Моделирование сложных систем

СМО. Процесс обслуживания. Системы с отказами. Очередь ограниченной длинны.

Фетисов Михаил Вячеславович
fetisov.michael@bmstu.ru
fetisov.michael@yandex.ru

3 Процесс обслуживания и его свойства
3.1 Характеристики механизма обслуживания

- **Дисциплина обслуживания** – принцип, определяющий порядок выбора требований для обслуживания из совокупности требований, уже поступивших и находящихся в очереди. Примеры дисциплин обслуживания приведены в п.1.1.
- **Пропускная способность СМО** – максимальное число требований, которые могут обслуживаться одновременно. Например, для n-канальной СМО пропускная способность равна n.
- **Доступность обслуживания** – ограничения, снижающие число требований, которые могут обслуживаться одновременно, по сравнению с полной пропускной способностью системы. СМО может быть не полностью доступна, если некоторые из каналов периодически отключаются, или работают не так как другие.
- **Длительность обслуживания** – промежуток времени, затраченный на обслуживание отдельного требования t об . Используемые вероятностные распределения $t_{об}$:
  - постоянная длительность обслуживания: $t_{об} = const$.
  - показательное распределение $t_{об}$ (подробнее далее)
  - распределение Эрланга. Используется, когда процесс обслуживания можно разбить (пусть условно) на несколько этапов, продолжительность каждого из которых подчинена показательному распределению.

Характеристики механизма обслуживания Показательное распределение $t_{об}$

- Если плотность распределения t об можно с достаточной точностью описать функцией вида

$$f(t_{об}) = \nu e^{-\nu t_{об}},$$

то это приводит к значительному упрощению моделей СМО.

- Для показательного распределения

$$M[t_{об}] = \frac{1}{\nu},$$

где ν – параметр распределения, смысл которого определяется формулой

$$\nu = \frac{1}{M[t_{об}]}.$$

- Таким образом ν – интенсивность обслуживания.
- Показательное распределение используется в случаях, когда с ростом времени обслуживания, доля заявок, требующих таких затрат времени, снижается.

3.2 Вероятностные характеристики времени обслуживания

- Показательно распределенное время обслуживания обладает одним важным свойством. Докажем, что при показательном законе распределения времени обслуживания закон распределения оставшейся части времени обслуживания не зависит от того, сколько оно уже длится.
- Введем следующие обозначения:
  - $F(t) = P(t_{об} < t)$ – функция распределения времени обслуживания $t_{об}$.
  - $P_0(t) = P(t_{об} \geq t)$ – вероятность того, что время обслуживания $t_{об}$ будет не меньше t.
- Очевидно $P(t_{об} < t) + P(t_{об} \geq t)$, поэтому $\boldsymbol{P_0(t) = 1 - P(t_{об} < t)}$. (3.2.1)
- Для показательного закона времени обслуживания $F(t) = 1 - e^{-vt}$.
- Из (3.2.1) с учетом последней формулы имеем $\boldsymbol{P_0(t) = e^{-vt}}$. (3.2.2)
- (далее см. на доске)

4 Системы с отказами
4.1 Вероятности состояний СМО с отказами

- **СМО с отказами (или потерями, или без очереди)** – системы, в которых требования, поступившие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ, покидают систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвуют. Рассматривается СМО из п однотипных аппаратов с отказами (примеры: автоматическая телефонная станция, камера хранения аэровокзала). Каждый аппарат может одновременно обслуживать только одно требование. Время обслуживания одного требования одним аппаратом подчинено показательному закону с параметром ν, т.е. вероятность того, что время обслуживания $t_{об}$ меньше t, равна $\boldsymbol{P(t_{об} < t) = F(t) = 1 - e^{-\nu t}}$.
- В СМО поступает пуассоновский (не обязательно простейший) поток требований с параметром λ – математическим ожиданием числа требований за единицу времени.

Основные показатели функционирования СМО с отказами

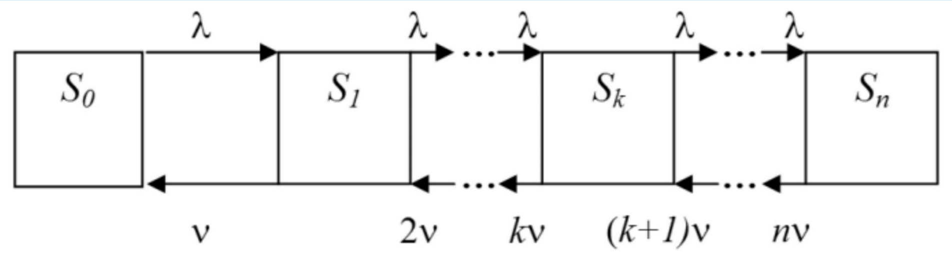
- вероятность отказа, т. е. вероятность того, что в момент поступления очередного требования все обслуживающие аппараты заняты. Характеризует полноту обслуживания входящего потока;
- среднее число аппаратов, занятых обслуживанием. Характеризует степень загрузки обслуживающей системы.
- Цель – вывод формул для вычисления основных показателей функционирования СМО.

СМО с отказами может находиться в одном из $n + 1$ состояний, обозначаемых S_i:

- S_0 – все приборы свободны, требований в системе нет;
- S_1 – один прибор занят обслуживанием требования, остальные свободны;
- S_k – k приборов заняты, остальные свободны;
- S_n – все n приборов заняты обслуживанием.
- В других состояниях система находиться не может, т.к. они предполагают наличие очереди.

Граф состояний СМО с отказами

- Для анализа СМО используется **граф состояний** – геометрическая схема, изображающая все возможные состояния СМО и ее вероятностные переходы из одного состояния в другое. По размеченному графу состояний можно составить СДУ, описывающих вероятности этих состояний – уравнения Колмогорова.



Граф состояний СМО с отказами (продолжение)

- В графе квадраты – возможные состояния СМО, стрелки – направления возможных переходов.
- СМО не может «перескакивать» через одно и более состояний т.к. входящий поток ординарный, т.е. требования появляются в СМО и покидают ее поодиночке.
- Интенсивность входящего потока требований равна λ для всех переходов СМО из одного состояния в другое.
- Интенсивность обслуживания равна величине ν, умноженной на число занятых приборов. Предельное значение интенсивности обслуживания nν.
- Число уравнений, описывающих вероятности состояний СМО (уравнений Колмогорова), равно числу состояний СМО.
- В левой части каждого уравнения записывается производная вероятности состояния по времени.
- Правая часть уравнения содержит столько членов, сколько стрелок переходов связано с данным состоянием. Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член правой части уравнения имеет знак минус. Если стрелка направлена в состояние, то – знак плюс.
- Каждый член правой части уравнения равен произведению интенсивности потока или интенсивности обслуживания, соответствующих данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний СМО с отказами в соответствии с графом состояний

- (см. на доске)

II.3 Процесс обслуживания и его свойства

Х-ки п-на обслуживания

3.1 Дисциплина обслуживания — *

1) Пропускная способность СМО — *
2) Доступность обслуживания — *
3) Длительность обслуживания — *
4) $t_{об}$

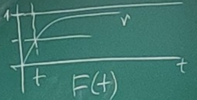
а) пост. длит. обсл. $t_{об} = const$

б) пок. расп. $t_{об}$; в) расп. Эрланга

$$f(t_{об}) = \nu e^{-\nu t_{об}}; \quad M[t_{об}] = \frac{1}{\nu}; \quad \nu = \frac{1}{M[t_{об}]}$$

ν — параметр распределения (интенсивность обслуживания)

3.2 Вероятностные х-ки времени обслуживания



При показательном законе распределения $t_{об}$ закон распределения оставшейся части $t_{об}$ не зависит от того, сколько оно уже длится (*)?

$$P(t_{об} < t) + P(t_{об} \ge t) = 1$$

$$P_0(t) = 1 - P(t_{об} < t) = 1 - F(t)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\nu t}; \quad P_0(t) = e^{-\nu t}$$

$$P_T(T+t) = P_0(T)\,P_T(t); \quad P_0(T+t) = e^{-\nu(T+t)}$$

$$P_0(T)\,P_T(t) = e^{-\nu(T+t)}$$

$$P_T(t) = \frac{1}{P_0(T)} e^{-\nu(T+t)} = \frac{1}{e^{-\nu T}} e^{-\nu(T+t)} = e^{\nu T} e^{-\nu(T+t)} = e^{-\nu t}$$

т.о. $P_T(t) = P_0(t)$

II.4 Система с отказами

4.1 Вероятности сост. СМО с отказами

Рассматривается СМО из n однотипных аппаратов с отказами. Каждый может обслуживать только 1 заявку, ν.

$$P(t_{об} < t) = F(t) = 1 - e^{-\nu t}$$

Осн. пок-ли СМО с отказами:

− вероятность отказа; − ср. число занятых ап-в

Цель: опред. осн. пок-лей

S_0 — *; S_1; S_k; S_n — *

$$S_0 \underset{\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_1 \underset{2\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \dots \underset{k\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_k \underset{(k+1)\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \dots \underset{n\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_n$$

. Сист. ур-й Колмогорова

СДУ K (1)

$$\begin{cases} P_0(t)' = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t) \\ P_1(t)' = \lambda P_0(t) - (\lambda + \nu) P_1(t) + 2\nu P_2(t) \\ \dots \\ P_k(t)' = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + \nu k) P_k(t) + \nu(k+1) P_{k+1}(t) \quad \Big| \; 1 \le k \le n-1 \\ \dots \\ P_n(t)' = \lambda P_{n-1}(t) - \nu n P_n(t). \end{cases}$$

Н.у.: $t = 0$; $P_0(0) = 1$, $P_k(0) = 0$, $k = 1, 2 \dots n$

Получение анал. решения в общем виде затруднено, можно выполнить численное решение, но нужно выполнять качественный анализ СМО.

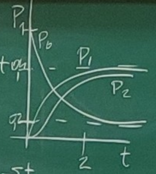
Пусть $n = 2$, $\lambda = 2$, $\nu = 1$

Вывод *−

$$P_0(t) = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} e^{-2t} + \frac{2}{15} e^{-5t}$$

$$P_1(t) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} e^{-5t}$$

$$P_2(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} e^{-2t} + \frac{4}{15} e^{-5t}$$



Вычислим вер-сти для стационарного режима:

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} P_0(t) = \frac{1}{5}; \quad p_1 = \lim_{t\to\infty} P_1(t) = \frac{2}{5}; \quad p_2 = \lim_{t\to\infty} P_2(t) = \frac{2}{5}$$

$$p_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t) = const, \; k = 0, 1 \dots n \; \Big| \; p_k' = 0$$

Вывод *−

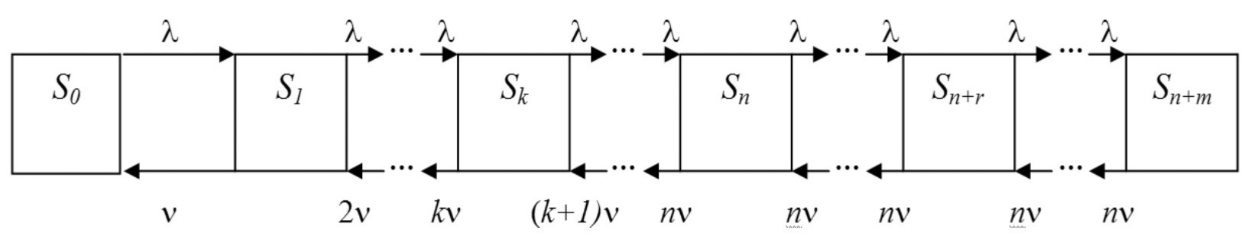
$$p_k = \frac{\alpha^k p_0}{k!}, \; k \le n, \; \alpha = \frac{\lambda}{\nu} \quad \Big| \quad \sum_{k=0}^{n} p_k = 1$$

$$p_k = \frac{\alpha^k / k!}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}}, \; k = 1 \dots n$$ — формула Эрланга

5 Система с ожиданием в очереди ограниченной длинны
5.1 Вероятности состояний СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины

- Рассматривается СМО из n однотипных обслуживающих аппаратов, в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ, время обслуживания требования прибором подчиняется показательному закону с параметром ν.
- Требование, поступившее в СМО в момент, когда все аппараты заняты, не покидает ее, а «становится» в очередь и ждет пока его не обслужит один из освободившихся аппаратов.
- Число требований, ожидающих обслуживания, ограничено величиной m.
- Время ожидания не ограничено.

Граф состояний СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины



- Состояния СМО:
  - S_0 – все аппараты свободны;
  - S_1 – один аппарат занят обслуживанием, остальные свободны;
  - S_k – k аппаратов заняты, остальные свободны;
  - S_n – все n аппаратов заняты обслуживанием, очереди нет;
  - S_{n+r} – все аппараты заняты, очередь из r требований;
  - S_{n+m} – все аппараты заняты, m требований в очереди.

СДУ Колмогорова для СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины

- (см. на доске)

5.2 Стационарное решение уравнений Колмогорова для СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины

- (см. на доске)

5.3 Показатели эффективности СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины

- (см. на доске)

II.4.2 Пок-ли эффективности СМО с отказами

Пок-ли качества обсл. заявок

Пок-ли качества очередной заявки: $P_{отк} = P_n = P_0 \frac{\alpha^n}{n!}$

1. Вер-сть отказа очередной заявки: $P_{отк} = P_n = P_0 \frac{\alpha^n}{n!}$
2. Вер-сть обслуживания очередной заявки: $p_{об} = 1 - P_{отк}$
3. Среднее кол-во заявок, обслуживаемых ($K_{об}$) и нах-ся в СМО с отказами (K_c): $K_{об} = K_c = N$,

N – среднее число занятых приборов

4. Среднее время пребывания заявки в СМО с отказами:

$T_c = \frac{1}{\lambda} K_c$ – формула Литтла

Пок-ли эффективности исп. СМО

Пок-ли эффективности обслуживания приборов:

5. Среднее число занятых обслуживанием приборов

$$N = \sum_{k=1}^{n} k p_k = [\text{вывод} *?] = \alpha(1 - p_n)$$

6. Относительная (q) и абсолютная (A) пропускные спос-ти

$q = p_{об} = 1 - p_{отк}$, $A = \lambda q$

7. Коэффициент занятости приборов: $\Theta_з = \frac{N}{n}$
8. Коэффициент простоя приборов: $\Theta_{пр} = 1 - \Theta_з$

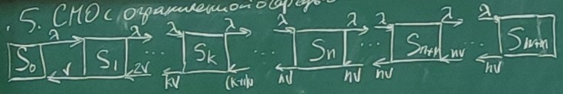
Пок-ль экономической эффективности

$E = p_{об} \lambda c T - G_п$, c – средний эк-ий эффект при обслужив. 1 заявки

$G_п = (q_k N + q_y P_{отк} \lambda + q_{пк} N_{св}) T$ / q_k – стоимость эксплуатации одного прибора, q_y – стоимость убытков необслуженной заявки в ед. времени,

$q_{пк}$ – стоим. простоя прибора в ед времени, $N_{св}$ – среднее кол-во свободных прибор-в $= n - N$

II.5. СМО с ограниченной очередью



СДУ Колмогорова:

$$\begin{cases} P_0' = -\lambda P_0 + \nu P_1 \\ P_k' = \lambda P_{k-1} - (\lambda + k\nu) P_k + (k+1)\nu P_{k+1} & 1 \le k < n; \\ P_k' = \lambda P_{k-1} - (\lambda + n\nu) P_k + n\nu P_{k+1} & n \le k \le n+m-1 \\ P_{n+m}' = \lambda P_{n+m-1} - n\nu P_{n+m} \end{cases}$$

$P_0(0) = 1$, $P_k(0) = 0$, $k = 1 \ldots n+m$

Стационарное решение СДУ Колмогорова для СМО с очередью $\lambda(t) = const$, $\nu(t) = const$, $n(t) = const$,

$\lim_{t \to \infty} P_k(t) = p_k = const$;

Вывод ... * –

$$p_k = \begin{cases} \frac{\alpha^k}{k!} p_0, & 1 \le k \le n \\ \frac{\alpha^k}{n! n^{k-n}} p_0, & n < k \le n+m \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{k=n}^{n+m} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n}}$$

5.3 Показатели эффективности СМО с огр. очередью

Показатели качества обслуживания заявок:

1. Вер-сть отказа $P_{отк} = P_{n+m}$
2. Средняя длина очереди

$$K_{оч} = \sum_{k=n+1}^{n+m} (k-n) p_k$$

3. Среднее число требований в СМО

$$K_c = K_{оч} + N$$

4. Среднее время ожидания обслуживания

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} K_{оч}$$

5. Среднее время пребывания заявки в СМО

$$T_c = M[t_c] = M[t_{об}] + T_{оч}$$

$$T_c = \frac{1}{\lambda} K_c$$

Показатели эффективности СМО

6. Относительная (q) и абсолютная (A) пропускные способности СМО

$$q = p_{об} = 1 - p_{отк}, \quad A = \lambda q$$

7. Среднее число свободных от обслуживания приборов

$$N_{св} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k$$

8. 9, 10 + Пок. эк эфф-сти * –

Вопросы?

Фетисов Михаил Вячеславович

fetisov.michael@bmstu.ru

fetisov.michael@yandex.ru