*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования*

 *«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»*

*(МГТУ им. Н.Э. Баумана)*

 УТВЕРЖДАЮ

 Заведующий кафедрой ИУ6

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_А.В. Пролетарский

 «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2019 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**к практичеcким занятиям по дисциплине**

**«Надёжность и качество аппаратно-программных**

**комплексов»**

Автор:Можаров Г.П.

Факультет – ИУ (каф. ИУ6)

Кафедра ИУ6 − «Компьютерные системы и сети»

Москва

2019

**Семинар № 3**

**Расчёт показателей надёжности нерезервированных**

**восстанавливаемых ВС** (2 ч)

**Цель семинара** – помочь студентам хорошо понять теорию надежности нерезервированных и восстанавливаемых ВС и полу­чить навыки решения практических задач по расчёту показателей надёжности.

**Теоретическая часть**

Критериями надежности нерезервированных восстанавливаемых систем яв­ляются:

•  − функция готовности (вероятность того, что система готова к ра­боте в произвольный момент времени );

•  − коэффициент готовности (финальная вероятность того, что система исправна в произвольный момент времени );

•  − наработка на отказ (среднее время между отказами);

•  − среднее время восстановления системы;

•  − параметр потока отказов.

Между этими показателями существуют следующие зависимости:

,

.

Показатели надежности восстанавливаемых и невосстанавливаемых систем связаны между собой следующим интегральным уравнением:

,

где  − плотность распределения времени до отказа невосстанавливаемой системы.

Решение этого интегрального уравнения не позволяет получить в явном виде зависимость функции готовности от таких показателей надежности системы, как вероятность безотказной работы, интенсивность отказов, наработка на отказ, среднее время восстановления и др.

Простых расчётных соотношений в виде формул для определения функции готовности не существует даже для простейших случаев. Рассмотрим этот вопрос более подробно на примере системы как одного элемента.

**Надёжность восстанавливаемой системы как одного элемента.** Пусть  − плотность распределения времени до отказа,  − вероятность безотказной работы,  − математическое ожидание времени до отказа,  − плотность распределения времени восстановления системы,  − математическое ожидание времени восстановления.

Основная сложность расчёта показателей надежности состоит в вычислении функции готовности .

Из теории известно [5, гл. 2], что функция готовности удовлетворяет интегральному уравнению:

. (3.1)

Решением уравнения (3.1) является функция

. (3.2)

Функция  представлена в аналитическом виде, но в общем случае непригодна для инженерных расчётов. Рассмотрим частные случаи, допускающие аналитическое или численное решение уравнения (3.1).

**Постоянные интенсивности отказа и восстановления.** Пусть  − интенсивность отказа, а  − интенсивность восстановления системы. Тогда

. (3.3)

Это следует из решения системы дифференциальных уравнений, а также из формулы (3.1).

**Нормальные законы распределения времени до отказа и времени восстановления.**

Пусть время до отказа и время восстановления имеют нормальные распреде­ления с параметрами соответственно  и ,  и .

Члены ряда (3.2) представим в виде разности двух функций распределения:

.

Так как  − плотность нормального распределения с параметрами  и , a  − плотность нормального распределения с параметрами  и , то  − функция нормального распределения с параметрами  и . Аналогично  − функция нормального распределения с параметрами  и . Тогда:

,

где  − функции Лапласа.

На основании (3.2), получим следующую формулу для коэффициента готов­ности:

.

**Произвольные интенсивности отказа и восстановления**

Самый простой способ решения интегрального уравнения (3.1) для случая разных интенсивностей отказов и восстановлений элементов состоит в ис­пользовании численных методов. По определению свёртки из (3.1) получим:

.

Для вычисления интеграла применим формулу трапеций:

, , (3.4)

где  − шаг интегрирования;  − требуемое количество значений функции готовности.

Выбор формулы трапеций связан с тем, что на каждом шаге значение  зависит только от значений, вычисленных на предыдущих шагах. Точность вычислений обеспечивается надлежащим выбором шага интегрирования.

Пусть время восстановления системы постоянное, т. е. . Тогда

.

Аналогично можно получить формулы свёртки, а значит, и алгоритм вычис­ления  для некоторых других распределений времени до отказа и вос­становления. Но в общем случае рассчитывать значения функции  приходится на основе численных методов с применением квадратурных формул Симпсона, Котеса и др. Если плотности распределения являются непре­рывными функциями и время восстановления системы невелико по сравне­нию со временем её работы, то можно применить формулу Гаусса. Для функ­ции  формула Гаусса с  узлами имеет вид:

,

где  и  − соответственно веса и узлы квадратурной формулы Гаусса. В **табл. 3.1** приведены веса и узлы для случая .

**Таблица 3.1. Веса и узлы формулы Гаусса**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *i* | *сi* | *xi* |
| 1 | 0,129484966168870 | -0,949107912342759 |
| 2 | 0,279705391489277 | -0,741531185599394 |
| 3 | 0,381830050505119 | -0,405845151377397 |
| 4 | 0,417959183673469 | 0,000000000000000 |
| 5 | 0,381830050505119 | 0,405845151377397 |
| 6 | 0,279705391489277 | 0,741531185599394 |
| 7 | 0,129484966168870 | 0,949107912342759 |

**Показатели надежности восстанавливаемой системы, состоящей из элементов.** Схема расчёта надёжности системы очевидна. Она представляет собой по­следовательное, в смысле надёжности, соединение элементов.

Приведём расчётные соотношения для показателей надежности системы, со­стоящей из  элементов. Стационарные показатели надёжности восстанавли­ваемой системы выражаются через среднее время безотказной работы и среднее время восстановления элементов [5, гл. 7]. При этом наработка на отказ , среднее время восстановления  и коэффициент готовности  системы определяются по формулам:

, , . (3.5)

В большинстве практических случаев при расчётах показателей надёжности невосстанавливаемых и восстанавливаемых систем известными являются ин­тенсивности отказов  и интенсивности восстановления , элементов, . Тогда формулы для показателей надёжности имеют вид:

, , , .

Для функции готовности системы простые расчетные соотношения отсутст­вуют. Рассмотрим способы и алгоритмы вычисления .

**Экспоненциальный закон распределения времени до отказа**

**и времени восстановления элементов**

Математической моделью функционирования системы является система обыкновенных дифференциальных уравнений:

 (3.6)

где:

•  − интенсивность отказа -го элемента;

•  − интенсивность отказа системы;

•  − интенсивность восстановления -го элемента;

•  − вероятность того, что в момент  система исправна;

•  − вероятность того, что в момент  система находится в неисправ­ном состоянии вследствие отказа -го элемента.

Систему (3.6) линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно решить двумя способами: аналитическим и численным. Однако получить решение в виде формулы для произвольного  можно лишь для случая ограниченного числа элементов или при фиксированных значени­ях интенсивностей их отказа и восстановления.

Существуют приближенные методы, позволяющие получить решение в ана­литическом виде. Однако при этом возникают проблемы с оценкой погреш­ностей результатов вычисления показателей надёжности.

Проще всего решить систему (3.6) численным методом, например, методом Рунге-Кутта.

**Экспоненциальный закон распределения времени до отказа**

**и произвольный закон времени восстановления элементов**

 Если время безотказной работы -го элемента имеет экспоненциальный закон распределения с параметром , то из системы интегральных уравнений следует, что функция готовности удовлетворяет интегральному уравнению:

, (3.7)

где  − плотность распределения времени восстановления системы; − плотность распределения времени восстановления -го элемента.

Согласно (3.7) функционирование нерезервированной системы с постоянны­ми интенсивностями отказов с позиций надёжности эквивалентно функционированию системы, имеющей интенсивность отказов  и закон распределения времени восстановления . Плотность  представляет собой среднее взвешенное плотностей распределения времени восстановления элементов.

Пусть интенсивность восстановления -го элемента постоянна и равна .

Тогда , и функция готовности нерезервированной систе­мы с любым числом элементов совпадает с функцией готовности одного эле­мента, имеющего гиперэкспоненциальную плотность распределения времени восстановления. Способ нахождения  в этом случае был описан ранее в разд. "Надёжность восстанавливаемой системы как одного элемента". Применение численного метода связано с определением свёртки функций  и . В предположении, что , получим:

. (3.8)

Пусть время восстановления элементов системы постоянное, т. е. , . Тогда , и, значит,

 (3.9)

Аналогично можно получить формулы свёртки, а следовательно, и алгоритм вычисления  для некоторых других распределений времени восстанов­ления.

**Произвольные законы распределения времени до отказа**

**и времени восстановления элементов**

В общем случае функция готовности нерезервированной системы, состоящей из  элементов, имеет вид:

, (3.10)

где:

•  − плотность распределения времени безотказной работы;

•  − вероятность безотказной работы -го элемента;

•  − плотность распределения времени восстановления -го элемента, .

Формула (3.10) не годится для вычислений. Однако на её основе для ряда распределений могут быть получены конечные выражения. Предположим, что время восстановления элементов постоянное . Тогда

,

причём слагаемое, соответствующее набору , обращается в нуль, если .

Рассмотрим два частных случая.

**Случай 1.** Время безотказной работы -го элемента имеет нормальное рас­пределение вероятностей с параметрами  и . Тогда

,

где  − функция Лапласа. В результате из (3.11) получим следующую формулу для функции готовности системы:

. (3.12)

**Случай 2.** Время безотказной работы -го элемента имеет гамма-распределение вероятностей с параметрами  и . Тогда

,

, (3.13)

где  − неполная гамма-функция.

Несмотря на то, что (3.12) и (3.13) выражаются многократными рядами, сла­гаемые в них являются совсем несложными для разработки быстро работаю­щего алгоритма.

Существенным недостатком полученных выражений является, во-первых, отсутствие общности законов распределения и, во-вторых, возможность ис­пользования этих формул только для систем с числом элементов, не превы­шающих нескольких десятков.

Функция готовности нерезервированной системы с большим числом элемен­тов, подчинённых не экспоненциальным законам распределения времени до отказа, может быть получена только приближённо в соответствии с фор­мулой:

, (3.14)

где  − функция простоя, a  − функция готовности -го элемен­та.

**Примеры решения типовых задач**

**Пример 3.1.** Нерезервированная система состоит из 8 элементов. Интен­сивности их отказов приведены в **табл. 3.2.**

**Таблица 3.2. Интенсивности отказов элементов**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номерэлемента | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| , час-1 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0009 | 0,0006 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0005 | 0,0007 |

Интенсивности восстановления элементов одинаковы и равны  час-1. Требуется определить показатели надежности системы.

**Решение.** Вычислим интенсивность отказа системы:

= 0,0003 + 0,0002 + 0,0009 + 0,0006 + 0,0004 + 0,0003 + 0,0005 + 0,0007 =

= 0,0039.

Тогда наработка на отказ, среднее время восстановления и коэффициент го­товности равны соответственно:

 час,

 час,

.

Поскольку интенсивности восстановления элементов одинаковы, то систему можно рассматривать как один элемент с интенсивностью отказов  и ин­тенсивностью восстановления . Согласно (3.3) получим:



Табулируя функцию от 0 до 40 часов с шагом 2 часа, получим значения, при­ведённые в **табл. 3.3.**

**Таблица 3.3. Функция готовности системы**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t*, час | KГ(*t*) | *t*, час | KГ(*t*) | *t*, час | KГ(*t*) |
| 0 | 1 | 14 | 0,990378 | 28 | 0,990344 |
| 2 | 0,994649 | 16 | 0,990359 | 30 . | 0,990344 |
| 4 | 0,992263 | 18 | 0,990351 | 32 | 0,990344 |
| 6 | 0,9912 | 20 | 0,990347 | 34 | 0,990344 |
| 8 | 0,990726 | 22 | 0,990345 | 36 | 0,990344 |
| 10 | 0,990514 | 24 | 0,990345 | 38 | 0,990344 |
| 12 | 0,99042 | 26 | 0,990344 | 40 | 0,990344 |

**Пример 3.2.** Нерезервированная система состоит из 8 элементов. Их интен­сивности отказов те же, что и в **табл. 3.2**. Интенсивности восстановления раз­личны и приведены в **табл. 3.4**.

**Таблица 3.4. Значения интенсивностей восстановления элементов**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер элемента | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ,час-1 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,9 | 0,7 | 0,6 | 0,8 |

Требуется определить показатели надёжности системы.

**Решение.** По формулам (3.5) находим стационарные показатели надёжности:

, , .

Как и в предыдущем примере, интенсивность отказа системы % = 0,0039 час-1. Вычислим сумму



Тогда

 час,  час, .

**Пример 3.4.** Нерезервированная система состоит из трёх элементов с теми же законами распределения времени до отказа, что и в **примере 3.3**. Однако время восстановления каждого элемента предполагается не случайным, а по­стоянным и равно соответственно:  ч,  ч,  ч. Они взяты такими же, что и математические ожидания времени восстановле­ния элементов. Требуется определить показатели надёжности системы.

**Решение.** Так как стационарные показатели надёжности не зависят от зако­лов распределения, а зависят лишь от средних значений, то согласно форму­лам (3.5) они совпадают с аналогичными показателями примера 3.3:

 ч,  ч, .

Вычислим функцию готовности элементов и системы. Поскольку время восстановления элементов постоянно, то выражение для свёртки функций имеет вид:

 при .

функцию готовности элементов определим по формуле (3.4), а функцию го­товности системы − по формуле (3.14). Результаты расчётов приведены в **табл. 3.5**.

**Таблица 3.5. Функция готовности системы и её элементов**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| , час |  |  |  |  |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 25 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9996 |
| 50 | 0,9996 | 0,9984 | 0,9994 | 0,9974 |
| 75 | 0,9990 | 0,9918 | 0,9987 | 0,9895 |
| 100 | 0,9983 | 0,9791 | 0,9978 | 0,9754 |
| 125 | 0,9978 | 0,9732 | 0,9969 | 0,9681 |
| 150 | 0,9975 | 0,9816 | 0,9961 | 0,9754 |
| 175 | 0,9973 | 0,9894 | 0,9957 | 0,9826 |
| 200 | 0,9974 | 0,9878 | 0,9956 | 0,9809 |
| 225 | 0,9974 | 0,9823 | 0,9958 | 0,9758 |
| 250 | 0,9975 | 0,9800 | 0,9962 | 0,9739 |
| 275 | 0,9975 | 0,9823 | 0,9964 | 0,9765 |
| 300 | 0,9975 | 0,9852 | 0,9965 | 0,9794 |
| 325 | 0,9975 | 0,9852 | 0,9965 | 0,9794 |
| 350 | 0,9975 | 0,9834 | 0,9964 | 0,9775 |
| 375 | 0,9975 | 0,9823 | 0,9963 | 0,9763 |
| 400 | 0,9975 | 0,9829 | 0,9962 | 0,9768 |
| 425 | 0,9975 | 0,9839 | 0,9962 | 0,9778 |
| 450 | 0,9975 | 0,9841 | 0,9962 | 0,9781 |
| 475 | 0,9975 | 0,9836 | 0,9963 | 0,9776 |
| 500 | 0,9975 | 0,9831 | 0,9963 | 0,9771 |
| 525 | 0,9975 | 0,9832 | 0,9963 | 0,9772 |
| 550 | 0,9975 | 0,9836 | 0,9963 | 0,9776 |
| 575 | 0,9975 | 0,9837 | 0,9963 | 0,9777 |
| 600 | 0,9975 | 0,9835 | 0,9963 | 0,9775 |

Значения функций готовности почти не изменились по сравнению с анало­гичными значениями для экспоненциального закона распределения времени восстановления. Это говорит о том, что в случае элементов с быстрым вос­становлением функция готовности слабо зависит от законов распределения.

**Упражнения для самостоятельной работы**

**Задача 3.1.** Нерезервированная восстанавливаемая система состоит из  элементов. Среднее время восстановления элементов − величина по­стоянная и равна  час-1. Значения интенсивностей отказов элементов приведены в **табл. 3.6**.

**Таблица 3.6. Интенсивности отказов элементов**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № элемента | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| , час-1 | 0,5 | 0,55 | 0,47 | 0,58 | 0,5 | 0,47 | 0,6 | 0,52 | 0,52 | 0,5 |

Определить коэффициент готовности системы по точной и приближенной формулам. Вычисления выполнить при значениях , приведённых в табл. 3.6, уменьшенных в 10 и в 100 раз. По результатам расчётов сделать выводы о возможности использования приближенной формулы для оценки коэффициента готовности системы.

Приближенная формула имеет вид , т. е. коэффициент готовности системы равен произведению коэффициентов готовности её элементов.

**Задача 3.2.** Нерезервированная восстанавливаемая система имеет интен­сивность отказа ч-1, среднее время восстановления  час. Необходимо определить время работы , при котором функция готовности будет равна: 0,997; 0,99; 0,95; 0,9; 0,85.

***Указание***: воспользуйтесь формулой функции готовности, подставьте в неё исходные данные и определите корни трансцендентного уравнения.

**Задача 3.3.** Техническая система представляет собой основное соединение двух подсистем. Первая подсистема является восстанавливаемой, а вторая − не восстанавливаемой. Интенсивности отказов и восстановлений подсистем ^соответственно равны:  ч-1,  ч-1,  ч-1. Опреде­лить показатели надежности системы с частичным восстановлением: , , , , . Получить аналитические и численные выражения для всех показателей на­дежности.

**Семинар № 4**

**Расчёт показателей надёжности резервированных**

**восстанавливаемых ВС** (2 ч)

**Цель семинара** – помочь студентам хорошо понять теорию надежности резервированных и восстанавливаемых ВС и полу­чить навыки решения практических задач по расчёту показателей надёжности.

**Теоретическая часть**

**Методы расчёта надежности систем при экспоненциальных законах**

**распределения отказов и восстановлений**

Предположим, что функционирование системы описывается графом, изобра­жённым на **рис. 4.1**.



**Рис. 4.1. Граф состояний системы**

На рисунке приняты следующие обозначения:

•  − интенсивности переходов, соответствующие отказам элементов системы;

•  − интенсивности переходов, соответствующие восстановлениям элементов системы;

•  − общее число состояний.

Состояния с номерами  являются исправными, а состояние к номером  − отказовым.

Коэффициент готовности, наработка на отказ, среднее время восстановления «(.среднее время безотказной работы вычисляются по формулам:

, , , (4.1)

, (4.2)

где , .

Если все элементы системы идентичны по надежности и ремонтопригодно­сти, то графом **рис. 4.1** описывается функционирование систем с постоянно включённым резервом и резервом замещением, мажоритарные системы и системы со скользящим резервом, обслуживаемые любым количеством ре­монтных бригад.

Пусть  − интенсивность отказа, а  − интенсивность восстановления каждого элемента системы. В зависимости от условий функционирования и обслуживания системы интенсивности переходов  и  принимают раз­личные значения. Значения  содержатся в **табл. 4.1**.

**Таблица 4.1. Интенсивности отказов**

|  |  |
| --- | --- |
| Вид резервирования |  |
| Постоянное (1 основной,  резервных элементов) | ,  |
| Замещением (1 основной,  резервных элементов) | ,  |
| Мажоритарное  основных,  резервных элементов) | ,  |
| Скользящее  основных,  резервных элементов) | ,  |

Интенсивности восстановления, вычисляются по формуле:

 (4.3)

где  − число ремонтных бригад.

Приведём частные случаи резервированных систем, показатели надежности которых вычисляются по соотношениям (4.1):

□ Система с постоянно включённым резервом

Структурная схема резервированной системы с кратностью  приведена на **рис. 4.2**.

В этом случае для полностью ограниченного восстановления (одна обслу­живающая бригада) показатели надёжности вычисляются по формулам:

, , , (4.4)

где .



**Рис. 4.2. Структурная схема резервированной системы (постоянно включённый резерв)**

Для неограниченного восстановления (число бригад обслуживания равно  справедливы формулы:

 , , , (4.5)

***Система с резервом замещением***

Структурная схема системы кратности  приведена на **рис. 4.3**.



**Рис. 4.3. Структурная схема резервированной системы (резерв замещением)**

В случае полностью ограниченного восстановления, показатели надёжно­сти определяются так:

, , , (4.6)

а в случае неограниченного восстановления:

, , . (4.7)

Нестационарные показатели надёжности, такие как вероятность безотказной работы или функция готовности, определяются путём составления и решения систем дифференциальных уравнений.

**Примеры решения типовых задач**

**Пример 4.1.** Дана резервированная система с постоянно включённым резервом кратности  = 5 . Интенсивности отказов и восстановлений являются величинами постоянными:  = 0,3 ч-1,  = 2 ч-1. Определить зависимость коэффициента готовности, наработки на отказ, среднего времени восстановления и среднего времени безотказной работы системы от числа обслуживающих бригад  = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

**Решение.** Для постоянного резерва, согласно **табл. 4.1**, находим:

 = 6 = 1,8 ч-1, 2 = 5= 1,5 ч-1, 3 = 4= 1,2 ч-1,

 4 = 3 = 0,9 ч-1, 5 = 2 = 0,6 ч-1, 6 =  = 0,3 ч-1.

По формуле (4.3) при  = 1 находим 1, = 2 = 3 = 4 = 5 =6 = 2 час-1. Тогда

 1 = 0,9 , 2 = 0,75 , 3 = 0,6 , 4 = 0,45 , 5= 0,3, 6 = 0,15.

Для расчёта среднего времени безотказной работы необходимо знать величины обратные . В нашем примере они имеют значения:

 1 = 1,111, 2 = 1,333, 3 =1,667, 4 = 2,222, 5 = 3,333, 6 = 6,667.

Показатели надежности, вычисленные по формулам (4.1) и (4.2) для одной ремонтной бригады , приведены в первой строке **табл. 4.2**. Аналогич­ное расчёты выполнены и для всех остальных значений . Результаты расчётов приведены в **табл. 4.3**.

**Таблица 4.2. Показатели надежности системы**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1 | 0,997457 | 196,1 | 0,5 | 238,4 |
| 2 | 0,999892 | 2306,9 | 0,25 | 2512,8 |
| 3 | 0,999978 | 7625,1 | 0,17 | 8051,7 |
| 4 | 0,999991 | 13538,4 | 0,13 | 14091,4 |
| 5 | 0,999994 | 16922,2 | 0,1 | 17475,2 |
| 6 | 0,999995 | 16922,2 | 0,08 | 17475,2 |

Из таблицы видно, что показатели надёжности сильно зависят от числа ремонтных бригад. Так, например, при трёх и более ремонтных бригадах , т. е. система является практически абсолютно надёжной. Значительно увеличиваются также наработка на отказ и среднее время безотказной работы.

Отметим следующую особенность системы при общем постоянном резерви­ровании: наработка на отказ для случая шести ремонтных бригад такая же, как и для пяти ремонтных бригад. Для экспоненциальных распределений это свойство имеет место в общем случае, когда ремонтных бригад . Наработка на отказ системы одинакова при  и  ремонтных бригадах. Это свойство справедливо также для среднего времени безотказной работы системы

**Пример 4.2.** Восстанавливаемая резервированная система (резерв замещением кратности  состоит из одинаковых по надёжности элементов, интенсивности их отказов  = 0,1 ч-1, интенсивности восстановления  = 0,5 ч-1. Определить кратность резервирования, при которой наработка на отказ системы удовлетворяет требованию надежности:  9000 ч. Рассмотреть случаи полностью ограниченного и неограниченного восстановления.

**Решение.** Случай ограниченного восстановления (одна ремонтная бригада) наработка на отказ резервированной системы кратности m вычисляется по формуле (4.6):

В результате расчётов получим:

• при  = 1,  = 10(1 + 5) = 60 час;

• при  = 2,  = 10(1 + 5 + 25) = 310 час;

• при  = 3,  = 10(1 + 5 + 25 + 125) = 1560 час;

• при  = 4,  = 10(1 + 5 + 25 +125 + 625) = 7810 час;

• при  = 5, = 10(1+ 5 +25 +125+ 625 +3125 ) = 39060 час.

Требуемая надёжность обеспечивается только при кратности резервирования  = 5.

В случае неограниченного восстановления наработка на отказ вычисляется по формуле (4.7):

.

В результате расчётов получим:

• при  = 1,  = 10(1+ 5) = 60 час;

• при  = 2 ,  = 10(1 + 2⋅5 + 2⋅1⋅25) = 610 час;

• при  = 3,  = 10(1 + 3⋅ 5 + 3⋅2⋅25+ 3⋅2⋅1⋅125) = 9160 час.

В данном случае требуемая надёжность достигается уже при кратности резервирования  = 3 .

Таким образом, за счёт увеличения ремонтных бригад можно добиться существенного увеличения надёжности системы, используя 3 резервных элемента вместо 5.

**Упражнения для самостоятельной работы**

**Задача 4.1.** Дана резервированная система с постоянным резервом кратности m, состоящая из одинаковых по надёжности элементов. Интенсив­ности отказов элементов  = 0,08 ч-1, интенсивности восстановлений  = 0,4 ч-1. Определить кратность резервирования, чтобы было выполнено требование по её надежности: коэффициент готовности системы должен быть менее . Рассмотреть случаи полностью ограниченного и неогра­ниченного восстановлений.

**Задача 4.2.** Определить кратность резервирования системы (резерв замещением), состоящей из одинаковых по надёжности и ремонтопригодности элементов. Интенсивности отказов элементов  = 0,2 ч'1, интенсивности восстановлений  = 0,9 ч-1. Должно быть выполнено условие:  ч. Рассмотреть два случая: полностью ограниченное и неограниченное восстановление.

**Задача 4.3.** Определить вероятность и среднее время безотказной работы резервированной системы с постоянным резервом кратности  = 7. Обслуживание осуществляется двумя ремонтными бригадами. Интенсивности отказов и восстановлений элементов соответственно равны:  = 0,0006 ч-1,  = 0,05 ч-1.

**Задача 4.4.** Определить вероятность и среднее время безотказной работы резервированной системы с ненагруженным резервом кратности  = 7. Обслуживание осуществляется двумя ремонтными бригадами. Интенсивности отказов и восстановлений элементов соответственно равны:  = 0,0006 ч-1,  = 0,05 ч-

**Задача 4.5.** Интенсивности отказов и восстановлений элементов дублированной системы с постоянно включённым резервом имеют значения:  = 0,0076 ч-1,  = 0,15 ч-1.

Необходимо найти аналитические выражения для вероятности безотказной работы и функции готовности системы. Путём табулирования функций представить решения в виде таблиц и графиков.

По известным аналитическим выражениям определить среднее время безотказной работы и коэффициент готовности системы.

**Указание:** для получения  и  воспользуйтесь решением дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

**Задача 4.6.** Структурные схемы систем приведены на рис. 4.34. Необхо­димо определить в виде таблиц и графиков показатели надежности: , , , . Данные об интенсивностях отказов и восстановлений приведены в табл. 4.17. Решение получить методом Рунге-Кутта с помощью компьютерных технологий.

**Задача 4.7.** Интенсивность отказов элементов дублированной системы равна  = 0,02 час-1. При отказе одного из элементов увеличивается интенсивность отказа второго элемента  = 0,04 ч-1. Восстановление производится одним ремонтником, время восстановления подчинено закону Эрланга 2-го порядка с параметром  = 1 час-1. Определить коэффициент готовности системы.

**Задача 4.8.** Определить функцию готовности дублированной системы. Время до отказа элементов имеет распределение Вейбулла с математическим ожиданием  = 280 час и средним квадратическим отклонением  час. Время восстановления элементов имеет равномерное распределение на промежутке от 0 до 24 часов. Результаты представить в виде таблиц и графиков.

**Задача 4.9.** Дана система с постоянно включённым резервом кратности  = 2, работающая в стационарном режиме. Интенсивности отказов постоянные, а время восстановления произвольное с плотностью распределения . Определить интенсивности переходов графа, соответствующие восстановлению элементов. Рассмотреть случаи полностью ограниченного восстановления для прямого и обратного приоритетов обслуживания.

**Задача 4.10.** Дана резервированная система (резерв замещением) кратности  = 2, работающая в стационарном режиме. Интенсивности отказов постоянные, а время восстановления произвольное с плотностью распределения . Восстановление производится одной ремонтной бригадой с прямым приоритетом обслуживания. Определить интенсивности переходов в графе состояний, соответствующие восстановлению элементов.

**Семинар № 5**

**Определение путей и разрезов в графе. Расчёт показателей**

**надёжности на примере задач по определению двусторонних**

**граничных оценок Эзари-Прошана для вероятности связности**

**двухполюсного графа** (2 ч)

**Цель семинара** – изучение на примерах как определить минимальные пути и разрезы в графе, а также как рассчитать показатели надёжности на примере задач по определению двусторонних граничных оценок Эзари-Прошана для вероятности связности двухполюсного графа.

**Теоретическая часть**

*Путём* в ненаправленном двухполюсном графе будем называть такое подмножество его рёбер, которое позволяет, переходя от одного ребра к другому через инцидентную им обоим вершину, пройти от одного полюса графа к другому. Понятно, что путей в двухполюсном графе может быть в общем случае достаточно много, причём путь может включать и петли, т. е. в общем случае путь может более одного раза проходить через одну и ту же вершину. Формально в путь могут включаться и «висячие» ребра. Один путь имеется только в последовательной системе, причём подмножество рёбер, образующих путь, совпадает со всем множеством рёбер. В параллельной системе путём является все множество рёбер и любое непустое его подмножество.

При анализе связности двухполюсных графов удобнее использовать понятие ***минимального пути***. Минимальным путём двухполюсного графа называется такое подмножество его рёбер, которое позволяет, переходя от одного ребра к другому через инцидентную им обоим вершину, пройти от входного полюса к выходному, но исключение хотя бы одного любого ребра из этого подмножества приводит к тому, что оставшееся подмножество рёбер уже не является путём. Иначе говоря, минимальный путь – это путь без петель (циклов) и без «висячих» рёбер. Точнее было бы называть такой путь не минимальным, а ***простым***, но мы будем следуем той терминологии, которая в настоящее время чаще используется в теории надежности.

Из этого определения следует, что минимальный путь представляет собой последовательное соединение некоторых рёбер графа, причём «крайние» ребра этого соединения инцидентны соответственно входному и выходному полюсам. Следовательно, если через  обозначить подмножество рёбер, образующих -й минимальный путь, то структурную функцию этого минимального пути можно записать в виде

. (5.1)

В частности, в последовательной системе минимальным путём является множество всех её рёбер, а в параллельной системе каждый минимальный путь состоит всего из одного ребра, а число таких минимальных путей равно числу рёбер в системе.

Из приведённых определений ясно, что связность двухполюсного графа обеспечивается наличием хотя бы одного пути (или минимального пути) в графе.

Структурную функцию двухполюсного графа можно выразить через структурные функции путей следующим образом:

. (5.2)

где  – число минимальных путей в графе.

Окончательно для структурной функции можно записать

. (5.3)

За внешней простотой этой записи скрывается сложность перечисления минимальных путей в двухполюсном графе произвольной структуры. (Перечисление минимальных путей – вопрос особый и здесь не рассматривается.) Кроме того, вычисление различных характеристик таких сетей на основании записанной структурной функции сопряжён с определёнными трудностями в связи с тем, что в общем случае в состав различных минимальных путей могут входить одни и те же ребра, т.е. пути оказываются зависимыми друг от друга.

**Оценки Эзари-Прошана.** Граничные оценки для вероятности связности двухполюсного графа получаются, если рассмотреть структурные функции  и  записанные соответственно для параллельного соединения минимальных путей и последовательного соединения минимальных разрезов и учесть при этом неравенства  и  для связанных булевых переменных. Действительно,

,

и, поскольку события  для всех  являются положительно коррелированными (отказы различных путей зависимы из-за того, что подмножества элементов, составляющих различные пути могут пересекаться), можем записать, используя неравенство 

 (5.4)

Итак, окончательно имеем



Таким образом, использование структурной функции неприводимого графа в виде параллельного соединения минимальных путей с учётом неравенства  даёт верхнюю оценку для вероятности связности.

Нижняя оценка получается, если использовать второе представление структурной функции неприводимого графа

 (5.5)

Таким образом, двусторонние оценки Эзари-Прошана, которые мы обозначим  и  соответственно, имеют вид



**Примеры решения типовых задач**

**Пример 5.1.** Рассмотрим простейшую неприводимую структуру – мостиковую схему (**рис. 5.1**). Перечислим её минимальные пути:

.

Видно, что пути и включают одно и то же ребро , пути и  – ребро , пути и – ребро , пути и – ребро ,пути и – ребро .Иначе говоря, указанные пары путей взаимно зависимы.

*x*5

*x*2

*x*3

*x*4

*x*1

*t*

*s*

**Рис. 5.1. Простейшая неприводимая структура: мостиковая схема**

Просто путями являются любые подмножества всех рёбер рассматриваемого графа, включающие любой минимальный путь. Например, есть путь графа, если , т.е. такими путями могут быть



В частности, – полный граф.

***Разрезом*** ненаправленного двухполюсного графа называется такое подмножество его рёбер, удаление которых из графа разрывает все пути этого графа. В этом случае, как и в случае с путями, различных разрезов в графе может быть много. Единственный разрез имеется только в параллельной системе, причём подмножество рёбер, образующих этот разрез, совпадает со всем множеством рёбер графа. В последовательной системе разрезом является любое непустое подмножество рёбер, в том числе и все множество рёбер системы.

При анализе связности удобнее использовать понятие минимального разреза. Минимальным разрезом двухполюсного графа называется такое подмножество его рёбер, удаление которых из графа разрывает все пути графа, но введение хотя бы одного любого из рёбер этого подмножества приводит к образованию хотя бы одного пути.

Из этого определения следует, что минимальный разрез есть параллельное соединение некоторых рёбер графа. Обозначим через подмножество рёбер, образующих *-*йминимальный разрез; тогда структурную функцию минимального разреза можно записать в виде

 (5.4)

Заметим, что в параллельной системе минимальным разрезом является множество всех её рёбер, а в последовательной системе каждый минимальный разрез состоит всего из одного ребра, а число таких минимальных разрезов равно числу рёбер в системе.

Из определения разреза (и минимального разреза) следует, что для нарушения связности двухполюсного графа достаточно исключения рёбер, принадлежащих хотя бы одному минимальному разрезу, или, говоря в терминах сохранения связности графа, в нем не должно быть ни одного разреза, чтобы он был связным.

Структурную функцию двухполюсного графа можно выразить через структурные функции разрезов в виде

 (5.5)

где – число минимальных разрезов в графе.

Различные минимальные разрезы могут быть зависимы, если в их состав входят одни и те же ребра.

Отметим, что перечисление минимальных разрезов графа представляет собой достаточно сложную и в вычислительном плане трудоёмкую задачу.

**Пример 5.2.** Рассмотрим опять, как и в **примере 5.1**, мостиковую схему (**рис. 5.1**). Перечислим её минимальные разрезы:

.

Видно, что разрезы  и включают одно и то же ребро ,разрезы и  – ребро ,разрезы и – ребро , разрезы и – ребро ,разрезы и – ребро .

Просто разрезами являются любые подмножества всех рёбер рассматриваемого графа, включающие любой минимальный разрез. Например, есть разрез графа, если , т.е. такими разрезами могут быть



В частности,  – множество всех рёбер исходного графа.

***Замечание.*** Множество рёбер, составляющих минимальный разрез, может совпасть с множеством рёбер, составляющих минимальный путь. Так, для мостиковой схемы и . Однако в общем случае для графов большой размерности такое совпадение является событием достаточно исключительным.

**Пример 5.3. Оценки Эзари-Прошана для мостиковой схемы** (**рис. 5.1**). В **примерах 5.1** и **5.2** перечислены подмножества рёбер, образующих минимальные пути и минимальные разрезы для рассматриваемого двухполюсного графа.

Для мостиковой схемы можно записать



**Табл. 5.1 Значения верхних и нижних оценок Эзари-Прошана**

**для различных значений параметров надежности модулей**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0,01 | 0,0535 | 0,0002 | 0,0002 |
| 0,1 | 0,0026 | 0,0202 | 0,0219 |
| 0,5 | 0,4307 | 0,5 | 0,5697 |
| 0,9 | 0,9781 | 0,9798 | 0,9326 |
| 0,99 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9534 |

 *Примечание.* 0,932 = 0,9992 и т. д.

Для количественного анализа положим, что все рёбра графа идентичны по своим вероятностным характеристикам. В **табл. 5.1** приведены значения верхних и нижних оценок Эзари-Прошана для различных значений вероятностей существования модулей. В этой же таблице приведены точные значения для . Из сравнения результатов, приведённых в таблице, следует, что верхняя граничная оценка даёт меньшую погрешность при высоких значениях вероятностей , а нижняя граничная оценка – при значениях вероятностей , близких к нулю.

**Метод эквивалентных схем**

Метод эквивалентных схем основан на использовании формулы полной вероятности в виде

 ****, (5.6)

Входящие в (5.6) условные вероятности представляют собой вероятности без­отказной работы систем, одна из которых отличается от исходной лишь тем, что ее первый элемент идеально надежный, а в другой первый элемент вообще отсут­ствует. Операция разбиения функции  на два слагаемых в (5.6) называется разрезанием по элементу 1. Вообще говоря, разрезание может быть проведено по любому элементу системы. Последовательность действий при использовании метода эквивалентных схем следующая.

**1.** В исходной системе выбирают элемент, по которому будет производиться разрезание. Обычно им становится элемент, расположенный между просты­ми точками соединения.

**2.** Исходную структурную схему преобразуют в две эквивалентные схемы, в одной из которых выбранный элемент заменяется безотказной перемычкой, а в дру­гой удаляется.

**3.** Если обе полученные в предыдущем пункте схемы являются последовательно**-**параллельными, то для расчета их надежности используют методы, используемые для расчета последовательных и параллельных схем. После подстановки в (5.6) получают искомую вероятность. Если же одна или обе схемы остаются в классе сложных структур, то в них проводят действия в соответствии с пп. 1 и 2, и так до тех пор, пока все экви­валентные схемы не станут последовательно-параллельными.

**Пример 5.4.** Найти вероятность безотказной работы системы, структурная схема которой представлена на **рис. 5.2**.

Решение. Здесь можно провести разрезание по элементу 5. Замыкание и обрыв при­водят к схемам с последовательно-параллельным соединением элементов (**рис. 5.2**).

Рис. 5.2. **Эквивалентные схемы системы с мостиковой структурой**

Используя формулы общего и раздельного резервирования с целой кратностью, находим:

, (5.7)

где , − вероятность безотказной работы -го элемента. В частности, при одинаковых элементах из (5.7) имеем:

. (5.8)

Нетрудно установить, что формула (5.8) дает такой же результат, что и форму­ла, приведенная в лекции.

Разрезание можно проводить и по нескольким элементам одновременно. При этом получается  эквивалентных схем, а в формуле для вероятности безотказ­ной работы будет  слагаемых, где  − количество элементов, по которым про­водится разрезание. В частности, при разрезании по двум элементам с номерами  и  вместо формулы (5.6) имеем:



 .

**Пример 5.5.** Найти вероятность безотказной работы системы, структурная схема которой представлена на **рис. 5.3**.

Рис. 5.3. **Система со сложной структурой типа «лестница»**

**Решение.** Проводя разрезание по элементам 7 и 8, получим четыре эквивалент­ных схемы, каждая из которых относится к классу последовательно-параллель­ных схем (**рис. 5.4**).

Рис. 5.4. **Эквивалентные схемы системы со сложной структурой типа «лестница»**

Используя формулы для расчёта последовательно-параллельных схем получим:

. (5.9)

При  формула (5.9) совпадает с (5.7).