость или затухание переходного процесса;

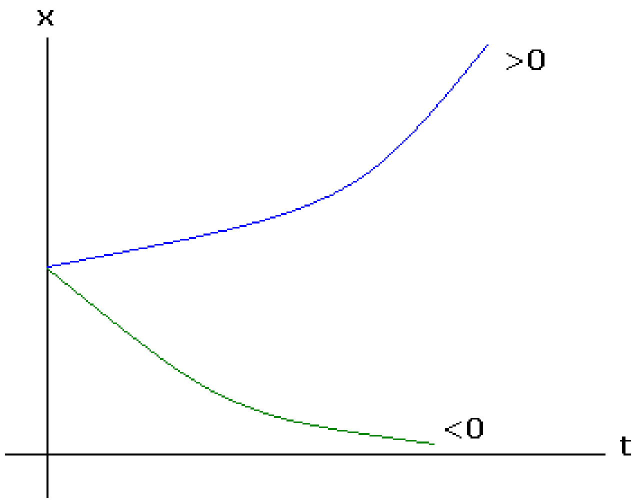
3) качество переходного процесса;

Устойчивость

Устойчивость – свойство работоспособности системы . С другой стороны, это требование затухания переходного процесса.

- Рассмотрим свойство устойчивости идеальных линейных систем (которых в природе не существует). Устойчивость идеальной линейной системы: $x_{соб}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

$$x_{собств}(t) = C_i e^{\lambda_i t}$$

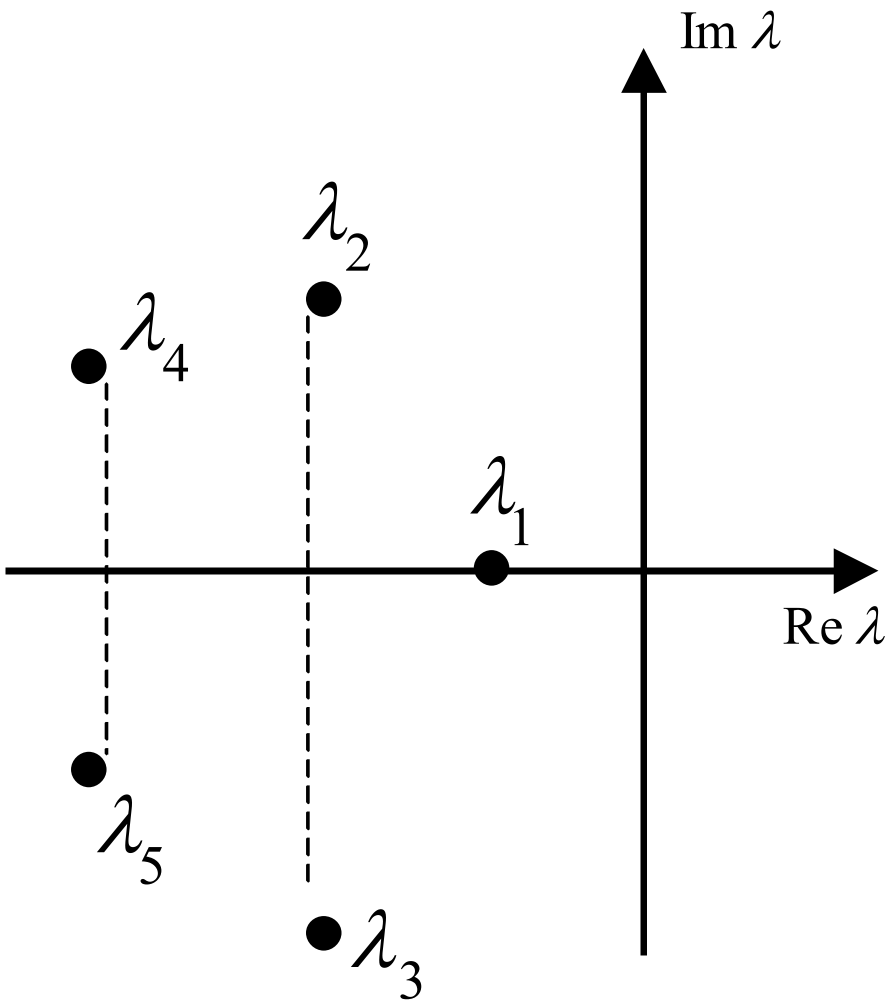


Условие устойчивости линейной системы заключатся в том, чтобы все корни характеристического полинома системы лежали бы в левой полуплоскости плоскости корней.

Система, имеющая пару чисто мнимых корней, находится на границе устойчивости и не относится ни к неустойчивым, ни к устойчивым. В таких системах возникают колебательные режимы с постоянной амплитудой и частотой;

$$\lambda_i = a \pm jb$$

$$Ce^{a+jb} + Ce^{a-jb} = Ce^{at} \sin(bt + \varphi)$$


Im λ
λ_2
λ_4
λ_1
Re λ
λ_5
λ_3