ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

1) Анализ

2) Синтез

Анализ – выявления и количественная оценка свойств поведения, а также объяснение свойств системы в целом через характеристики элементов.

Важнейшими свойствами объектов и систем управления являются: устойчивость, инвариантность к возмущениям, робастность (грубость, малая чувствительность).

Синтез – вид технического проектирования.

Состоит из:

- определения конфигурации системы;

- определение требований, которым должна удовлетворять система;

- определение параметров системы, с помощью которых можно обеспечить предъявляемые требования;

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Идеология синтеза:

1) определение цели управления;

2) выбор переменных, подлежащих управлению;

3) формулировка требований к этим переменным;

4) выбор конфигурации системы, выбор исполнительного механизма;

5) получение математических моделей объекта, исполнительного устройства, датчика, усилительно-преобразовательного устройства и чего-нибудь ещё;

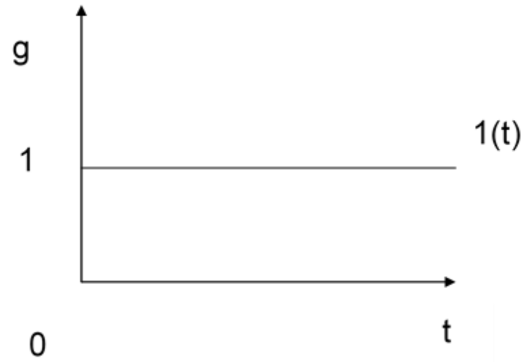
6) формирование регулятора (закона), определение параметров настройки;

7) оптимизация параметров, определение качества системы;

ТИПОВЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

1) ступенчатое воздействие - как наиболее тяжёлый режим работы (пуск двигателя);

$g(t)=1(t)$



реакция

2) Единичный импульс – бесконечно большое воздействие за бесконечно малый промежуток времени; $g(t)=\delta(t)$.

3) временные ряды – для следящих систем;

$g(t)=g_0+g_1t+g_2t^2+\ldots$

4) синусоидальное воздействие – для исследования частотных характеристик систем;

$g(t)=A\sin(\omega t+\phi_0)$.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТАУ ЛС

- Основной математический аппарат для описания – дифференциальные уравнения (ДУ), которые называются уравнениями динамики, так как описывают изменение входящих в них переменных во времени.
- Из уравнений динамики получаются уравнения статики, если принять все входящие в них производные равными нулю или некоторым постоянным значениям. Уравнения статики описывают поведение системы в установившемся режиме.

При описании ДУ систем сначала составляются ДУ отдельных звеньев, уравнения которых и составляют единую систему.

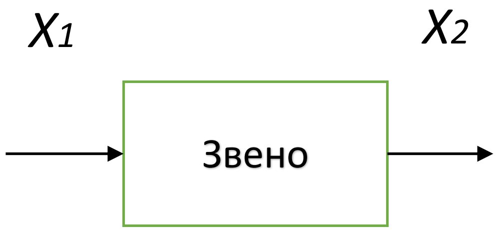
- В абсолютном большинстве случаев ДУ, описывающие поведение систем, являются нелинейными. Если для нелинейного уравнения реальной системы допустима линеаризация, то исследование систем проводится в классе линейных ДУ, что значительно упрощает расчёты.
- Признаками, достаточными для линеаризации являются:

1) отсутствие разрывов;

2) отсутствие резко меняющихся и неоднозначных характеристик;

3) единое описание на всём интервале времени управления;

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЗВЕНА (АС)



Пусть в общем случае нелинейное ДУ, описывающее систему, второго порядка и имеет такой вид:

$$F(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \ddot{x}_2) = 0 \qquad (1)$$

Линеаризация основана на том, что все переменные, описывающие систему, мало отклоняются от их программных значений.

Допустим, что установившиеся значения программных переменных x_1 и x_2 – константы (x_1^0 и x_2^0).

Тогда $x_1 = x_1^0 + \Delta x_1(t)$, где Δ - отклонение в процессе; $\dot{x}_1 = \Delta \dot{x}_1$

$x_2 = x_2^0 + \Delta x_2(t)$; $\dot{x}_2 = \Delta \dot{x}_2$; $\ddot{x}_2 = \Delta \ddot{x}_2$

Из уравнения (1) следует уравнение звена в установившемся режиме:

$$F(x_1^0, 0, x_2^0, 0, 0) = 0 \qquad (2)$$

Линеаризация основана на разложении левой части уравнения (1) в ряд Тейлора:

$$F^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)^0 \Delta \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \Delta \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2}\right)^0 \Delta \ddot{x}_2 + \ldots = 0 \quad (3)$$

вычитаем из уравнения (3) уравнения (2), отбрасываем старшие члены, как малые высшего порядка, и получа
звена:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)^0 \Delta \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)^0 \Delta \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_2}\right)^0 \Delta \ddot{x}_2 = 0$$

отбрасываем Δ и понимаем под x_1 и x_2 отклонения. Вводим обозначения:

$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0$ последовательно равно $b_0, b_2, -a_0, -a_1, -a_2$

в результате получаем линейное ДУ второго порядка:

$$b_0 x_1 + b_1 \dot{x}_1 = a_0 x_2 + a_1 \dot{x}_2 + a_2 \ddot{x}_2$$

$$b_0 x_1 = a_0 x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{b_0}{a_0} x_1$$

$\frac{b_0}{a_0} = k_1$ - коэффициент пропорциональности, $\left[\frac{размерность\_x_2}{размерность\_x_1}\right]$

Характеристики звеньев (АС, приведённых к виду звена)

§А - **передаточная функция (ПФ)**. Определение ПФ даётся на базе преобразования Лапласа. Запишем преобразование Лапласа для входной и выходной величин.

Выход: $$x_2(S) = L[x_2(t)] = \int_0^\infty x_2(t)e^{-St}dt$$

Вход: $$x_1(S) = L[x_1(t)] = \int_0^\infty x_1(t)e^{-St}dt$$, S-комплексная переменная

W(S)=$\frac{X_2\,(S)}{X_1(S)}$, при 0 н.у.

Основные положения операционного исчисления:

1) $af(t) \to aF(S)$;
2) $f_1(t) + f_2(t) \to F_1(S) + F_2(S)$ - сложение сигналов;
3) $f^{/}(t) \to SF(S) - f(0)^{нач.усл.}$ - первая производная;
4) $f^{//}(t) \to S^2F(S) - Sf^{/}(0) - f(0)$ - вторая производная;
5) $\int f(t)dt \to \dfrac{F(S)}{S} - нач.усл.$ - интеграл;
6) $\int\int f(t)d^2t \to \dfrac{F(S)}{S^2}$ – двойной интеграл;
7) $f(0) \to \lim_{s\to\infty} S \cdot F(S)$ - теорема о начальном значении
8) $f(\infty) \to \lim_{S\to 0} S \cdot F(S)$

Некоторые формулы операционного счисления

$f(t)$	$F(S)$
$1(t)$	$\frac{1}{S}$
t	$\frac{1}{S^2}$
t^n	$\frac{n!}{S^{n+1}}$
$\delta(t)$	1
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{S^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{S+a}$

Передаточная функция

Рассмотрим ту же систему второго порядка.

Пусть заданы начальные условия

$$x_2(0) = x_{20}\ ; \quad x_1(0) = x_{10}\ ; \quad \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{t=0} = \dot{x}_{20}\ ;$$

Применим преобразование Лапласа к нашим переменным:

$$L\left[\frac{dx_2}{dt}\right] = Sx_2(S) - x_{20}$$

$$L\left[\frac{d^2x_2}{dt^2}\right] = S^2x_2(S) - Sx_{20} - \dot{x}_{20}$$

$$L\left[\frac{dx_1}{dt}\right] = Sx_1(S) - x_{10}$$

Тогда применение преобразования Лапласа к исходному ДУ второго порядка при нулевых Н.У.:

$$b_0 x_1 + b_1 \dot{x}_1 = a_0 x_2 + a_1 \dot{x}_2 + a_2 \ddot{x}_2$$

$$b_0 x_1(S) + b_1 S x_1(S) = a_0 x_2(S) + a_1 S x_2(s) + a_2 S^2 x_2(S)$$

$$x_1(S)(b_0 + b_1 S) = x_2(S)(a_0 + a_1 S + a_2 S^2)$$

$$W(S) = \frac{x_2(S)}{x_1(S)} = \frac{b_0 + b_1 S}{a_0 + a_1 S + a_2 S^2} = \frac{k_1(\tau_1 S + 1)}{T^2 S^2 + T_1 S + 1}$$

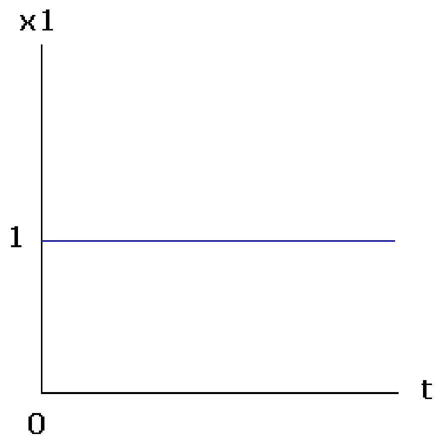
физический смысл: всё, что стоит при S , называются постоянными времени, так как определяют динамику процесса, а К1 - статический коэффициент усиления или передачи.

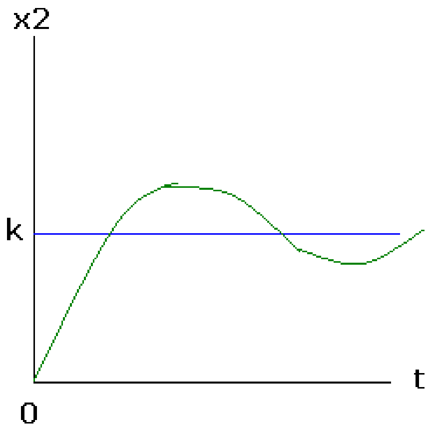
Знаменатель передаточной функции называется характеристическим полиномом. Приравняв его к нулю, получаем характеристическое уравнение. Корни характеристического уравнения – полюса (отвечают за поведение системы). Корни числителя (входа) называются нулями

Передаточная функция в общем виде: $$W(S)=\frac{k_1 N(S)}{L(S)}$$

где L(S), N(S) – многочлены с коэффициентом в младших членах;
Причем степень N(S) как правило меньше L(S) .

§B **Переходная функция** – это реакция звена на единичную входную ступеньку.





$$W(S) = \frac{k\,N(S)}{L(S)} = \frac{x_2(S)}{x_1(S)}$$

Переходной функцией h(t) (x_2(t)) называется реакция звена на единичное ступенчатое воздействие, т.е. переходной процесс на выходе x_2(t) при x_1(t)=1(t).
Следовательно, здесь имеем:

$$X_1(S) = L\left[1(t)\right] = \frac{1}{S}$$

$$X_2(S) = W(S)X_1(S) \Rightarrow$$

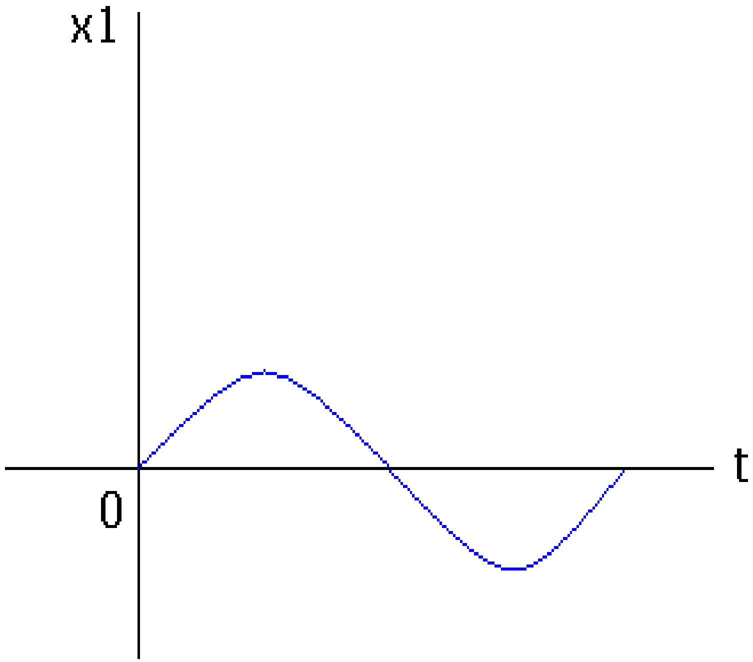
$$X_2(t) = h(\mathrm{t}) = L^{-1}\left[X_2(S)\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{S}W(S)\right]$$

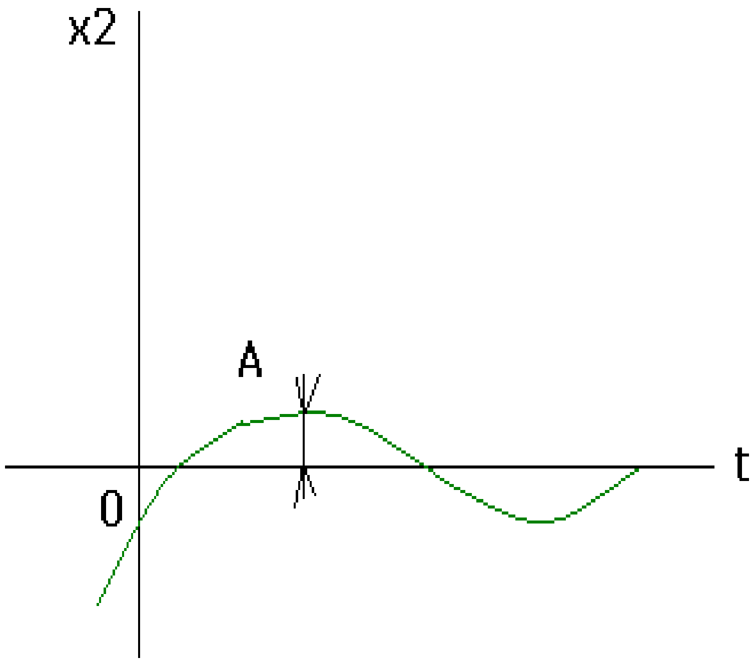
§С **Импульсная переходная функция (ИПФ)** - реакция на единичный импульс. Единичный импульс – бесконечно большое воздействие в течение бесконечно малого времени. Импульсной переходной функцией $\omega(t)$ называется оригинал, т.е. обратное преобразование Лапласа от передаточной функции:

$$\delta(t)=\frac{d1(t)}{dt}$$

$$\omega(t)=\frac{dh(t)}{dt}-\text{связь с переходной функцией}\Rightarrow\omega(t)=L^{-1}[W(S)]$$

§D **Амплитудно-частотная характеристика (АПЧХ)** – это реакция звена или системы на синусоидальное входное воздействие.





$$x_1 = \sin \omega t$$

$$x_2 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

А- усиление амплитуды
φ – фаза, точнее сдвиг фазы.

При исследовании частотных характеристик используется символическая запись синусоидальных колебаний:

$$x_1 = e^{j\omega t} = j \sin \omega t + \cos \omega t$$

Поэтому, для суждения о вынужденных синусоидальных колебаниях достаточно формально исследовать реакцию звена на синусоидальный символический сигнал $x_1 = e^{j\omega t}$.

$$W(S) = \frac{k\ (\tau S + 1)}{T_2^2 S^2 + T_1 S + 1} = \frac{x_2(S)}{x_1(S)}$$

$$x_1 = e^{j\omega t}$$

$$x_2 = Ae^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$S = \frac{d}{dt}$$

$$Sx_1 = j\omega e^{j\omega t}$$

$$Sx_2 = j\omega Ae^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$S^2 x_2 = (j\omega)^2 Ae^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$W(j\omega) = \frac{k\ (\tau(j\omega) + 1)}{T_2^2 (j\omega)^2 + T_1(j\omega) + 1} = Ae^{j\phi}$$

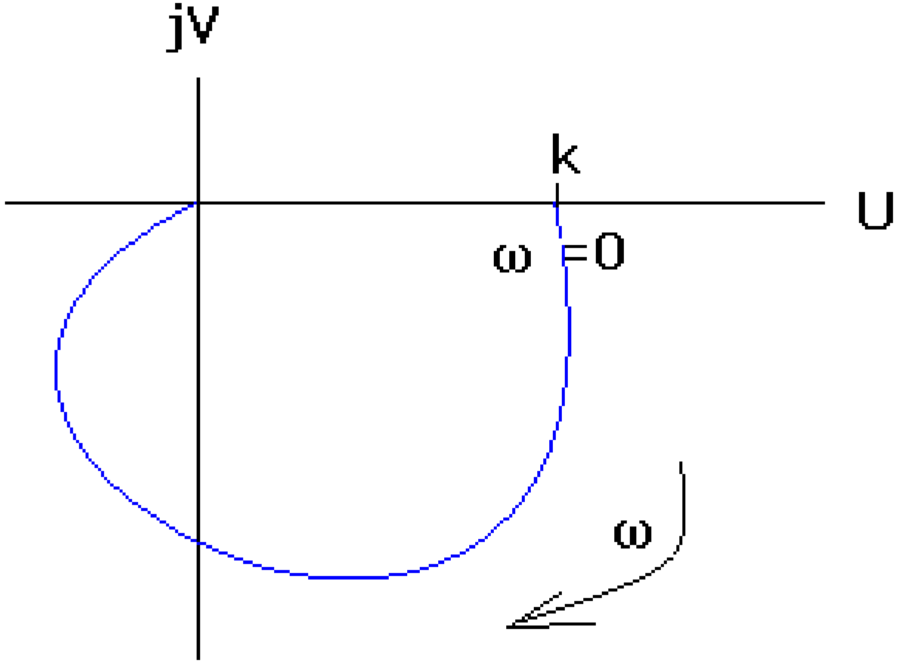
сравнивая с ПФ, видим, что $W(j\omega)=W(S)_{s=jw}$

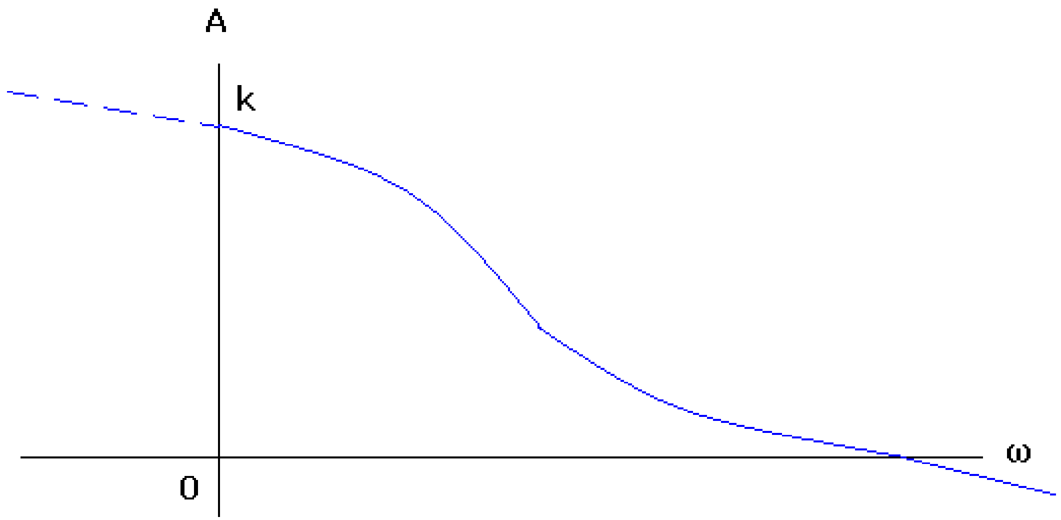
Таким образом, A - АЧХ, $j\varphi$ - ФЧХ. Для их нахождения частотно-передаточная функция $W(j\omega)$ представляется в виде: $W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)$ и тогда:

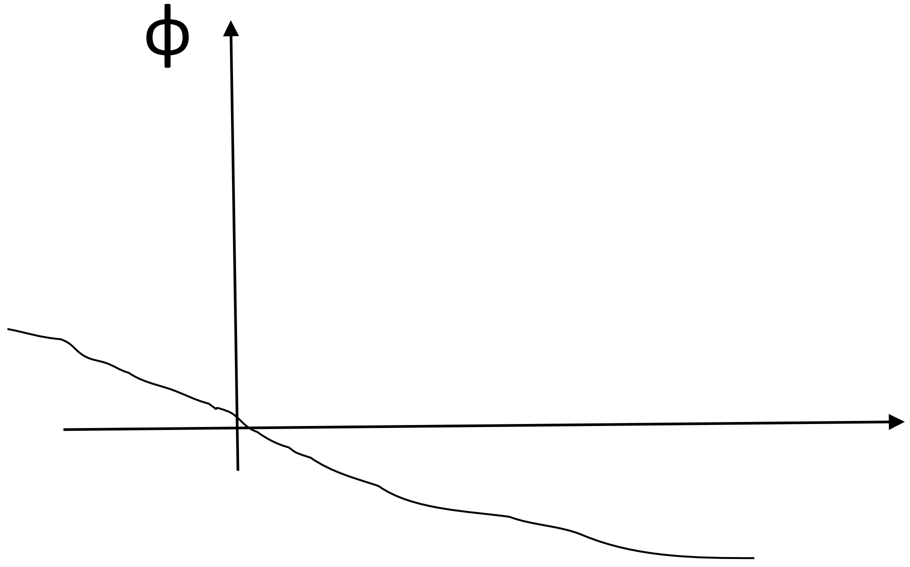
$$A(\omega)=\left|W(j\omega)\right|=\sqrt{U^2+V^2}$$

и потом: $\varphi(\omega)=arctg\dfrac{V}{U}$

Совокупность АЧХ и ФЧХ – АФЧХ. Она изображается графически:




A
k
ω
0


ϕ

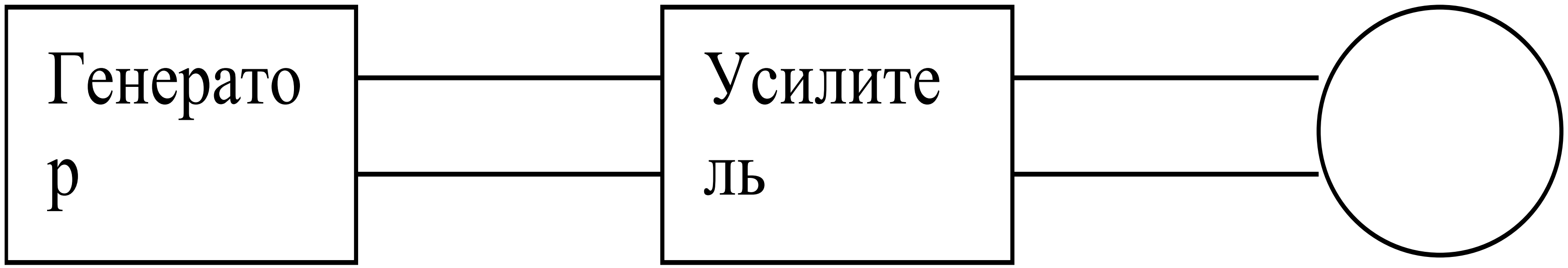
Чтобы получить АФЧХ звена или системы, надо:

1) в передаточную функцию вместо S подставить $j\omega$;

2) выделить действительную и мнимую части (U и V) – домножение и деление на комплексно-сопряжённое число;

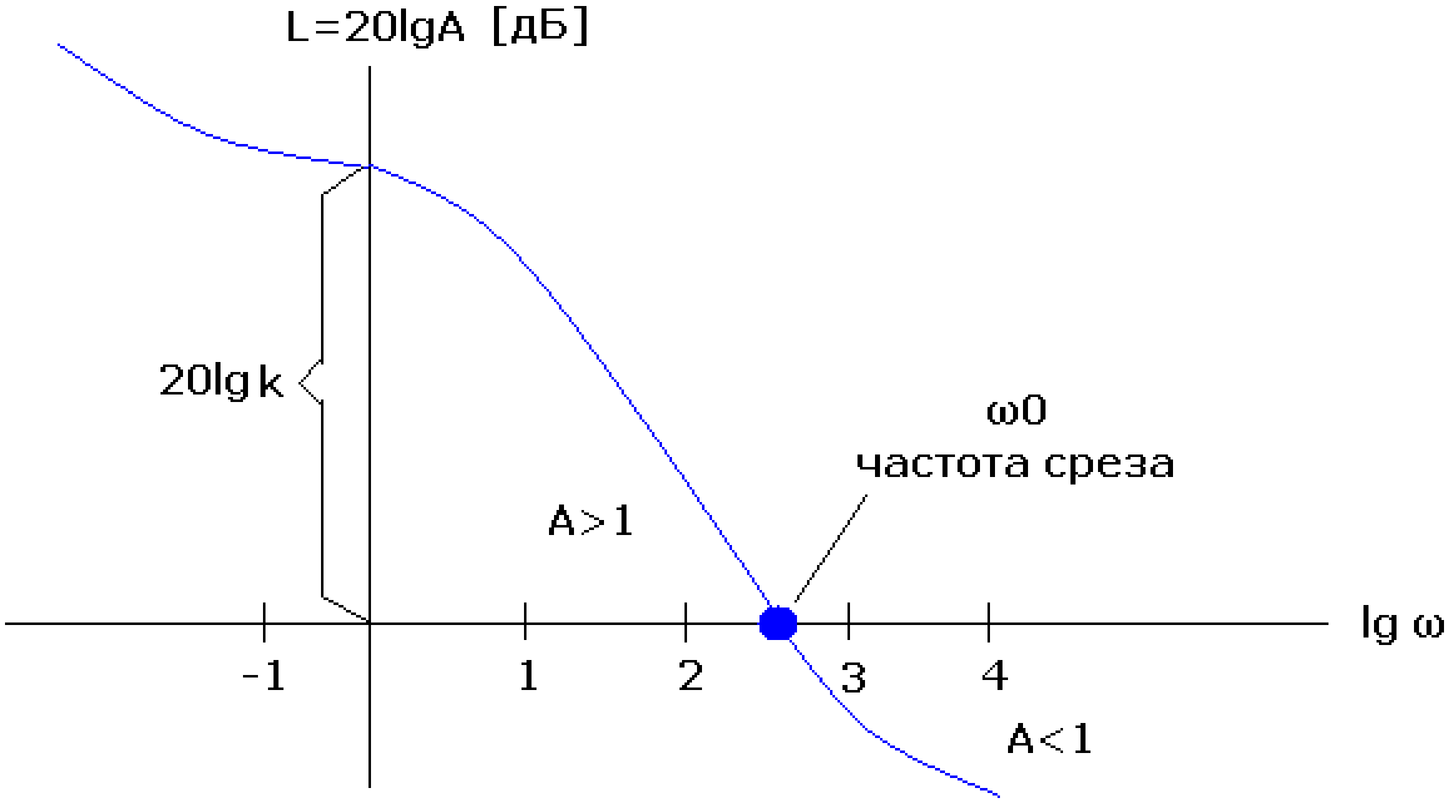
3) воспользоваться формулой $A = \sqrt{U^2 + V^2}$ и $\varphi = arctg\frac{V}{U}$

Практическое снятие характеристики:



§E Логарифмические АФЧХ

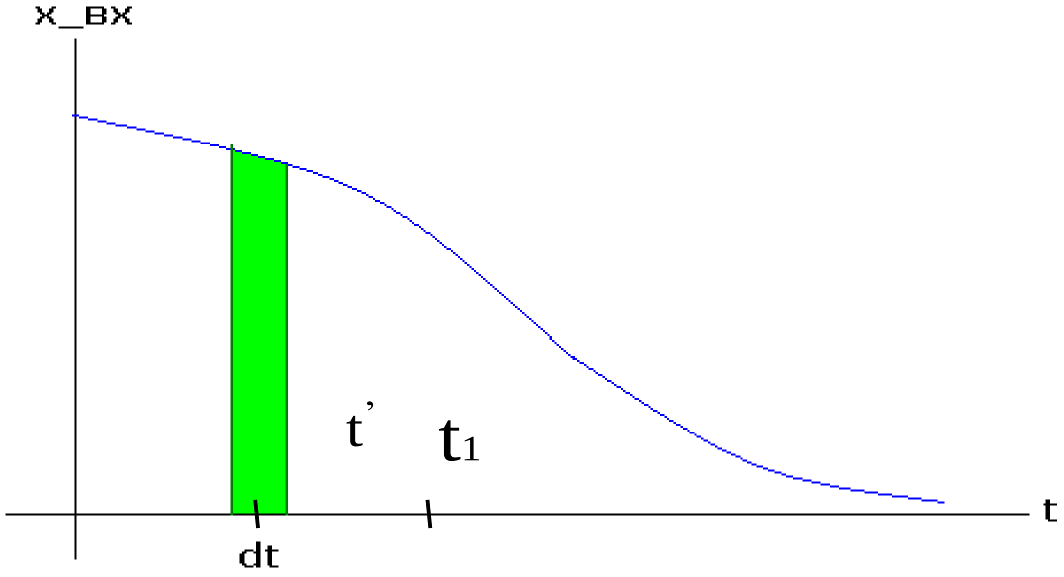
В практических случаях характеристики обычно изображают в логарифмическом масштабе.



Декада – десятикратное изменение частоты.

§F Реакция на произвольный входной сигнал

Реакция системы на произвольный входной сигнал $x_{вх}(t)$ выражается через ИПФ и сам этот входной сигнал.



$$x_{вх}(t')dt\delta(t-t')$$

Так как рассматриваются стационарные системы (с постоянными параметрами), ИПФ в любой момент времени у этой системы не меняется. Рассмотрим реакцию системы в произвольный момент времени t_1 $(t_1>t')$ - это означает, что на вход последовательно поступает серия импульсов $x_{вх}(t')dt\delta(t-t')$ от момента времени 0 до t_1. Для линейных систем применим принцип суперпозиций – влияние нескольких одновременно действующих входных сигналов можно анализировать отдельно, а сумма полученных таким образом результатов совпадает с результатом, получающимся при учёте одновременного действия всех входных сигналов.

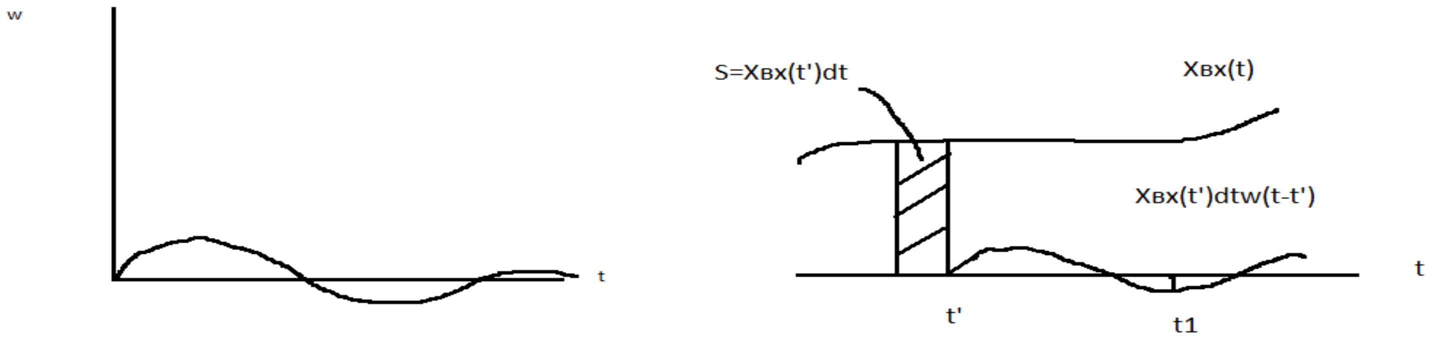


Рис. Реакция на выходе в момент t1 как сумма реакций на импульсы в интервале $0 \le t' \le t_1$.

Общий сигнал на выходе в момент времени t_1 равен сумме выходных сигналов в момент времени t_1, возбуждаемых импульсами величиной $x_{вх}(t)dt$ во всём интервале времени от 0 до t_1, то есть $x_{вых}(t_1) = \sum x_{вх}(t)dt\omega(t_1 - t) = \int\limits_0^{t_1} x_{вх}(t)\omega(t_1 - t)dt$.

Эта формула называется формулой свертки двух функций.
Т.о. для вычисления реакции системы на входной сигнал любого вида достаточно знать ИПФ системы.