Моделирование сложных систем

Модуль №2. Введение в СМО. Входящие потоки

Фетисов Михаил Вячеславович

fetisov.michael@bmstu.ru

fetisov.michael@yandex.ru

1. Введение в СМО

- Системы и сети массового обслуживания являются объектами изучения теории массового обслуживания (ТМО) – одного из бурно развивающихся разделов теории вероятностей
- В качестве систем массового обслуживания (СМО) и состоящих из них сетей массового обслуживания (СеМО) рассматриваются разнообразные системы, предназначенные для обслуживания массового потока требований случайного характера
- К настоящему времени разработаны относительно простые математические модели, позволяющие изучать многие внешне различающиеся реально протекающие процессы обслуживания на транспорте, в промышленном производстве, образовании, медицине, военном деле, торговле, телефонии, компьютерных сетях и т.д.
- Конечная цель развиваемых в ТМО методов состоит в отыскании рациональных структуры и параметров обслуживающей системы, организации обслуживания, обеспечивающих заданное его качество.

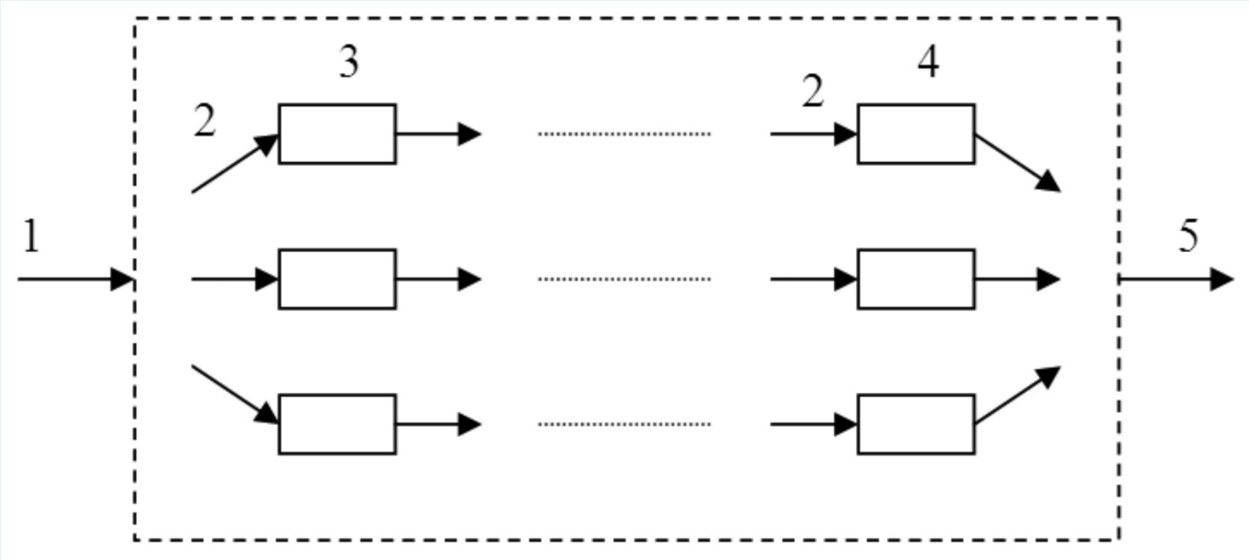
История

- Становление ТМО было вызвано интересом к математическим задачам телефонии датского инженера А. К. Эрланга, первые публикации которого относятся к началу 20 века.
- Теоретической базой ТМО послужила теория случайных процессов, основоположником которой явился А. А. Марков.
- В середине 20 века ТМО получила дальнейшее развитие в работах К. Пальма, Ф. Поллачека, А. Я. Хинчина, которому принадлежит сам термин «ТМО». Значительный вклад в изучение СМО и СеМО внесли Б. В. Гнеденко, Д. Кендэлл, А. А. Боровков и другие.

1.1 Основные понятия СМО

- **ТМО** – раздел теории вероятностей, изучающий СМО
- **СМО** – системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы на выполнение каких-либо видов услуг, а, с другой стороны, происходит удовлетворение этих запросов.
- Каждая СМО включает некоторое число обслуживающих устройств – **каналов (приборов, линий) обслуживания**.
- На вход СМО поступает один или несколько **потоков запросов** (заявок, требований, клиентов), требующих однотипного обслуживания.

Основные элементы СМО



- Входящий поток требований (1)
- Очередь (2)
- Каналы обслуживания (3, 4)
- Выходящий поток обслуженных требований (5).

Если часть требований, поступивших в систему, по каким-либо причинам не проходят обслуживания, то они образуют выходящий поток необслуженных требований.

Случайный характер поступления требований

- Как правило, момент поступления очередного требования и длительность его обслуживания точно не заданы и представляют собой случайные величины
- Случайный характер потока требований и времени их обслуживания приводит к неравномерной загрузке каналов и образованию очередей
- Период от момента поступления требования в СМО и до начала обслуживания называется **временем ожидания обслуживания**
- Время ожидания обслуживания в совокупности с временем обслуживания составляет **время пребывания требования в системе**.

Примеры СМО

- Функционирование аэропорта; требования – прилетающие и убывающие пассажиры
- Функционирование ВПП аэродрома, требования – воздушные суда, требующие посадки или взлета
- Автоматизированные информационные системы; требования – запросы на получение информации
- Агентства по продаже билетов; требования – пассажиры
- Справочная телефонная служба; требования – запросы на получение справочной информации
- Работа ЭВМ в режиме разделения времени; требования – программы, обрабатываемые ЭВМ
- Планирование и проведение военных операций; требования — запросы на поддержку (БПЛА, артилерия, авиации), выдача амуниции и т.д.

Для полного описания СМО необходимо задать:

- **Модель входящего потока требований**, включающую вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание и количество требований в каждом очередном поступлении (могут поступать как единичные, так и групповые требования).
- **Дисциплину обслуживания** – принцип, в соответствии с которым поступающие в систему требования выбираются из очереди для обслуживания. Например:
  - первым пришел – первым обслужился;
  - последним пришел – первым обслужился;
  - случайный отбор заявок;
  - отбор заявок по критерию приоритетности;
  - ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания.
- **Механизм обслуживания**, включающий вероятностное распределение продолжительности обслуживания, количество одновременно обслуживаемых требований, вероятность выхода из строя обслуживающего аппарата и т.п.

Эффективность функционирования СМО

- СМО обладает определенной эффективностью функционирования, позволяющей ей справляться с потоком заявок.
- Эффективность зависит от параметров СМО:
  - характера потока заявок,
  - числа каналов обслуживания,
  - производительности каналов обслуживания,
  - правил организации работы.

Цель ТМО

- **Цель ТМО** – выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования СМО
- Для достижения этой цели ставятся задачи ТМО, состоящие в установлении зависимостей эффективности функционирования СМО от ее параметров.

1.2 Показатели эффективности функционирования СМО (три группы) 1/2

- 1. Показатели эффективности использования СМО:
  - 1.1. Абсолютная пропускная способность СМО – среднее число требований, которое СМО может обслужить в единицу времени.
  - 1.2. Относительная пропускная способность СМО – отношение среднего числа требований, обслуживаемых СМО в единицу времени, к среднему числу требований, поступивших за это же время.
  - 1.3. Коэффициент использования СМО – средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием требований, и т. п.

1.2 Показатели эффективности функционирования СМО (три группы) 2/2

- 2. Показатели качества обслуживания требований.
  - 2.1. Среднее время ожидания требованием в очереди.
  - 2.2. Среднее время пребывания требования в СМО.
  - 2.3. Вероятность отказа требованию в обслуживании.
  - 2.4. Вероятность того, что поступившее требование немедленно будет принято к обслуживанию.
  - 2.5. Закон распределения времени ожидания требования в очереди.
  - 2.6. Закон распределения времени пребывания требования в СМО.
  - 2.7. Среднее число требований, находящихся в очереди.
  - 2.8. Среднее число требований, находящихся в СМО, и т.п.
- 3. Показатели эффективности функционирования пары «СМО-потребитель», где «потребитель» – вся совокупность заявок или некий их источник. Например, доходы или прибыль от использования СМО.

1.3 Классификация СМО

- СМО классифицируются по следующим признакам:
- 1) число фаз обслуживания:
  - – однофазовые;
  - – многофазовые.
- 2) число каналов обслуживания:
  - – одноканальные;
  - – многоканальные. В свою очередь подразделяются на:
    - – полнодоступные – имеющие однородные (с одинаковыми характеристиками) каналы;
    - – неполнодоступные – имеющие неоднородные каналы.
- 3) тип входящего потока требований:
  - – с простейшим (пуассоновским) потоком;
  - – с входящим потоком иного типа.

Классификация СМО (продолжение)

- 4) вероятностные характеристики времени обслуживания:
  - – со случайным временем обслуживания;
  - – с фиксированным постоянным временем обслуживания.
- 5) характер случайного процесса, происходящего в СМО:
  - – Марковские – СМО, в которых входящий поток требований является пуассоновским и время обслуживания подчинено показательному закону (позволяют легко описать и построить математическую модель, имеют простые решения)
  - – Немарковские СМО – как правило, требуют применения статистического моделирования с использованием ЭВМ.

Классификация СМО (продолжение)

- 6) наличие возможности ожидания обслуживания:
  - – с отказами, в которых заявка, поступившая в СМО в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает очередь;
  - – с ожиданием, в которых заявка становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов. В свою очередь подразделяются на СМО с:
    - – ограниченным ожиданием. Ограничения по длине очереди или по времени ожидания в очереди;
    - – неограниченным ожиданием.
- 7) наличие приоритетов обслуживания:
  - – без приоритетов;
  - – с приоритетами.
- 8) наличие ограничений потока требований:
  - – замкнутые – СМО с ограниченным потоком требований, в которых обслуженные требования могут возвращаться в СМО;
  - – открытые.

Система обозначений Кендэлла

- Используется система обозначений СМО, введенная Д. Кендэллом, в соответствии с которой СМО обозначаются как **A / B / n / R**,
  - где A – распределение интервалов времени между требованиями, B – распределение времени обслуживания, n – число каналов, R – предельное число требований в очереди или в системе (если $R \to \infty$, то R не указывают).
- Обозначения некоторых типов распределений:
  - M – показательное;
  - E_k – эрланговское порядка k;
  - D – детерминированное (постоянное).
- Пример: M / M / 1 – одноканальная СМО с простейшим входящим потоком, показательно распределенным временем обслуживания и неограниченной очередью.

2 Входящие потоки требований и их свойства
2.1 Входящий поток

- **Поток событий** – последовательность однородных событий, следующих одно за другим через какие-то, вообще говоря, случайные интервалы времени
- **Однородные события** – события, различающиеся только моментами появления
- Примеры потоков событий: последовательность вызовов на телефонной станции, последовательность ВС, входящих в воздушное пространство диспетчерского пункта, поток прибывающих в аэропорт пассажиров, поток неисправностей в ЭВМ.

Регулярный поток

- Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ – моменты наступления событий, $t_k \geq t_{k-1}$, $k \geq 1$.
- Поток событий считается заданным, если задана последовательность интервалов времени между последовательными моментами наступления событий – $\{ T_k = t_k - t_{k-1}, k \geq 1, t_0 = 0 \}$.
- **Регулярный поток** – поток, в пределах которого события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени: $T_k = const$, $\forall k \geq 1$.
- Физически самый простой поток (пример, движение заготовок по конвейеру). Сложен для математического исследования.

Простейший поток, стационарность

- **Простейший поток** – поток, удовлетворяющий требованиям стационарности, ординарности и отсутствия последействия.
- **Поток стационарный**, если вероятность попадания некоторого числа событий на участок времени Δt зависит только от длины участка и не зависит от его расположения на оси временной оси:
  $P_k(t, t+\Delta t) = P_k(\Delta t)$, где $P_k(\Delta t)$ – вероятность попадания k событий на интервал Δt .
- Для стационарного потока среднее число событий, воздействующих на систему в течение единицы времени, остается постоянным.
- Реальные потоки событий являются в действительности стационарными лишь на ограниченных участках времени.

Ординарность, отсутствие последствий

- **Поток ординарный**, если вероятность попадания на элементарный участок времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события $P_{k>1}(t, t+\Delta t) \ll P_{k=1}(t, t+\Delta t)$.
- Ординарность означает, что события в потоке поступают поодиночке, а не группам
- **Отсутствие последействия** – свойство потока, состоящее в том, что для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени
- Это свойство означает, что события появляются независимо друг от друга.

Нестационарный пуассоновский поток

- **Нестационарный пуассоновский поток** – поток ординарный, без последействия, но не стационарный.

Поток Эрланга

- **Поток Эрланга** – поток, образующийся путем просеивания простейшего потока. Если в простейшем потоке сохранить каждую k-ю точку, удалив все остальные, то образуется поток Эрланга.
- Большинство простых аналитических моделей СМО получено при наличии простейшего потока требований.

2.2 Вероятностное распределение числа требований в простейшем потоке

- Найдем для простейшего потока ***распределение вероятностей поступления в СМО того или иного числа X(t) требований за некоторый интервал времени t***.
- Обозначим $P\{X(t) = k\} = V_k(t)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь $V_k(t)$ – вероятность того, что за промежуток времени (0, t) при t > 0 поступит k требований. Таким образом, необходимо найти систему функций $V_0(t), V_1(t), V_2(t), \ldots$.
- Введем малый промежуток времени Δt, такой, что вероятности попадания двух и более требований на Δt ничтожно малы:
  $V_k(\Delta t) \approx 0$, k = 2, 3,… .
- Вероятность отсутствия требований в течение Δt определяется в силу условия нормировки $\sum_{k=0}^{\infty} V_k(\Delta t) = 1$, как $\mathbf{V_0(\Delta t) \approx 1 - V_1(\Delta t)}$. (2.2.1)

Теорема (о вероятности поступления одного требования на элементарный интервал времени для стационарного потока)

- Чтобы найти вероятность $V_1(\Delta t)$ попадания одного требования на Δt, используем следующую теорему.
- Для любого стационарного потока существует предел

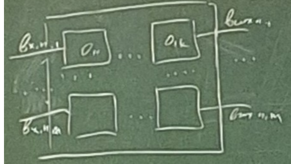
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_1(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda > 0$$

где λ – параметр потока (интенсивность потока, т.е. число требований в единицу времени). Откуда

- $V_1(\Delta t) \approx \lambda \Delta t$ (2.2.2)

Вывод на доске

СМО



Стационарный поток

$P_k(t, t+\Delta t) = P_k(\Delta t)$ – вер-ность попадания k событий на инт. Δt

Ординарный поток

$P_{k>1}(t, t+\Delta t) \ll P_{k=1}(t, t+\Delta t)$

Вероятность распределения числа требований в прост. потоке – нужно найти [illegible] $V_0, V_1, V_2 \ldots$

Прост. поток – стац., орд., без посл.

$P\{x(t)=k\} = V_k(t)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ – вер-сть пост. на $[0,t]$ k соб.

Δt, $V_k(\Delta t) \approx 0$, $k = 2, 3 \ldots$ $\quad \sum\limits_{k=0} V_k(\Delta t) = 1$, $\quad V_0(\Delta t) \approx 1 - V_1(\Delta t)$

$V_1(\Delta t)$. $\quad \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{V_1(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda > 0$, λ – инт. потока. Т. о. $V_1(\Delta t) \approx \lambda \Delta t$

Теорема полной вер-сти

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B/A_i)$$

$$V_0(t+\Delta t) = V_0(t) V_0(\Delta t) \approx V_0(t)(1 - \lambda \Delta t)$$

$V_k(t+\Delta t)$, $k>0$

$$V_k(t+\Delta t) = V_k(t) V_0(\Delta t) + V_{k-1}(t) V_1(\Delta t) + V_{k-2}(t) \underbrace{V_2(\Delta t)}_{\approx 0} + \ldots$$

$$\approx V_k(t)(1 - \lambda \Delta t) + V_{k-1}(t) \lambda \Delta t$$

$$V_k = \sum_{i=0}^{k} V_i(t) V_{k-i}(\Delta t) \quad V_0(\Delta t) \quad V_1(\Delta t)$$

$$\frac{V_k(t+\Delta t) - V_k(\Delta t)}{\Delta t} \approx -\lambda V_k(t) + \lambda V_{k-1}(t)$$

$$\boxed{\frac{dV_0(t)}{dt} = -\lambda V_0(t) \qquad \frac{dV_k(t)}{dt} = -\lambda V_k(t) + \lambda V_{k-1}(t), \ k>0}$$

$V_0(0) = 1$, $V_k(0) = 0$, $k>0$

$$V_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$V_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$V_2(t) = \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}$$

$$V_3(t) = \frac{(\lambda t)^3 e^{-\lambda t}}{6}$$

$$\boxed{V_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}}$$

Простой поток
Вероятность поступления требований

- Для простейшего потока **вероятность поступления** того или иного числа требований подчиняется закону Пуассона.

$$V_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

Проверка потока требований на принадлежность к простейшим

- Большинство моделей ТМО справедливы только в случае простейшего входящего потока требований
- Поэтому перед использованием этих моделей необходимо проверить поток на его принадлежность к простейшим
- Для выполнения проверки может быть использован, например, критерий согласия Пирсона χ^2.

Порядок проверки по критерию Пирсона

- Интервал времени, в течение которого поток предполагается стационарным, разбивается на промежутки Δt и подсчитывается число требований, фактически поступивших в каждый промежуток
- Подсчитывается фактическое число промежутков n_k с одинаковым количеством требований, равным k, и общее число промежутков $$n = \sum_k n_k$$
- По полученным данным определяется приближенное (выборочное) значение интенсивности потока: $$\lambda^* = \frac{1}{n\Delta t}\sum_k k n_k$$

Порядок проверки по критерию Пирсона (продолжение)

- По закону Пуассона вычисляется вероятность числа требований k в течение Δt :

$$P_k(\Delta t) = \frac{(\lambda^* \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda^* \Delta t}$$

- С использованием теоретического числа промежутков nP_k , соответствующего закону Пуассона, вычисляется величина χ^2:

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(n_k - nP_k)^2}{nP_k}$$

Порядок проверки по критерию Пирсона (продолжение)

- Величина χ^2 сравнивается с критическим значением квантиля χ^2-распределения – $K^{-1}(p, m)$.
- Если $\chi^2 < K^{-1}(p, m)$ – гипотеза принимается. В случае $\chi^2 \geq K^{-1}(p, m)$ гипотеза отвергается.
- $K^{-1}(p, m)$ определяется по таблице квантилей χ^2-распределения в зависимости от доверительной вероятности p и числа степеней свободы m. Для определения m используется формула: $\boldsymbol{m = l - r - 1}$, где l – количество величин k (классов), r – число параметров распределения.
- Распределение Пуассона полностью определяется одним параметром, поэтому r = 1 .
- Значением вероятности ***p*** задаются.
- Как правило, принимают p = 0 .99 , 0.95 и 0.9 (наиболее жесткое).

Квантиль нормального распределения

- **Кванти́ль** в математической статистике — значение, которое заданная случайная величина не превышает с фиксированной вероятностью
- Если вероятность задана в процентах, то квантиль называется **процентилем** или **перцентилем**
- Например, фраза «90-й процентиль массы тела у новорожденных мальчиков составляет 4 кг»[1] означает, что 90 % мальчиков рождаются с весом, меньшим либо равным 4 кг, а 10 % мальчиков рождаются с весом, большим либо равным 4 кг.

Распределение $\chi 2$ Пирсона

Квантили χ^2 - распределения $K^{-1}(p; m)$								
m	p							
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99	0.999
1	0.016	0.148	0.455	1.074	2.706	3.841	6.635	10.827
2	0.211	0.713	1.386	2.408	4.605	5.991	9.210	13.815
3	0.584	1.424	2.366	3.665	6.251	7.815	11.345	16.266
4	1.064	2.195	3.357	4.878	7.779	9.488	13.277	18.466
5	1.610	3.000	4.351	6.064	9.236	11.070	15.086	20.515
6	2.204	3.828	5.348	7.231	10.645	12.592	16.812	22.457
7	2.833	4.671	6.346	8.383	12.017	14.067	18.475	24.321
8	3.490	5.527	7.344	9.524	13.362	15.507	20.090	26.124
9	4.168	6.393	8.343	10.656	14.684	16.919	21.666	27.877
10	4.865	7.267	9.342	11.781	15.987	18.307	23.209	29.588
11	5.578	8.148	10.341	12.899	17.275	19.675	24.725	31.264
12	6.304	9.034	11.340	14.011	18.549	21.026	26.217	32.909
13	7.041	9.926	12.340	15.119	19.812	22.362	27.688	34.527
14	7.790	10.821	13.339	16.222	21.064	23.685	29.141	36.124
15	8.547	11.721	14.339	17.322	22.307	24.996	30.578	37.698
16	9.312	12.624	15.338	18.418	23.542	26.296	32.000	39.252
17	10.085	13.531	16.338	19.511	24.769	27.587	33.409	40.791
18	10.865	14.440	17.338	20.601	25.989	28.869	34.805	42.312
19	11.651	15.352	18.338	21.689	27.204	30.144	36.191	43.819
20	12.443	16.266	19.337	22.775	28.412	31.410	37.566	45.314

Вероятностное распределение промежутка времени между требованиями в простейшем потоке

- Формула (2.2.17) позволяет получить **распределение вероятностей промежутка времени Т между двумя последовательными моментами поступления требований**.
- При $k = 0$ вероятность $V_0(t)$ по определению равна вероятности $P(T > t)$ того, что СВ T превзойдет t:

$$V_0(t) \equiv P(T > t)$$

- Откуда функция распределения вероятностей промежутка T

$$F(t) = P(T < t) = 1 - P(T > t) = 1 - V_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Вероятностное распределение промежутка времени между требованиями в простейшем потоке (продолжение)

- Плотность распределения вероятностей

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

- Таким образом, длительность интервала между двумя последовательными моментами поступлений требований в простейшем потоке имеет показательное распределение.

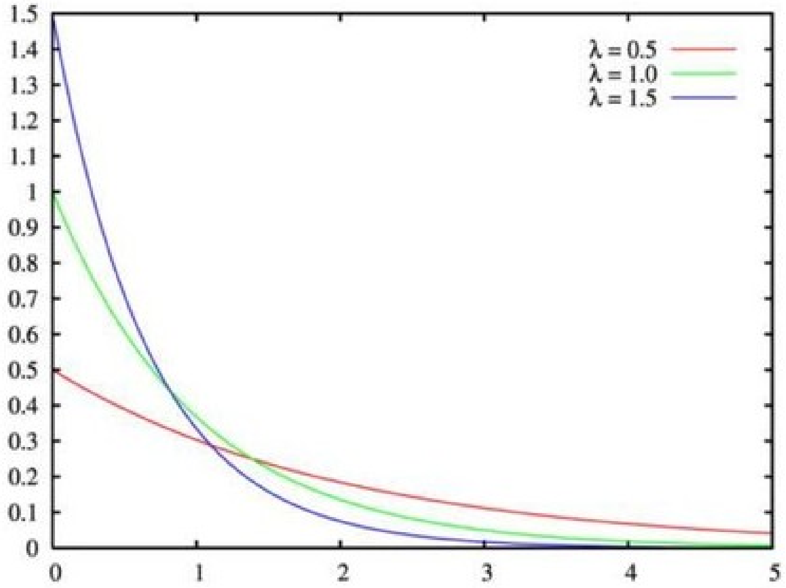
Экспоненциальное (показательное) распределение

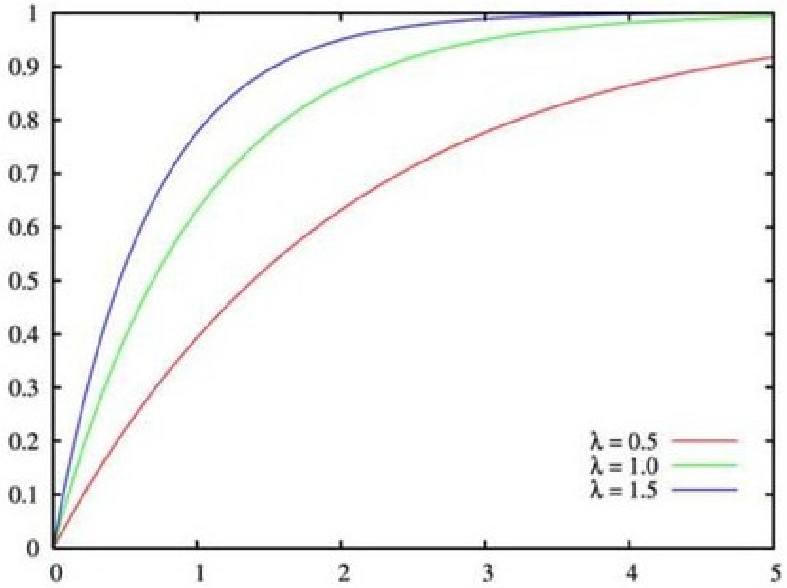
Функция вероятности

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Функция распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$





Вопросы?

Фетисов Михаил Вячеславович

fetisov.michael@bmstu.ru

fetisov.michael@yandex.ru