**ЛЕКЦИЯ 7**

**Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем.**

**Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний**

Рассматрим **марковскую цепь**, т.е. случайный процесс, протекающий в системе, которая случайным образом может переходить из состояния в состояние только в некоторые заранее определённые, фиксированные моменты времени.

На практике значительно чаще встречаются ситуации, когда переходы системы из состояния в состояние происходят не в фиксиро­ванные, а в случайные моменты времени, которые заранее указать не­возможно – переход может осуществиться, вообще говоря, в любой момент. Например, выход из строя (отказ) любого элемента аппаратуры может произойти в любой момент времени; окончание ремонта (восста­новление) этого элемента также может произойти в заранее не зафикси­рованный момент и т д.

Для описания таких процессов в ряде случаев может быть с успе­хом применена схема марковского случайного процесса с дискретны­ми состояниями и непрерывным временем, который мы будем для крат­кости называть **непрерывной цепью Маркова**.



Рис. 7.1

Покажем, как выражаются вероятности состояний для такого процесса.

Пусть имеется ряд дискретных состояний:



переход (перескок) системы  из состояния в состояние может осуществ­ляться в любой момент времени. Граф состояний системы представлен на **рис. 7.1.**

Обозначим – вероятность того, что в момент  система будет находиться в состоянии *.* Очевидно, для любого мо­мента сумма вероятностей состояний равна единице:

 (7.1)

так как события, состоящие в том, что в момент  система находится в состояниях ,несовместны и образуют полную группу.

Поставим задачу – определить для любого  вероятности состояний:



Для того чтобы найти эти ве­роятности, необходимо знать харак­теристики процесса. В случае процесса с непрерывным временем нам не при­дётся задавать определённые, отличные от нуля, переходные вероят­ности  вероятность перехода (перескока) системы из состояния в со­стояние точно в момент  будет равна нулю (так же как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины). Вмес­то переходных вероятностей мы введём в рассмотрение плот­ности вероятностей перехода .

Пусть система  в момент  находится в состоянии *.* Рассмотрим элементарный промежуток времени , примыкающий к моменту (**рис. 7.2)**.



**Рис. 7.2**

Назовём ***плотностью вероятности перехода*** предел отношения вероятности перехода системы за время из состояния в состояние к длине промежутка *:*

 (7.2)

где  – вероятность того, что система, находившаяся в момент в состоянии ,за время  перейдёт из него в состояние (плот­ность вероятностей перехода определяется только для .

Из формулы (7.2) следует, что при малом  вероятность перехода (с точностью до бесконечно малых высших порядков) равна :



Если все плотности вероятностей перехода не зависят от *t* (т.е. от того, в какой момент начинается элементарный участок ,мар­ковский процесс называется однородным; если эти плотности представляют собой какие-то функции времени , процесс назы­вается неоднородным. При пользовании сокращённым названием «**непрерывная марковская цепь**» мы также будем различать одно­родные и неоднородные цепи.

Предположим, что нам известны плотности вероятностей пере­хода для всех пар состояний *.*



**Рис. 7.3**

Построим граф состояний системы  и против каждой стрелки про­ставим соответствующую плотность вероятности перехода (**рис. 7.3**). Такой граф, с проставленными у стрелок плотностями вероятнос­тей перехода, мы будем называть размеченным графом со­стояний.

Оказывается, зная размеченный граф состояний, можно определить вероятности состояний:

 (7.3)

как функции времени. А именно, эти вероят­ности удовлетворяют определённого вида дифференциальным уравнениям, так называемым уравне­ниям Колмогорова. Решая эти уравнения, мы получим вероятности (7.3). Продемонстрируем методику вывода уравнений Колмогорова для вероятностей состояний на конкретном примере.

Пусть система  имеет четыре возможных состояния:



размеченный граф состояний системы показан на **рис. 7.4**.



**Рис. 7.4**

Поставим себе задачу: найти одну из вероятностей состояний, на­пример, . Это есть вероятность того, что в момент система будет находиться в состоянии .

Придадим малое приращение и найдём вероятность того, что в момент  система будет находиться в состоянии *.*

Как это событие может произойти? Очевидно, двумя способами:

• в момент  система уже была в состоянии , а за время  не вышла из этого состояния

или

• в момент система была в состоянии ,а за время перешла из него в .

Вероятность первого варианта найдём как произведение вероят­ности того, что в момент *t* система была в состоянии на услов­ную вероятность того, что, будучи в состоянии , система за время  не перейдёт из него в . Эта условная вероятность (с точностью до бесконечно малых высших порядков) равна .

Аналогично, вероятность второго варианта равна вероятности то­го, что в момент  система была в состоянии ,умноженной на услов­ную вероятность перехода за время  в состояние *:*



Применяя правило сложения вероятностей, получим:



Раскроем скобки в правой части, перенесём в левую и разде­лим обе части равенства на ; получим:



Теперь устремим к нулю и перейдём к пределу:



Левая часть есть не что иное, как производная функции :

 (7.4)

Таким образом, выведено дифференциальное урав­нение, которому должна удовлетворять функция .Аналогич­ные дифференциальные уравнения могут быть выведены и для осталь­ных вероятностей состояния: .

Рассмотрим второе состояние *S*2 и найдём  – вероят­ность того, что в момент  система будет находиться в состоя­нии *S*2. Это событие может произойти следующими способами:

• в момент  система уже была в состоянии ,а за время  не перешла из него ни в ,ни в ;

или

• в момент *t*  система была в состоянии , а за время  перешла из него в ;

или

• в момент *t* система была в состоянии , а за время перешла из него в .

Вероятность первого варианта вычисляется так: умножается на условную вероятность того, что система за  не перейдёт ни в ,ни в . Так как события, состоящие в переходе за время из в и из в , несовместны, то вероятность того, что осуществится один из этих переходов, равна сумме их вероятностей, т.е.  (с точностью до бесконечно малых высших порядков). Вероятность то­го, что не осуществится ни один их этих переходов, равна . Отсюда вероятность первого варианта:



Прибавляя сюда вероятности второго и третьего вариантов, по­лучим:



Перенося  в левую часть, деля на  и переходя к пределу, получим дифференциальное уравнение для :

 (7.5)

Рассуждая аналогично для состояний , , получим в результа­те систему дифференциальных уравнений, составленных по типу (7.4) и (7.5). Отбросим в них для краткости аргумент  у функций и перепишем эту систему в виде:

 (7.6)

Эти уравнения для вероятностей состояний и называются уравнения­ми Колмогорова.

Интегрирование этой системы уравнений даст нам искомые вероят­ности состояний как функции времени. Начальные условия берутся в зависимости оттого, каково было начальное состояние системы . Например, если в начальный момент времени (при *t =* 0) система  находилась в состоянии ,то надо принять начальные условия:

при *t* = 0 *р*1 = l, *р*2 = *р*3 = *р*4 = 0.

Заметим, что всех четырёх уравнений для можно было бы и не писать; действительно,  для всех *t*,и любую из вероятностей можно выразить через три ос­тальные. Например *p*4 можно выразить через *р*1,  *р*2,  *р*3 в виде



и подставить в остальные уравнения. Тогда специального уравнения для вероятности *р4* можно и не писать. Однако в дальнейшем нам будет удобнее пользоваться полной системой уравнений типа (7.6).

Обратим внимание на структуру уравнений (7.6). Все они построе­ны по вполне определённому правилу, которое можно сформулировать следующим образом.

***В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния*, *а правая часть содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием*. *Если стрелка направлена из состояния*, *соответствующий член имеет знак* «*минус*»; *если в состояние* – *знак* «*плюс*». *Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода*, *соответс­твующей данной стрелке*, *умноженной на вероятность того состояния*, *из которого ис­ходит стрелка*.**

Это правило составления дифферен­циальных уравнений для вероятностей со­стояний является общим и справедливо для любой непрерывной марковской цепи; с его помощью можно совершенно механически, без всяких рассуждений, записывать диффе­ренциальные уравнения для вероятностей со­стояний непосредственно по размеченному графу состояний.

 **Поток событий. Простейший поток и его свойства**

При рассмотрении случайных процессов, протекающих в системах с дискретными состояниями и непрерывным временем, часто приходит­ся встречаться с так называемыми «потоками событий».

***Потоком событий*** называется последовательность одно­родных событий, следующих одно за другим в какие-то, вообще гово­ря, случайные моменты времени.

Примерами могут быть:

– поток вызовов на телефонной станции;

– поток включений приборов в бытовой электросети;

– поток грузовых составов, поступающих на железнодорожную станцию;

– поток неисправностей (сбоев) вычислительной машины;

– поток выстрелов, направляемых на цель, и т.д.



**Рис. 7.6**

При рассмотрении процессов, протекающих в системе с дискрет­ными состояниями и непрерывным временем, часто бывает удобно представлять себе процесс так, как будто переходы системы из состоя­ния в состояние происходят под действием каких-то ***потоков со­бытий*** (поток вызовов, поток неисправностей, поток заявок на об­служивание, поток посетителей и т.д.) Поэтому имеет смысл рассмот­реть подробнее потоки событий и их свойства.

Будем изображать поток событий последовательностью точек на оси времени  (**рис. 7.6**). Пользуясь таким изображением, не надо забывать, что положение каждой точки на оси абсцисс случайно.

Поток событий называется ***регулярным***, если события следуют одно за другим через строго определённые промежутки времени. Такой поток сравнительно редко встречается на практике, но представ­ляет определённый интерес как предельный случай.

При исследовании операций чаще приходится встречаться с пото­ками событий, для которых и моменты наступления событий и проме­жутки времени между ними случайны.

В данном параграфе мы рассмотрим потоки событий, обладающие некоторыми особо простыми свойствами. Для этого введём ряд опреде­лений.

1. Поток событий называется ***стационарным***, если вероят­ность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ (**рис.7.6**) зависит только от *длины* участка и не зави­сит от того, где именно на оси 0*t* расположен этот участок.

2. Поток событий называется ***потоком без последей­ствия***, если для любых непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько со­бытий попало на другой (или другие, если рассматривается больше двух участков).

3. Поток событий называется ***ординарным***, если вероятность попадания на элементарный участок двух или более событий пренебре­жимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Рассмотрим подробнее эти три свойства потоков и посмотрим, ка­ким физическим условиям они соответствуют и за счёт чего могут на­рушаться.

***Стационарность*** потока означает его однородность по времени: вероятностные характеристики такого потока не должны ме­няться в зависимости от времени. В частности, так называемая интен­сивность (или «плотность») потока событий – среднее число собы­тий в единицу времени – для стационарного потока должна оставать­ся постоянной. Это, разумеется, не значит, что фактическое число собы­тий, появляющихся в единицу времени, постоянно – нет, поток может иметь местные сгущения и разрежения. Важно, что для стационарного потока эти сгущения и разрежения не носят закономерного характера, а среднее число событий, попадающих на единичный участок времени, остаётся постоянным для всего рассматриваемого периода.

На практике часто встречаются потоки событий, которые (по край­ней мере, на ограниченном участке времени) могут рассматриваться как стационарные. Например, поток вызовов, поступающих на теле­фонную станцию, скажем, на интервале от 12 до 13 часов может счи­таться стационарным. Тот же поток в течение целых суток уже не будет стационарным (ночью интенсивность потока вызовов гораздо меньше, чем днём). Заметим, что так же обстоит дело и с большинством физи­ческих процессов, которые мы называем «стационарными» – в действи­тельности они стационарны только на ограниченном участке времени, а распространение этого участка до бесконечности – лишь удобный приём, применяемый в целях упрощения.

***Отсутствие последействия*** в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени *независимо* друг от друга. Например, поток пассажи­ров, входящих на станцию метро, можно считать потоком без после­действия, потому что причины, обусловившие приход отдельного пас­сажира именно в данный момент, а не в другой, как правило, не свя­заны с аналогичными причинами для других пассажиров. Если такая зависимость появляется, условие отсутствия последействия оказы­вается нарушенным.

Рассмотрим, например, поток грузовых поездов, идущих по же­лезнодорожной ветке. Если, по условиям безопасности, они не могут следовать один за другим чаще, чем через интервал времени , то между событиями в потоке имеется зависимость, и условие отсутствия последействия нарушается. Если интервал  мал по сравнению со средним интервалом между поездами , такое нарушение несуществен­но, но если интервал  сравним с , его приходится учитывать.

***Ординарность***потока означает, что события в потоке приходят поодиночке, а не парами, тройками и т.д. Например, поток клиентов, направляющихся в парикмахерскую, практически можно считать ординарным, чего нельзя сказать о потоке клиентов, направляющихся в ЗАГС для регистрации брака. Поток атак истре­бителей по бомбардировщику, находящемуся над вражеской террито­рией, ординарен, если они атакуют цель поодиночке, и не ордина­рен, если они идут в атаку парами или тройками.

Если в неординарном потоке события происходят только парами, только тройками и т.д., то можно его рассматривать как ординарный «поток пар», «поток троек» и т.д. Несколько сложнее обстоит дело, если число событий, образующих «пакет» (группу одновременно при­ходящих событий) случайно. Тогда приходится наряду с потоком пакетов рассматривать случайную величину – число событий в па­кете, и математическая модель потока становится более сложной: он представляет собой не только последовательность моментов появления пакетов, но и последовательность случайных величин – чисел собы­тий в каждом пакете (**рис. 7.7**), где  – значения, принятые случайной величиной в первом, втором и т.д. пакетах. Пример неординарного потока событий со случайным числом событий в пакете – поток товарных вагонов, прибывающих на сортировочную станцию («пакетом» является поезд).



**Рис. 7.7**

Рассмотрим поток событий, обладающий всеми тремя свойствами: стационарный, без последействия, ординарный. Такой поток назы­вается ***простейшим*** (или стационарным пуассоновским) потоком. Название «простейший» связано с тем, что математическое описание со­бытий, связанных с простейшими потоками, оказывается наиболее простым. Отметим, между прочим, что «самый простой», на первый взгляд, регулярный поток со строго постоянными интервалами между событиями отнюдь не является «простейшим» в вышеназванном смыс­ле слова: он обладает ярко выраженным последействием, так как мо­менты появления событий связаны между собой жёсткой функцио­нальной зависимостью. Именно из-за этого последействия анализ про­цессов, связанных с регулярными потоками, оказывается, как правило, труднее, а не легче по сравнению с простейшими.

Простейший поток играет среди других потоков особую роль. А именно, можно доказать, что при суперпозиции (взаимном наложе­нии) достаточно большого числа потоков, обладающих последействием (лишь бы они были стационарны и ординарны), образуется суммарный поток, который можно считать простейшим, и тем точнее, чем большее число потоков складывается (для этого дополнительно требуется, чтобы складываемые потоки были сравни­мы по интенсивности, т.е., чтобы среди них не было, скажем, одного, превос­ходящего по интенсивности сумму всех остальных).

Если поток событий не имеет последействия, ординарен, но не стационарен, он называется ***нестационарным пуассо­новским потоком***. В таком потоке интенсивность  (среднее число событий в единицу времени) зависит от времени:



тогда как для простейшего потока



Пуассоновский поток событий (как стационарный, так и неста­ционарный) тесно связан с известным распределением Пуас­сона. А именно, число событий потока, попадающих на любой участок, распределено по закону Пуассона.



**Рис. 7.8**

Поясним, что это означает. Рассмотрим на оси , где наблюдается поток событий, некоторый участок времени длины  (см. **рис. 7.8**), начинающийся в момент и заканчивающийся в момент . Не­трудно доказать (доказательство даётся во всех курсах теории ве­роятностей), что *в****ероятность попадания на этот участок ровно  со­бытий выражается формулой***:

 (7.7)

где – среднее число событий, приходящееся на участок .

Для стационарного (простейшего) пуассоновского потока величи­на равна интенсивности потока, умноженной на длину интервала:

,

т.е. не зависит от того, где на оси взят участок . Для нестацио­нарного пуассоновского потока величина выражается формулой:



и, значит, зависит от того, в какой точке начинается участок .

Рассмотрим на оси  простейший поток событий с интенсивностью  (**рис. 7.9**). Нас будет интересовать интервал времени между соседними событиями в этом потоке. Очевидно, есть величина случай­ная; найдём её закон распределения. Сначала найдём функцию рас­пределения:

,

т.е. вероятность того, что величина примет значение, меньшее, чем .Отложим от начала интервала (точки ) отрезок  и найдём вероят­ность того, что интервал будет меньше .Для этого нужно, чтобы на участок длины ,примыкающий к точке ,попало хотя бы одно событие потока. Вычислим вероятность этого через вероятность противоположного события (на участок не попадёт ни одного события потока):





**Рис. 7.10**

Вероятность найдём по формуле (1.4), полагая :

,

откуда функция распределения величины будет:

. (7.8)

Чтобы найти плотность распределения  случайной величины ,продифференцируем выражение (7.2) по :

. (7.9)

Закон распределения с плотностью (4.3) называется показа­тельным (или экспоненциальным). График его имеет вид, пред­ставленный на **рис. 4.11.** Величина называется параметром показательного закона.

Показательный закон распределения, как мы увидим дальше, иг­рает большую роль в теории марковских случайных процессов.

Найдём числовые характеристики случайной величины – ма­тематическое ожидание (среднее значение) и дисперсию .Имеем:

.

Интегрируя но частям, получим:

. (7.10)

Дисперсию величины найдём через второй начальный момент:

,

ткуда, снова интегрируя по частям, получим: .

Извлекая корень квадратный из дисперсии, найдём среднее квадратическое отклонение случайной величины :

. (7.11)

Итак, для показательного рас­пределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны друг другу и об­ратны параметру .

  

 **Рис. 7.11** **Рис. 7.12**

Таким образом, исследуя структуру простейшего потока собы­тий, мы пришли к заключению: ***промежуток времени*  *между сосед­ними событиями в простейшем потоке распределён по показательному закону*; *его среднее значение и среднее квадратическое отклонение равны* , *где*  – *интенсивность потока.***

Для нестационарного пуассоновского потока закон распределе­ния промежутка уже не будет показательным; вид этого закона будет зависеть, во-первых, от того, где на оси расположено первое из со­бытий, и, во-вторых, от вида зависимости ,характеризующей пере­менную интенсивность потока. Однако если меняется сравнитель­но медленно и его изменение за время между двумя событиями невели­ко, то закон распределения промежутка времени между событиями мож­но приближённо считать показательным (7.3), полагая в этой формуле величину  равной среднему значению на том участке, который нас интересует.

В заключение данного параграфа выведем выражение для так на­зываемого «элемента вероятности появления события».

Рассмотрим на оси  простейший поток событий с интенсивностью  и элементарный участок ,прилежащий в точке  (**рис. 7.12**).

Найдём вероятность того, что на участке  появится какое-то событие потока, т.е. участок не будет «пуст». Так как поток ордина­рен, вероятностью появления на участке более чем одного собы­тия можно пренебречь. Обозначим вероятность того, что на участке  не будет события, a ** – вероятность того, что на нем появится одно событие. В силу ординарности потока

,

а вероятность  вычисляем по формуле (4.1):

,

откуда

.

Разлагая  в ряд по степеням и пренебрегая величи­нами высшего порядка малости, получим:

.

Отсюда

, (7.12)

т. е. вероятность появления на элементарном участке времени  ка­кого-то события потока приближённо равна ,где  – интенсивность потока. Эту вероятность мы будем называть «элементом вероятности появления события».

Очевидно, такая же формула будет справедлива и для нестацио­нарного пуассоновского потока, с той разницей, что величину  нуж­но брать равной её значению в той точке ,к которой примыкает учас­ток :

**.**

**ЛЕКЦИЯ 8**

**Потоки пальма. Потоки Эрланга**

Поток событий называется потоком Пальма (или потоком с ограниченным последействием), если промежутки времени между последовательными событиями:



представляют собой независимые, одинаково распределённые случай­ные величины (**рис. 7.13**).

Простейший поток есть частный случай потока Пальма: в нем рас­стояния  представляют собой случайные величины, распределённые по одному и тому же показательному закону; их неза­висимость следует из того, что простейший поток есть поток без после­действия, и расстояние по времени между любыми двумя событиями не зависит от того, каковы расстояния между другими.

Рассмотрим пример потока Пальма. Некоторый элемент техничес­кого устройства (например, радиолампа) работает непрерывно до свое­го отказа (выхода из строя), после чего он мгновенно заменяется новым. Срок работы элемента случаен. Если отдельные экземпляры элементов выходят из строя независимо друг от друга, то поток отказов (или «поток восстановлений», так как отказ и восстановление происходят в один и тот же момент) представляет собой поток Пальма. Если к тому же срок работы элемента распределён по показательному закону, поток Пальма превращается в простейший (стационарный пуассоновский) поток.



**Рис. 7.13**

Многие потоки событий, встречающиеся на практике, хотя и не являются в точности потоками Пальма, но могут быть ими приближён­но заменены.

Важными для практики образцами потоков Пальма являются так называемые потоки Эрланга. Эти потоки образуются в резуль­тате «просеивания» простейших потоков.

Рассмотрим на оси простейший поток событий (**рис. 7.15**) и со­храним в нем не все точки, а только каждую вторую; остальные выбро­сим (на **рис. 7.15** сохранённые точки показаны жирными). В результа­те такой операции «прореживания» или «просеивания» образуется сно­ва поток событий; он называется потоком Эрланга второ­го порядка.



**Рис. 7.15**

Вообще, потоком Эрланга -го порядка называется поток, получающийся, если в простейшем потоке сохранить каждую -ю точку, а остальные выбросить.

Например, на **рис. 7.16** показано образование потока Эрланга 4-го порядка *Э*4 (три точки простейшего потока выбрасываются, а чет­вертая сохраняется).

Очевидно, простейший поток представляет собой частный случай потока Эрланга, а именно поток Эрланга 1-го порядка *Э*1.

Интервал времени между соседними событиями в потоке Эрлан­га -го порядка представляет собой сумму независимых случайных величин − расстояний между событиями в исходном простейшем по­токе:

.



**Рис. 7.16**

Каждая из этих случайных величин распределена по показательному закону:

.

Закон распределения интервала между соседними событиями в пото­ке  называется законом Эрланга -го порядка.

Найдём выражение для плотности распределения этого закона; обозначим её . Для этого рассмотрим на оси (**рис. 7.17**) простейший поток с интенсивностью , в котором события разделены интервалами и найдём элемент вероятности – вероятность того, что интервал  окажется в пределах элементарного участка .



**Рис. 7.17**

Для этого, во-первых, на участок длиной  должно попасть ровно  точек простейшего потока; вероятность этого события, соглас­но формуле (7.7), равна



Кроме того, последняя (-я)точка должна попасть на элементар­ный участок – вероятность этого равна (см. формулу (7.12)). Перемножая эти вероятности, получим:



откуда

 (7.13)

Очевидно, при *k* – 1 получается обычное показательное распре­деление:

, . (7.14)

Найдём характеристики закона Эрланга -гопорядка: его мате­матическое ожидание и дисперсию . Случайная величина ,распределённая по закону Эрланга -го порядка, получается сло­жением независимых случайных величин:

,

где каждая из величин  распределена по показательному закону (5.2) с математическим ожиданием  и дисперсией  (см. формулы (7.10) и (7.11)). Применяя теоремы сложения математических ожиданий и дисперсий, имеем

 (7.15)

Извлекая из последнего выражения квадратный корень, найдём среднее квадратическое отклонение:



Таким образом, мы нашли математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение интервала между соседними со­бытиями в потоке Эрланга -го порядка:

 (7.16)

Заметим, что как закон распределения ,так и все его характе­ристики выражены не через интенсивность самого потока Эрланга *Эk*,а через интенсивность  порождающего его простейшего потока, кото­рый подвергался прореживанию. Представляет интерес выразить их через интенсивность (среднее число событий в единицу времени) самого потока Эрланга . Обозначим – интенсивность потока . Оче­видно



так как из исходного простейшего потока с интенсивностью берётся только -я часть.

Подставляя выражение через  в формуле (7.13),получим



или

 (7.17)

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение этого закона будут:

(7.18)

Теперь предположим, что, сохраняя неизменной интенсивность потока :

,

мы будем менять только порядок закона Эрланга. Его математичес­кое ожидание останется постоянным:

,

а дисперсия и среднее квадратическое отклонение будут меняться:

 (7.19)

Из формул (7.19) видно, что при ** и дисперсия, и среднее квадратическое отклонение ***стремятся к нулю***. А что это зна­чит? Это значит, что ***при * *поток Эрланга заданной интенсивности*  *неограниченно приближается к регулярному потоку с постоянным интервалом между событиями*:**



Это свойство потоков Эрланга удобно в практических примене­ниях: оно даёт возможность, задаваясь различными ,получать пото­ки, обладающие различным последействием – от полного отсутствия последействия  до жёсткой функциональной связи между мо­ментами появления событий . Таким образом, порядок потока Эрланга может служить в какой-то степени «мерой последействия».

В целях упрощения часто бывает удобно приближённо заменить реальный поток событий – потоком Эрланга с тем же последействием. Это делают, согласовывая характеристики реального потока – мате­матическое ожидание и дисперсию интервала между событиями – с те­ми же характеристиками заменяющего потока Эрланга.

**Пример.** В результате статистической обработки интервалов времени меж­ду событиями в некотором потоке получены следующие характеристики:

– среднее значение интервала  = 2 мин,

– среднее квадратическое отклонение интервала *=* 0,9 мин. Требуется подобрать поток Эрланга, обладающий приблизительно теми же характеристиками, найти его интенсивность  и порядок .

*Решение*. Интенсивность  есть величина, обратная среднему интервалу между событиями:

 (соб/мин).

Из формулы (7.19) находим порядок потока Эрланга :



Выбирая в качестве ближайшее целое число, получаем



Итак, данный поток можно приближённо заменить потоком Эрланга 5-го порядка с плотностью вида:



или

 (5.9)

Вид кривой распределения (7.20) показан на **рис. 7.8.**



**Рис. 7.18**

Особое внимание, уделяемое здесь потокам Эрланга по сравнению с другими потоками Пальма (с произвольным законом распределения интервала времени между соседними событиями) объясняется тем, что при помощи этих потоков можно сводить немарковские процессы к марковским.

Потоки Эрланга весьма удобны для приближенного представле­ния потоков Пальма любого вида, так как потоки Эрланга различных порядков образуют целую гамму, дающую постепенный переход от про­стейшего потока (полное отсутствие последействия) к потоку с регу­лярными интервалами (полное, жёсткое последействие). Возможности приближенного представления любых потоков Пальма потоками типа Эрланга ещё более расширяются, если воспользоваться «обобщёнными законами Эрланга», которые получаются при сложении нескольких слу­чайных величин, распределённых по показательным законам с разными параметрами (см., например, [8]), а также «смешанными обобщёнными законами Эрланга», которые получаются, если сложить несколько обобщённых законов Эрланга с коэффициентами («весами»), образую­щими в сумме единицу.

**7. Надёжность системы с восстановлением**

До сих пор, рассматривая задачи надёжности, мы исходили из того, что отказавший элемент выходит из строя окончательно и ника­кого восстановления его функций не производится. Представляет ин­терес исследование задач надёжности в предположении, что отказав­шие элементы восстанавливаются – мгновенно заменяются новыми или ремонтируются.

При решении такого рода задач мы будем предполагать, что все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, – простейшие (иначе мы с такими задачами не справимся).

Предварительно сделаем следующее замечание: все процессы, связанные с надёжностью систем, которые мы рассматривали до сих пор, были существенно нестационарными; так как восстановления элементов не было, естественно, что при  надёжность системы стремилась к нулю, и «предельным режимом» системы просто было «не работает».

В задачах с восстановлением нас будут интересовать не только переходные процессы в системе, но и установившиеся режимы, дости­гаемые при . В данном параграфе мы рассмотрим несколько за­дач из области надёжности систем с восстановлением.

**Задача 1** (**задача о запасных элементах**). Работает простая система, состоящая из одного элемента , кото­рый подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью .При отказе элемент мгновенно заменяется новым с такими же харак­теристиками. В нашем распоряжении имеется  запасных элементов, находящихся в «холодном» резерве. Определить вероятность того, что этого числа запасных элементов нам хватит для обеспечения рабо­ты системы в течение времени  (другими словами, найти надёжность  системы с восстановлением).

***Решение.*** Нетрудно заметить, что поставленная задача эквива­лентна задаче оценки надежности резервированной системы с  ре­зервными элементами, работающими в холодном резерве и, как тако­вая, может быть решена методами, предложенными выше. Но мы решим её несколько иным, более простым методом.

Рассмотрим на оси 0 «поток восстановлений», т.е. последователь­ность моментов времени, в которые выходят из строя и мгновенно вос­станавливаются элементы (**рис. 7.36**). Очевидно, это – простейший поток с интенсивностью . Надёжность системы  есть вероятность того, что к моменту  система будет работать. Для этого нужно, чтобы на участке  отказало не более  элементов (один основной и  запасных).



**Рис. 7.36**

Мы знаем (см. § 4 гл. 4), что число событий простейшего потока, попадающих на участок длиной , распределено по закону Пуассона:

,

где , т. е.

 . (7.1)

Найдём вероятность того, что число точек (событий), попадающих на участок , будет не больше . Эта вероятность и будет надёж­ностью системы



или, короче,

. (7.2)

Подставляя (7.1) в (7.2), получим:

, (7.3)

или, вынося  за знак суммы,

. (7.4)

Вычисления по формулам (7.3) или (7.4) удобно производить, пользуясь таблицами пуассоновского распределения  (или вероятностей , которые несколько удобнее табулируются).

В приложении (табл. 2) приведены выдержки из таблиц пуассо­новского распределения (вероятности .

**Пример 1.** Рассматривается работа элемента с восстановлением (задача 1); интенсивность потока отказов  (отказа в час). В нашем распоряжении  запасных элементов. Определить надёжность системы  в функции времени до  час (максимальное время работы).

***Решение.*** Воспользуемся табл. 2 приложения. Первый столбец таблицы, где  отлично от нуля – это столбец, соответствующий *а* = 1, т.е. *t* = 0,5. Пола­гая *t* = 0,5 и складывая все вероятности для  (из них отлична от нуля толь­ко , получаем:

*P*(0,5) = 1 − 0,0001 = 0,9999

Для *t*  = 1 (*а* = 2) имеем:

*P*(1) = 1 − (0,0037 + 0,0009 + 0,0002) = 1 − 0,0048 = 0,9952 ≅ 0,995.

Для *t*  = 2 (*а* = 4):

*P*(2) = 1 − (0,0595 + 0,0298 + 0,0132 + 0,0053 + 0,0019 + 0,0006 + 0,0002 + 0,0001) = 1 − 0,1106 ≅ 0,889.

Для *t*  = 3 (*а* = 6) уже удобнее не переходить к противоположному собы­тию, а вычислять вероятность того, что число отказов будет меньше семи:

*P*(3) = 0,0025 + 0,0149 + 0,0466 + 0,0892 + 0,1339 + 0,1606 + 0,1606 ≅ 0,608.

Для *t* = 4 (*а* = 8): *P*(4) = 0,0003 + 0,0027 + 0,0107 + 0,0280 + 0,0572 + 0,0916 + 0,1221 ≅ 0,313.

Для *t* = 5 (*а* = 10):  *P*(5) = 0,0000 + 0,0005 + 0,0023 + 0,0076 + 0,0189 + 0,0378 + 0,0631 ≅ 0,130.

Наносим полученные значения на график (**рис. 7.37**).



**Рис. 7.37**

**Задача 2.** **Система состоит не из одного, как в задаче 1, а из не­скольких элементов**; среди них

 элементов группы 1,

 элементов группы 2,

....................................

 элементов группы .

Каждый из элементов любой группы, независимо от других, мо­жет отказывать; интенсивность потока отказов для элементов разных групп равна соответственно: .

Все потоки отказов – простейшие. Отказавший элемент немед­ленно заменяется новым. В запасе имеется  элементов соответствующих групп. Отсутствие запасного элемента при очеред­ном отказе означает отказ устройства. Требуется определить надёж­ность системы .

***Решение*.** Так как отсутствие запасного элемента любой группы равносильно отказу устройства, будем рассматривать группы как «последовательно» включённые элементы; тогда надёжность системы будет равна произведению надёжностей всех групп. Надёжность -й группы определяется как в задаче 1:

. (7.5)

Перемножая эти надёжности, получим надёжность системы:

,

или, короче,

. (7.6)

Заметим, что, пользуясь выведенными формулами, можно не толь­ко оценивать надёжность системы при заданном числе за­пасных элементов, но и определять, сколько запасных элементов нужно иметь в распоряжении для того, чтобы система при заданном  имела определённую надёжность.

**Пример 2.** Определить число запасных элементов , которое надо иметь в распоряжении для того, чтобы система, состоящая из одного основного эле­мента и  запасных с интенсивностью потока отказов , имела при  надёжность не меньше 0,95.

***Решение*.** Имеем . В столбце табл. 2 приложения, соответствую­щем , складываем все вероятности, начиная с последней, до тех пор, пока сумма не дойдёт до

1 − 0,95 = 0,05

Получаем:

0,0001 + 0,0002 + 0,0006 + 0,0019 + 0,0053 +0,0132 + 0,0298 = 0,0511

Итак, вероятность того, что число отказавших элементов будет больше се­ми, равна 0,0511, т. е.  не удовлетворяет нашему требованию; если же взять , то вероятность нехватки элементов будет меньше 0,05:

0,0001 + 0,0002 + 0,0006 + 0,0019 + 0,0053 +0,0132 = 0,0213.

Отсюда, число запасных элементов, удовлетворяющее условию задачи, .

Во всех рассмотренных выше задачах восстановление элемента происходило мгновенно; теперь мы рассмотрим задачу, где оно задер­живается.

**Задача 3** (**система из одного элемента с задержанным восстанов­лением**).

Система состоит из одного элемента  находящегося под дейст­вием простейшего потока отказов с интенсивностью . Отказавший эле­мент немедленно начинает восстанавливаться (ремонтироваться). По­ток восстановлений – простейший, с интенсивностью . Запас средств для ремонта неограничен. Требуется определить:

• обобщённую надёжность системы  – вероятность того, что в момент  система будет работать;

• предельное значение обобщённой надёжности  – вероятность того, что в произвольный, достаточно удалённый от начала момент си­стема будет работать;

• вероятность  того, что до определённого момента система будет работать вообще безотказно (т.е. не будет ни одного перерыва в работе для восстановления).

***Решение*.** Состояния системы (в данном случае элемента) будут:

 – работает,

 – восстанавливается.

Граф состояний показан на **рис. 7.38**. Сравнивая граф состояний на **рис. 7.38** с графом состояний одноканальной системы массового обслуживания с отказами (см. § 3 гл. 5, рис. 5.1), мы видим, что они совпадают; значит, совпадают и вероятности состояний, т.е.

 (7.7)



**Рис. 7.38 Рис. 7.39**

Обобщённая надёжность системы – вероятность того, что в мо­мент  она будет работать:

. (7.8)

При  эта надёжность стремится к предельному значению:

,

т.е. равна относительной доле интенсивности потока восстановлений в суммарной интенсивности потока восстановлений и отказов.

Вероятность  того, что до момента  не произойдёт ни одного отказа, определим следующим образом. Предположим, что восстанов­лений отказавшего элемента нет, т. е. граф состояний имеет вид, по­казанный на рис. 7.39. Искомая вероятность  будет равна вероят­ности  того, что система с графом состояний, показанным на **рис. 7.39**, будет к моменту  в состоянии ; эта вероятность полу­чится решением дифференциального уравнения

,

откуда



Таким образом,

. (7.9)

**Задача 4** (**система из нескольких элементов с задержанным восста­новлением**).

Система  состоит из  элементов, каждый из которых находится под действием простейшего потока отказов с интенсивностью . При отказе любого элемента система выключается и начинается восста­новление элемента. При неработающей системе элементы отказывать не могут. Интенсивность потока восстановлений равна . Все потоки – простейшие. Найти:

• обобщённую надёжность системы  (вероятность того, что в момент  система будет работать);

• предельную обобщённую надёжность системы ;

• вероятность  того, что до момента  отказов вообще не бу­дет.



**Рис. 7.40**

***Решение.***Система по-прежнему может быть только в двух состояниях:

 – работает,

 – выключена, восстанавливается один элемент (одновременный выход из строя двух или более элементов не рассматривается в силу ординарности потока отказов).

Граф состояний показан на рис. 7.40. Как видно, он отличается от графа на рис. 7.38 только тем, что вместо  стоит . Отсюда, на ос­нове решения предыдущей задачи,

, (7.10)

, (7.11)

. (7.12)

Иную картину мы получим, если предположим, что во время вос­становления одного элемента другие продолжают работать и могут выходить из строя.

**ЛЕКЦИЯ 9**

**Оценка показателей надёжности**

**9.1. Предварительные замечания**

В зависимости от физической природы этих систем коммуникационные каналы могут иметь либо вполне определённую материальную структуру, например нефтепроводы, железные дороги, системы электропередач и т.п., а могут быть чисто умозрительными, например трассы авиалиний и морских путей, направления радиосвязи и т.п. Однако и в том и в другом случае все эти системы обладают множеством сходных черт. Именно поэтому для математического описания таких столь различных по природе, назначению и принципу функционирования систем оказывается весьма удобным использовать математические модели, опирающиеся на теорию графов.

Какие задачи анализа надежности можно решать с использованием математического аппарата этой теории?

Во-первых, язык теории графов оказывается весьма естественным и удобным для описания структур многих технических систем. В основном это касается различных коммуникационных систем.

Во-вторых, представление структуры системы в виде графа является первым этапом составления математической модели (например, графы переходов служат непосредственной основой для составления соответствующих систем уравнений).

В-третьих, формулировка задачи в терминах графов позволяет использовать для ее решения уже имеющийся математический аппарат теории графов.

Долгое время теория графов была только чисто «языковым» средством. Однако последнее время она начинает использоваться в работах по надежности все более конструктивным образом.

Напомним, что графом называется совокупность вершин (узлов) и рёбер, связанных между собой. Строго говоря, графом называется абстрактная математическая система, состоящая из двух множеств – вершин и рёбер и отображения множества вершин в множество рёбер (отображения инцидентности). Таким образом, различные узлы графа связаны между собой (не обязательно все!) рёбрами. В каждый узел может входить или из узла может выходить несколько рёбер. В этом случае говорят о множестве рёбер, инцидентных данному узлу графа. Каждому ребру инцидентны два узла, расположенные на его концах. Сами ребра могут быть простыми и кратными, направленными и ненаправленными. Кратные ребра – это просто несколько (как правило, идентичных) рёбер, инцидентных одной и той же паре вершин. В противном случае ребра называются простыми. Сказанное относится в первую очередь к направленным рёбрам, которые также называются иногда дугами. Если по ненаправленному ребру допускается идентичная связь от одной вершины к другой, то для направленного ребра (дуги) один из узлов является источником, а второй – стоком и передача потока в обратном направлении по дуге невозможна. Если в конечном графе, т.е. в графе, включающем конечное число вершин, из любой вершины через конечное число рёбер (или дуг) можно попасть в любую другую вершину, то говорят о связности графа. Очень часто в прикладных задачах возникает понятие связности между собой двух выбранных вершин графа (одна из которых называется обычно начальной, а другая – конечной вершиной или входным и выходным полюсами соответственно).

Говоря о теории графов, мы имеем в виду классические теоретико-множественные модели, оставляя пока вне поля зрения так называемые линейные графы и различные специальные методы, связанные с ними. Мы будем рассматривать лишь графы, описывающие непосредственно структуры систем. Отметим также, что и сами структуры систем интересуют нас в первую очередь с позиции анализа надежности. В этом смысле можно говорить об одном специальном виде графов – ***случайных графах,*** т.е. о графах, ребра и/или вершины которых могут присутствовать или отсутствовать с определённой вероятностью. Одной из самых простых интерпретаций случайного графа является техническая система с сетевой структурой, у которой элементы, описываемые в математической модели вершинами и рёбрами, в процессе работы могут отказывать и восстанавливаться случайным образом.

Интерес к случайным графам вызван, с одной стороны, комбинатор­ной задачей подсчёта в некотором фиксированном классе доли графов, об­ладающих заданным свойством (например, связных), и, с другой стороны, стремлением понять принципы надёжной работы устройств, содержащих множество однотипных отказывающих элементов (например, контактные схемы или сети связи). Стандартное определение случайного графа тако­во. Фиксирован конечный неориентированный граф  с множе­ством вершин   и множеством рёбер ; случайное под­множество  определено условием, что события  независимы и имеют заданные вероятности ; требуемый случайный граф есть . В задачах подсчёта наиболее важен случай  (полный -вершинный граф) и  для всех , когда исходный класс есть совокуп­ность всех -вершинных графов без петель и кратных рёбер. Напротив, в технике основной проблемой является синтез – построение самого графа  по тем или иным требованиям надёжности. Условие  мы будет считать выполненным далее всюду, где специально не оговорено противное.

Если отвлечься от эволюции графа  во времени, то в фиксирован­ный момент  граф  может быть определён так:  есть под­граф полного графа  из  вершин, полученный путём случайного уничто­жения рёбер в *,* так что каждое ребро независимо от всех других уничто­жается с вероятностью  и оставляется с вероятностью .

Конечно, понятие работоспособности или отказа для конкретной системы зависит от многих различных факторов, поскольку критерий отказа зависит от назначения системы, вида выполняемых задач и т.п. Сами показатели надежности случайных графов – вероятность связности графа в целом, вероятность связанности пары выбранных вершин (полюсов) и т.п. могут быть недостаточными для многих реальных систем. Например, нарушением связности может служить не полное отсутствие связи между соответствующими вершинами, а снижение пропускаемого потока по сети между данными вершинами ниже некоторого заданного уровня. Однако если обратное не будет специально оговорено, мы сбудем рассматривать именно упрощённые показатели надежности типа вероятности связности.

**9.2. Математическая постановка задачи**

Во многих прикладных задачах (в особенности в задачах, связанных с нахождением различных показателей надежности технических систем со сложной структурой) возникает необходимость определения связности двухполюсных графов (сетей), поскольку именно такой вид имеют схемы расчёта надежности: у них есть два полюса – входной и выходной. Физически это можно интерпретировать как определение возможности прохождения некоторого сигнала от входа некоторой системы, характеризующейся сетевой структурой, к выходу.

При анализе надежности различных технических систем прежде всего вводится критерий отказа. На практике критерием отказа любой технической системы является нарушение способности этой системы выполнять своё назначение или несоответствие значений выходных параметров некоторым требованиям. При создании математической модели структуры технической системы критерий отказа обычно определяется через состояние элементов, составляющих данную систему. В этом случае каждый из элементов системы предполагается простейшим, т.е. считается, что он может находиться лишь в двух состояниях: работоспособности и отказа. Состояние системы определяется совокупностью состояний ее элементов: иначе говоря, критерий отказа позволяет все множество состояний элементов системы разделить на два подмножества – одно из них характеризуется состоянием работоспособности системы, а другое – состоянием отказа системы. (В этом случае анализ надежности системы со сложной структурой сводится к представлению системы в виде некоторого эквивалентного элемента.)

Перейдём к формальному описанию структур сложных систем с использование индикаторных функций.

Для обозначения состояния -го элемента системы введём индикаторную функцию



В ближайших разделах будем рассматривать состояния системы в некоторый фиксированный момент времени. В этом случае можно вместо индикаторных функций использовать обычные булевы переменные .

Состояние системы, состоящей из элементов, можно характеризовать -мерным вектором:

.

Понятно, что множество возможных состояний системы состоит из  различных состояний. В зависимости от конкретной структуры системы вое это множество состояний может быть разбито на два подмножества, соответствующие состояниям работоспособности и отказа системы в целом. Это соответствует тому, что на множестве задаётся определённая булева функция, которая в математической теории надежности часто называется структурной функцией:



Отметим очевидные свойства структурной функции: если , т.е. все , то ;если , т.е. все , то . Иными словами, если все элементы системы работоспособны, то и система работоспособна, а если все элементы системы отказали, то и система в целом находится в состоянии отказа.

Рассмотрим несколько простейших типовых структур систем и соответствующие им булевы структурные функции.

**9.3. Виды структур**

**9.3.1. Последовательная система**

В теории надежности последовательной называется такая система, отказ хотя бы одного элемента которой приводит к отказу всей системы (**рис. 9.1**).



**Рис. 9.1. Структура последовательной системы**

Очевидно, что такой критерий отказа соответствует тому, что подмножество состояний работоспособности последовательной системы состоит всего из одного состояния ,а все остальные состояния образуют подмножество состояний отказа. Структурная функция в этом случае примет вид

. (9.1)

Здесь через  обозначено логическое произведение булевых переменных, т.е.

.

Поскольку событие «работоспособность» эквивалентно событию «не отказ», можно записать (9.1) и в двойственном виде

 . (9.2)

Здесь через  обозначена логическая сумма булевых переменных, т. е.



Действительно, выражение, стоящее под общим оператором отрицания, представляет собой событие «произошёл отказ хотя бы одного элемента системы», т.е. произошёл отказ системы. Следовательно, это же событие, но с отрицанием означает, что отказ системы не произошёл.

**9.3.2. Параллельная система**

В теории надежности параллельной называется такая система, работоспособность хотя бы одного элемента которой обеспечивает работоспособность всей системы (**рис. 9.2**).

Сформулированный таким образом критерий отказа соответствует тому, что подмножество состояний отказа параллельной системы состоит всего из одного состояния:,а все остальные состояния образуют подмножество состояний работоспособности. Для параллельной системы структурная функция имеет вид

. (9.3)



**Рис. 9.2. Структура параллельной системы**

Используя понятие дополнительного события, вместо (4.3) можно записать следующее эквивалентное выражение:

 . (9.4)

***Замечание.*** В большинстве случаев в задачах исследования надежности технических систем структурная функция является хорошим отражением физического соединения элементов. Однако это наблюдается не всегда: например, параллельное в электрическом смысле соединение конденсаторов соответствует последовательному в смысле надежности соединению, если рассматривать отказы типа короткого замыкания (что наиболее характерно именно для этих радиоэлементов). Действительно, замыкание любого одного из параллельно включённых конденсаторов приводит к замыканию всего соединения, т.е. сразу же выводит его из строя.

**9.3.3. Последовательно-параллельная система**

Эта система представляет собой совокупность последовательных подсистем, соединённых параллельно (**рис. 9.3**). Пусть в системе имеется  последовательных подсистем, -я подсистема включает в свой состав элементы с индексами .Структурная функция такой системы

, (9.5)

или, используя эквивалентные двойственные выражения, ту же структурную функцию можно представить как

 , (9.6)

 , (9.7)

 . (9.8)



**Рис. 9.3. Структура последовательно-параллельной системы**

Последнее выражение оказывается при проведении практических расчётов показателей надежности наиболее удобным, как будет показано ниже.

**9.3.4. Параллельно-последовательная система**

Эта система представляет собой совокупность параллельных подсистем, соединённых последовательно (**рис. 9.4**). Пусть в системе имеется  параллельных подсистем, -я подсистема включает в свой состав элементы с индексами .

Структурная функция параллельно-последовательной системы

 , (9.9)

или при использовании эквивалентных двойственных выражений

 , (9.10)

 , (9.11)

 . (9.12)



**Рис. 9.4. Структура параллельно-последовательной системы**

**9.3.5. Системы с приводимой структурой**

К таким системам относятся системы, структура которых может быть получена при помощи следующей регулярной процедуры: рассматривается одиночный элемент, т.е. простейшая двухполюсная система; элемент заменяется на простейшую структуру (последовательную или параллельную); далее элемент в структуре, полученной на первом шаге, заменяется на соответствующую последовательную или параллельную структуру и т.д. В результате через некоторое число шагов может быть получена довольно сложная структура, которая, однако, путём соответствующих обратных трансформаций (т.е. путём замены отдельных чисто последовательных или чисто параллельных подсистем в этой системе некоторыми эквивалентными подсистемами) может быть опять сведена к простейшей двухполюсной системе, т.е. к элементу. Такие системы носят название систем с приводимой структурой.

Исходная система на первом шаге представляется в виде последовательной системы, состоящей в данном случае из трех последовательных элементов .Далее, элемент например, представляется в виде параллельного соединения двух элементов и ,т.е. каждому элементу приписывается второй индекс, соответствующий его номеру в подсистеме, которая характеризуется первым индексом процедура продолжается.

**9.3.6. Системы с неприводимой структурой**

В принципе любой двухполюсный граф (двухполюсная сеть) может быть построен следующим образом: задаётся множество вершин, две из которых назначаются полюсами графа, а между остальными строятся по некоторым правилам ребра (элементы системы в рассмотренных выше примерах).

На **рис. 9.5** показан пример графа, который не может быть получен с помощью указанной регулярной процедуры и который в то же время с помощью той же процедуры (но в обратном порядке) не может быть никак упрощён. Этот граф представляет собой пример простейшего неприводимого графа – это так называемая «мостиковая схема».



**Рис. 9.5. Простейшая неприводимая структура: мостиковая схема**

Следует заметить, что для двухполюсного графа, имеющего менее пяти рёбер, не удаётся построить ни одной неприводимой структуры. Для графа из пяти рёбер можно построить всего одну такую структуру. С ростом размерности графа доля неприводимых структур в общем числе возможных структур резко возрастает. Вообще говоря, с ростом числа рёбер в двухполюсном графе доля таких структур стремится к единице.

Для неприводимых структур не удаётся построить структурных функций столь же просто, как это удавалось для графов с приводимой структурой. Для неприводимых структур структурную функцию удобно записывать, вводя понятия путей и разрезов.

**ЛЕКЦИЯ 10**

**10.1. Пути и разрезы двухполюсника**

**10.1.1. Пути двухполюсника**

Путём в ненаправленном двухполюсном графе будем называть такое подмножество его рёбер, которое позволяет, переходя от одного ребра к другому через инцидентную им обоим вершину, пройти от одного полюса графа к другому. Понятно, что путей в двухполюсном графе может быть в общем случае достаточно много, причём путь может включать и петли, т.е. в общем случае путь может более одного раза проходить через одну и ту же вершину. Формально в путь могут включаться и «висячие» ребра. Один путь имеется только в последовательной системе, причём подмножество рёбер, образующих путь, совпадает со всем множеством рёбер. В параллельной системе путём является все множество рёбер и любое непустое его подмножество.

При анализе связности двухполюсных графов удобнее использовать понятие минимального пути. Минимальным путём двухполюсного графа называется такое подмножество его рёбер, которое позволяет, переходя от одного ребра к другому через инцидентную им обоим вершину, пройти от входного полюса к выходному, но исключение хотя бы одного любого ребра из этого подмножества приводит к тому, что оставшееся подмножество рёбер уже не является путём. Иначе говоря, минимальный путь – это путь без петель (циклов) и без «висячих» рёбер. Точнее было бы называть такой путь не минимальным, а простым, но мы будем в тексте следовать той терминологии, которая в настоящее время чаще используется в теории надежности.

Из этого определения следует, что минимальный путь представляет собой последовательное соединение некоторых рёбер графа, причём «крайние» ребра этого соединения инцидентны соответственно входному и выходному полюсам. Следовательно, если через обозначить подмножество рёбер, образующих -й минимальный путь, то структурную функцию этого минимального пути  можно записать в виде

. (10.13)

В частности, в последовательной системе минимальным путём является множество всех её рёбер, а в параллельной системе каждый минимальный путь состоит всего из одного ребра, а число таких минимальных путей равно числу рёбер в системе.

Из приведённых определений ясно, что связность двухполюсного графа обеспечивается наличием хотя бы одного пути (или минимального пути) в графе.

Структурную функцию двухполюсного графа можно выразить через структурные функции путей следующим образом:

. (10.14)

где – число минимальных путей в графе.

Окончательно для структурной функции можно записать

. (10.15)

За внешней простотой этой записи скрывается сложность перечисления минимальных путей в двухполюсном графе произвольной структуры. (Перечисление минимальных путей – вопрос особый и здесь не рассматривается.) Кроме того, вычисление различных характеристик таких сетей на основании записанной структурной функции сопряжён с определёнными трудностями в связи с тем, что в общем случае в состав различных минимальных путей могут входить одни и те же ребра, т.е. пути оказываются зависимыми друг от друга.

**Пример 10.1.** Рассмотрим простейшую неприводимую структуру – мостиковую схему **(рис. 9.5**). Перечислим её минимальные пути:

.

Видно, что пути и включают одно и то же ребро , пути и  – ребро , пути и – ребро , пути и – ребро ,пути и – ребро .Иначе говоря, указанные пары путей взаимно зависимы.

Просто путями являются любые подмножества всех рёбер рассматриваемого графа, включающие любой минимальный путь. Например,  есть путь графа, если , т.е. такими путями могут быть





В частности, – полный граф.

**10.1.2. Разрезы двухполюсника**

Разрезом ненаправленного двухполюсного графа называется такое подмножество его рёбер, удаление которых из графа разрывает все пути этого графа. В этом случае, как и в случае с путями, различных разрезов в графе может быть много. Единственный разрез имеется только в параллельной системе, причём подмножество рёбер, образующих этот разрез, совпадает со всем множеством рёбер графа. В последовательной системе разрезом является любое непустое подмножество рёбер, в том числе и все множество рёбер системы.

При анализе связности удобнее использовать понятие минимального разреза. Минимальным разрезом двухполюсного графа называется такое подмножество его рёбер, удаление которых из графа разрывает все пути графа, но введение хотя бы одного любого из рёбер этого подмножества приводит к образованию хотя бы одного пути.

Из этого определения следует, что минимальный разрез есть параллельное соединение некоторых рёбер графа. Обозначим через подмножество рёбер, образующих *-*йминимальный разрез; тогда структурную функцию минимального разреза можно записать в виде

 (10.16)

Заметим, что в параллельной системе минимальным разрезом является множество всех её рёбер, а в последовательной системе каждый минимальный разрез состоит всего из одного ребра, а число таких минимальных разрезов равно числу рёбер в системе.

Из определения разреза (и минимального разреза) следует, что для нарушения связности двухполюсного графа достаточно исключения рёбер, принадлежащих хотя бы одному минимальному разрезу, или, говоря в терминах сохранения связности графа, в нем не должно быть ни одного разреза, чтобы он был связным.

Структурную функцию двухполюсного графа можно выразить через структурные функции разрезов в виде

 (10.17)

где – число минимальных разрезов в графе.

Различные минимальные разрезы могут быть зависимы, если в их состав входят одни и те же ребра.

Так же отметим, что перечисление минимальных разрезов графа представляет собой достаточно сложную и в вычислительном плане трудоёмкую задачу.

**Пример 10.2.** Рассмотрим опять, как и в **примере 10.1**, мостиковую схему (**рис. 9.5**). Перечислим её минимальные разрезы:

.

Видно, что разрезы  и включают одно и то же ребро ,разрезы и  – ребро ,разрезы и – ребро , разрезы и – ребро ,разрезы и – ребро .

Просто разрезами являются любые подмножества всех рёбер рассматриваемого графа, включающие любой минимальный разрез. Например, есть разрез графа, если , т.е. такими разрезами могут быть



В частности,  – множество всех рёбер исходного графа.

***Замечание.*** Множество рёбер, составляющих минимальный разрез, может совпасть с множеством рёбер, составляющих минимальный путь. Так, для мостиковой схемы и . Однако в общем случае для графов большой размерности такое совпадение является событием достаточно исключительным.

**10.5. Граничные оценки показателей связности**

Вычисление различных показателей связности, например вероятности связности при условии случайного существования рёбер графа, на практике сталкивается со значительными вычислительными трудностями, поскольку решение указанной задачи сводится фактически к прямому перебору. В то же время, используя пути и разрезы графа, удаётся получать достаточно простые (по сравнению с точными методами нахождения соответствующих характеристик) граничные – верхнюю и нижнюю – оценки требуемого показателя.

**10.5.1. Дополнительные сведения**

Первые результаты были получены для оценок вероятности связности двухполюсного графа с ненадёжными рёбрами. Иными словами, рассматривался граф, ребра которого могут существовать или исключаться из графа с определёнными вероятностями (отказы рёбер предполагались независимыми).

Предварительно введём понятие связанных случайных величин. Случайные величины называются связанными, если



и



или в частном случае



и

.

Иными словами, связанность случайных величин можно понимать как одну из форм положительной корреляции. В данном контексте сначала будем иметь дело лишь с бинарными случайными величинами, т.е. с величинами, принимающими лишь два значения: 1 и 0. Пути и разрезы (в том числе и минимальные) в графе могут быть зависимыми из-за того, что в их состав могут входить одни и те же ребра. В этом случае как раз имеется связанность соответствующих структурных функций и для всех или и  для всех .

Такого же рода зависимость возникает, если, например, все элементы какого-либо устройства одновременно подвергаются одному и тому же внешнему воздействию: тогда показатели надежности всех элементов ухудшаются одновременно. Можно привести и другие более сложные физические примеры такой зависимости.

Если и связанные случайные величины, принимающие значения 1 с вероятностями  и соответственно, то структурная функция вида принимает значение 1 с вероятностью

,

где – ковариация случайных величин и ,являющаяся неотрицательной величиной для положительно коррелированных случайных величин.

Приведённое выше понятие можно легко обобщить на случай связанных случайных величин

 (10.18)

Заметим также, что для двоичных случайных величин вероятность совпадает с математическим ожиданием этой величины. Действительно,



Естественно, что при рассмотрении дизъюнкции связанных булевых переменных можно записать



но поскольку



получаем окончательно

 (10.19)

Теперь, используя эти дополнительные сведения, перейдём к получению непосредственно граничных оценок для вероятности связанности двухполюсной сети.

**10.5.2. Оценки Эзари-Прошана**

 Граничные оценки для вероятности связности двухполюсного графа получаются, если рассмотреть структурные функции (10.15)  и (10.17) , записанные соответственно для параллельного соединения минимальных путей и последовательного соединения минимальных разрезов и учесть при этом неравенства (10.18) и (10.19)  и  для связанных булевых переменных. Действительно,



и, поскольку события  для всех  являются положительно коррелированными (отказы различных путей зависимы из-за того, что подмножества элементов, составляющих различные пути могут пересекаться), можем записать, используя неравенство (10.18) 

 (10.20)

Итак, окончательно имеем



Таким образом, использование структурной функции неприводимого графа в виде параллельного соединения минимальных путей с учётом неравенства (10.18) даёт верхнюю оценку для вероятности связности.

Нижняя оценка получается, если использовать второе представление структурной функции неприводимого графа

 (10.21)

Таким образом, двусторонние оценки Эзари-Прошана, которые мы обозначим  и  соответственно, имеют вид

