Моделирование сложных систем

СМО. «Взаимопомощь». Замкнутые. Сети.

Фетисов Михаил Вячеславович
fetisov.michael@bmstu.ru
fetisov.michael@yandex.ru

Системы со «взаимопомощью» между каналами

- **СМО со «взаимопомощью» между каналами** – СМО, в которых одна и та же заявка может одновременно обслуживаться двумя и более каналами. Здесь рассматриваются системы, в которых увеличение числа одновременно работающих над обслуживанием требования каналов приводит к пропорциональному увеличению скорости обслуживания. Используется понятие «дисциплина взаимопомощи», т.е. принцип, определяющий когда и как несколько каналов берут на себя обслуживание одного и того же требования.
- Рассмотрим два случая этой дисциплины, условно названные «все как один» и «равномерная взаимопомощь».

Дисциплины обслуживания СМО со «взаимопомощью»

- **Дисциплина «все как один»** означает, что при появлении одной заявки ее начинают обслуживать все каналы сразу и остаются занятыми, пока не закончится обслуживание этой заявки; затем все каналы переключаются на обслуживание другой заявки (если она есть) или ждут ее появления, если ее нет, и т. д. Очевидно, в этом случае все каналов работают как один, СМО становится одноканальной, но с более высокой интенсивностью обслуживания.
- **Дисциплина «равномерная взаимопомощь»**: если требование приходит в момент, когда все каналы свободны, то все они принимаются за ее обслуживание; если, в момент обслуживания заявки, приходит еще одна, часть каналов переключается на ее обслуживание; если, пока обслуживаются эти две заявки, приходит еще одна, часть каналов переключается на ее обслуживание и т. д., до тех пор, пока не окажутся занятыми все каналы СМО; если это так, вновь пришедшая заявка получает отказ (в СМО с отказами) или становится в очередь (в СМО с ожиданием).

СМО с дисциплиной взаимопомощи «все как один»

- Рассматривается СМО с взаимопомощью «все как один», состоящая из n однотипных обслуживающих аппаратов, в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ, время обслуживания требования одним прибором подчиняется показательному закону с параметром ν. Поскольку в случае взаимопомощи «все как один» все n каналов работают как единственный канал с увеличившейся в n раз интенсивностью обслуживания требования, то для анализа таких СМО могут использоваться модели одноканальной СМО без взаимопомощи. При этом если СМО с взаимопомощью относится к классу СМО с отказами, то следует пользоваться моделью с отказами (раздел 4). Если же СМО с взаимопомощью принадлежит классу СМО с ожиданием, то могут быть использованы модели одноканальных СМО с ограниченной (раздел 5) и неограниченной (не проходили) очередями. В этих моделях в качестве интенсивности обслуживания должен использоваться параметр $\nu^* = n\nu$.

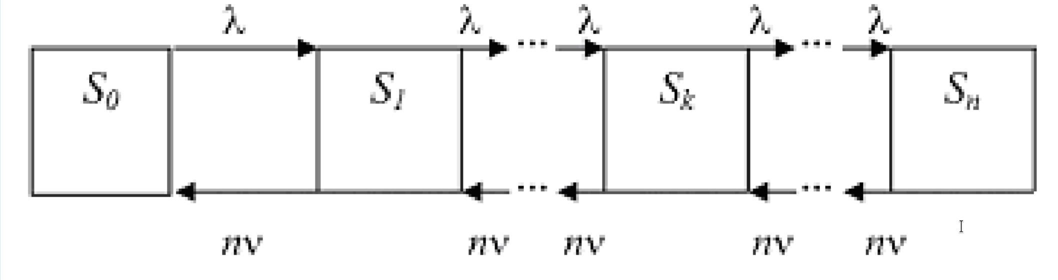
СМО с дисциплиной взаимопомощи «все как один» (продолжение)

- Моделирование показывает, что переход к использованию взаимопомощи «все как один» в СМО с отказами приводит к снижению пропускной способности СМО, что объясняется увеличением вероятности отказа: за то время, пока все каналы заняты обслуживанием одной заявки, могут прийти другие заявки, и, естественно, получить отказ. Среднее время пребывания заявки в СМО уменьшается. Внедрение взаимопомощи типа «все как один» в работу СМО с ожиданием в неограниченной очереди не влияет на ее пропускную способность СМО, так как при любых условиях обслужены будут все пришедшие заявки. Зато ухудшаются другие характеристики обслуживания. Простой каналов в таких СМО минимален: если в системе имеется хотя бы одна заявка, все каналы работают.

СМО с отказами и «равномерной» взаимопомощью

- Рассматривается n-канальная СМО с отказами и «равномерной» взаимопомощью, в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ, время обслуживания требования прибором подчиняется показательному закону с параметром ν.

СМО с отказами и «равномерной» взаимопомощью
Граф состояний



- S_0 – СМО свободна;
- S_1 –одно требование обслуживается всеми n каналами;
- S_k – k требований обслуживается всеми n каналами;
- S_n – все n аппаратов заняты обслуживанием, очереди нет.

(продолжение)

- Легко видеть, что граф состояний рассматриваемой СМО совпадает с графом состояний одноканальной СМО с ожиданием, в которой длина очереди ограничена n - 1 местами, а интенсивность обслуживания заявок единственным каналом равна $\nu^* = n\nu$.
- Чтобы получить выражения для расчета вероятности отказа $p_{отк}$, относительной q и абсолютной A пропускных способностей воспользуемся формулами для СМО с очередью ограниченной длины, в которой число каналов принято равным 1, а длина очереди n - 1 .
- В одноканальной СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины вероятность отказа определяется, как $p_{отк} = p_{1+m} = \alpha^{1+m} \cdot p_0$,
- а вероятность отсутствия требований, как:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \alpha \sum_{k=1}^{1+m} \alpha^{k-1}}.$$

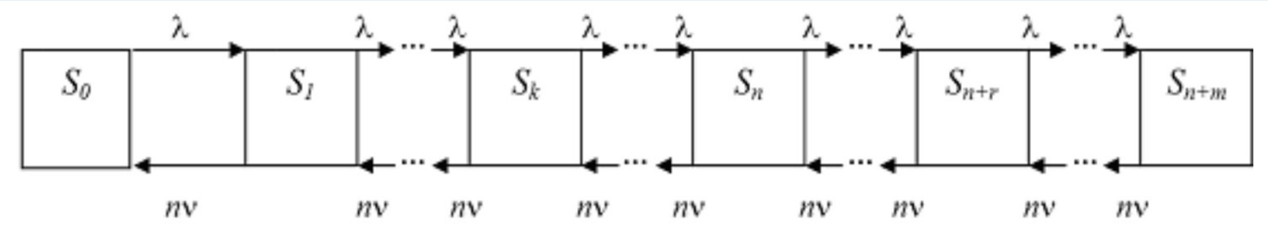
- (см. на доске)

СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины и «равномерной» взаимопомощью

- Рассматривается n-канальная СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины и «равномерной» взаимопомощью, в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ, время обслуживания требования одним прибором подчиняется показательному закону с параметром ν. Число требований, ожидающих обслуживания, ограничено величиной m.

СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины и «равномерной» взаимопомощью. Граф состояний

- S_0 – СМО свободна;
- S_1 –одно требование обслуживается всеми n каналами;
- S_k – k требований обслуживается всеми n каналами, очереди нет;
- S_n – все n аппаратов заняты обслуживанием, очереди нет;
- S_{n+r} – n требований обслуживаются всеми n аппаратами, r требований ожидают в очереди;
- S_{n+m} – n требований обслуживаются всеми n аппаратами, m требований в очереди.



СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины и «равномерной» взаимопомощью. Параметры

- Получен граф того же вида, что и ранее, но с числом состояний, увеличенными на m. Следовательно, необходимо воспользоваться теми же формулами для одноканальной СМО с интенсивностью обслуживания ν * = nν и числом мест в очереди n = m + 1. Используя тот же подход, что и предыдущем пункте, получаем вероятность отказа $p_{отк}$ в СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины и равномерной взаимопомощью:

$$p_{отк} = \frac{\beta^{n+m}(1-\beta)}{1-\beta^{n+m+1}}.$$

(продолжение)

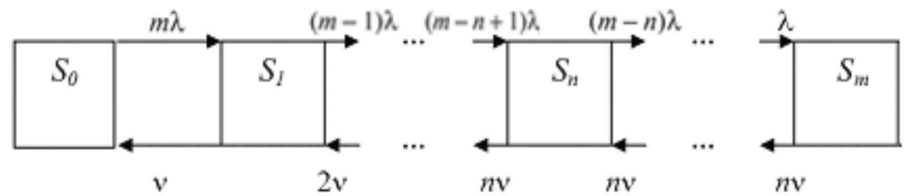
- Помимо вероятности отказа $p_{отк}$, относительной q и абсолютной A пропускных способностей основными параметрами рассматриваемой СМО являются среднее число требований в очереди $K_{ож}$, среднее время ожидания $T_{ож}$ и среднее время пребывания T_{C} требования в СМО.

Замкнутые СМО

- Замкнутыми называются СМО, в которых источник требований находится внутри самой системы, и интенсивность потока требований зависит от ее состояния.
- Как правило потоком требований в такой СМО является поток отказов (неисправностей, сбоев) от группы работающих устройств.
- Пусть λ – интенсивность потока отказов одного устройства.
- Имеется m работающих устройств, которые могут выходить из строя из-за неисправностей, и n каналов обслуживания этих требований.

Замкнутые СМО
Граф состояний

- S_0 – все устройства работоспособны, нет занятых ремонтом (обслуживанием) каналов;
- S_1 – одно устройство вышло из строя и проходит ремонт, один канал занят;
- S_n – n устройств вышли из строя, все каналы заняты;
- S_m – все m устройств вышли из строя, все каналы заняты, n устройств проходят ремонт, остальные (m-n) ожидают ремонта.



Вероятности состояний замкнутой СМО в предельном установившемся режиме

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{j=0}^{i-1}(m-j)}{i\,!}\alpha^i p_0, & i = 1,2,\ldots,n, \\ \dfrac{\prod\limits_{j=0}^{i-1}(m-j)}{n\,!\cdot n^{i-n}}\alpha^i p_0, & i = n+1,\, m+2,\ldots,m, \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\prod\limits_{j=0}^{i-1}(m-j)}{i\,!}\alpha^i + \sum\limits_{i=n+1}^{m} \dfrac{\prod\limits_{j=0}^{i-1}(m-j)}{n\,!\cdot n^{i-n}}\alpha^i}, \qquad \alpha = \frac{\lambda}{\nu}\,.$$

В простейшем случае одноканальной (n = 1) замкнутой СМО представленные выражения существенно упрощаются

$$p_1 = \frac{m\lambda}{\nu} p_0 = m\alpha p_0 ,$$

$$p_2 = (m-1)\frac{\lambda}{\nu} p_1 = m(m-1)\alpha^2 p_0 ,$$

$$p_3 = (m-2)\frac{\lambda}{\nu} p_2 = m(m-1)(m-2)\alpha^3 p_0 ,$$

$$p_m = [m-(m-1)]\frac{\lambda}{\nu} p_{m-1} = m(m-1)\ldots[m-(m-1)]\alpha^m p_0 ,$$

$$p_0 = [1 + m\alpha + m(m-1)\alpha^2 + \ldots + m(m-1)(m-2)\times\ldots\times 1\alpha^m]^{-1} .$$

Сети массового обслуживания

- **СеМО** – совокупность СМО, в которой циркулируют требования, переходящие из одной СМО в другую.
- **Экспоненциальная СеМО** – СеМО, во всех узлах которой длительности обслуживания распределены по экспоненциальному закону, и потоки, поступающие в СеМО, простейшие.
- **Входной поток заявок СеМО** – поток заявок, приходящих на вход отдельной СМО, входящей в состав СеМО, из внешней среды СеМО, а не с выхода какой-либо СМО.

Экспоненциальная СеМО

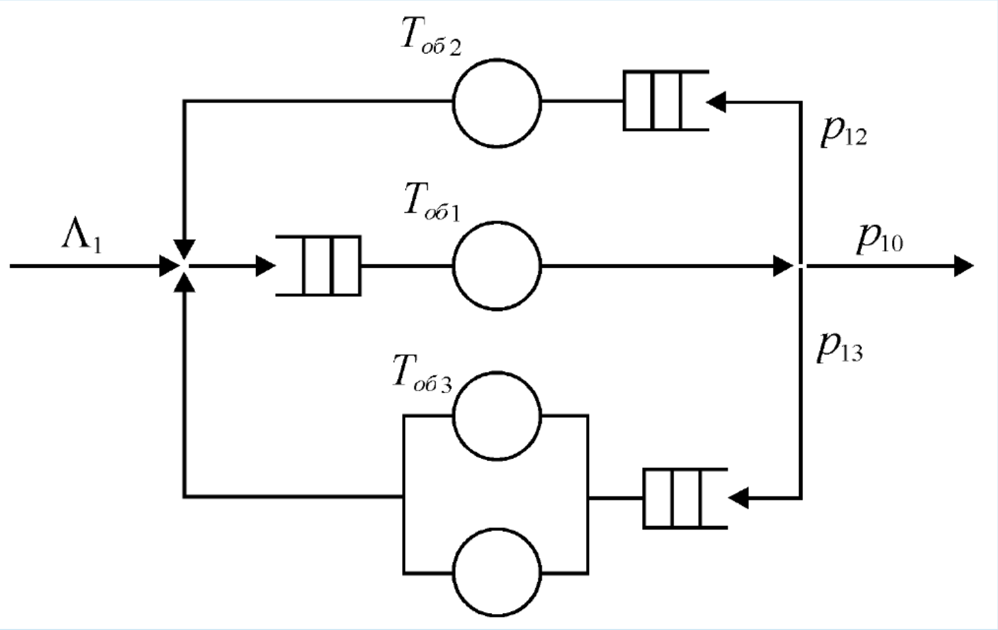
- Переход заявок между узлами СеМО происходит мгновенно в соответствии с переходными вероятностями p_{ij} , i, j = 1 ,...,S .
  где p_{ij} – вероятность того, что заявка после обслуживания в узле i перейдет в узел j, S – число узлов СеМО. Если узлы непосредственно не связаны между собой, то p ij = 0 . Если из i-го узла переход только в один какой-либо узел j, то pij = 1 .

Экспоненциальная СеМО Параметры

- 1) числом S СМО;
- 2) числом n_1 ,… , n_S каналов в СМО 1 ,…, S;
- 3) матрицей P = | | p_{ij} | | переходных вероятностей, i = 1 , …,S , j = 0, …, S ;
- 4) интенсивностями Λ_1 ,… , Λ_S входных потоков заявок;
- 5) средними временами обслуживания $T_{об1}$,…, $T_{обS}$ заявок в СМО 1 ,…, S.
- Для представления СеМО используется граф, вершины которого (узлы) соответствуют отдельным СМО, а дуги отображают связи между узлами.

СеМО. Пример

- Заданы следующие значения параметров СеМО:
- 1) $S = 3$;
- 2) $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 2$;
- 3) $$P = \begin{array}{c|cccc|} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0.4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} ;$$
- 4) $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$;
- $T_{об\,1} = 0.07$, $T_{об\,2} = 0.06$, $T_{об\,3} = 0.35$.



Правила расчёта

- В СеМО поток заявок на входе СМО складывается из входного потока СеМО и потоков, поступающих с выходов СМО.
- Для расчета характеристик СМО в заданной СеМО необходимо найти интенсивности λ_1 , ..., λ_S входящих потоков СМО. Указанные интенсивности определяются на основе уравнений баланса сети с учетом **свойств слияния и разветвления потоков**:
  - 1) при слиянии n потоков заявок с интенсивностями образуется поток, имеющий интенсивность $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.
  - 2) при ветвлении потока с интенсивностью λ на n направлений, вероятности перехода заявки в которые равны p_1, ..., p_n , образуется n потоков с интенсивностями λp_1, ..., λp_n соответственно.
- **Уравнение баланса** составляется в предположении, что в стационарной СеМО суммарная интенсивность входящих в любую фиксированную ее часть потоков равна суммарной интенсивности выходящих.

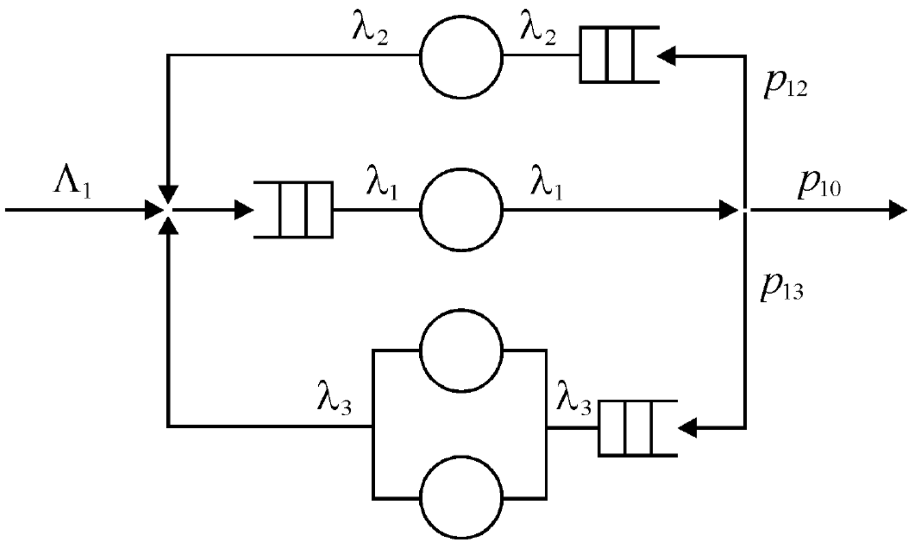
Пример (продолжение)
Баланс интенсивностей

$$\lambda_1 = \Lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$\Lambda_1 = p_{10}\lambda_1,$$

$$\lambda_2 = p_{12}\lambda_1,$$

$$\lambda_3 = p_{13}\lambda_1.$$



Пример (продолжение)
Решение

- При известных $\Lambda_1 = 1$, $p_{10} = 0.1$, $p_{12} = 0.5$, $p_{13} = 0.4$ из последних трёх уравнений находим $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 4$.
- **Среднее время пребывания заявки в СеМО** – основная характеристика СеМО:

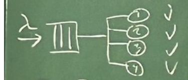
$$T_C = \frac{1}{\Lambda}\sum_{j=1}^{S}\lambda_j T_{Cj} ,$$

где$\Lambda = \Lambda_1 + \dots + \Lambda_S$ – суммарная интенсивность входных потоков.

$$T_C = \frac{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j T_{Cj}}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3} = \frac{10 \cdot 0.233 + 5 \cdot 0.086 + 4 \cdot 0.45}{1+0+0} = 4.56 \ .$$

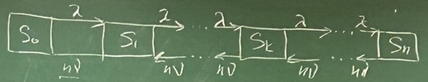
II 7. Системы со взаимопомощью между каналами

7.1 СМО с дисциплиной взаимопомощи „все как один"



$\nu^* = n\nu$

Далее расч. как одноканальной



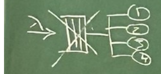
$\approx$ одноканальной СМО, где инт. обсл. $= n\nu$, а очередь сост. из $n-1$ элемента

$$P_{отк} = P_{1+n} = \alpha^{1+n} p_0 \quad \Big| \quad \alpha = \frac{\lambda}{\nu}$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \alpha \sum_{k=1}^{1+n} \alpha^{k-1}} \quad \Big| \quad S_n = \frac{b_1 (1 - a^N)}{(1-a)} \quad \Big| \quad p_0 = \frac{\alpha^{1+n}(1-\alpha)}{1 - \alpha^{2+n}}$$

$$\boxed{P_{отк} = \frac{\beta^n (1-\beta)}{1 - \beta^{n+1}}} \quad \Big| \quad \beta = \frac{\lambda}{n\nu} = \frac{\lambda}{\nu^*}$$

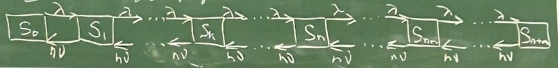
7.1 „Равномер" взаимопомощь без очереди



Пуассоновский поток λ

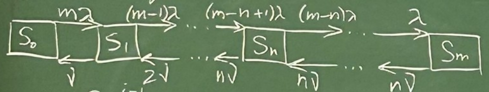
Показательное распределение времени обслуживания ν

7.2 — " — с очередью



$$\boxed{P_{отк} = \frac{\beta^{n+m}(1-\beta)}{1 - \beta^{n+m+1}}}$$

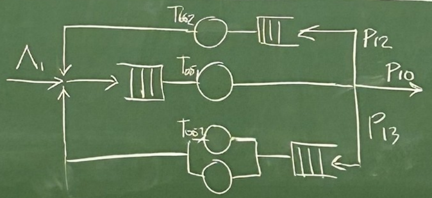
II 8. Замкнутые системы



$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j=0}^{i-1}(m-j)}{i!} \alpha^i + \sum_{i=n+1}^{m} \frac{\prod_{j=0}^{i-1}(m-j)}{n!\, n^{i-n}} \alpha^i}$$

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{\prod_{j=0}^{i-1}(m-j)}{i!} \alpha^i p_0, & i = 1, \dots n \\ \dfrac{\prod_{j=0}^{i-1}(m-j)}{n!\, n^{i-n}} \alpha^i p_0, & i = n+1, \dots m \end{cases}$$

Пример сети МО



II 9. Сети МО

СеМО — вероятность перехода между СМО

$P_{ij}, \quad i, j = 1, \dots S$

Пример:

1) $S = 3$

2) $n_1 = n_2 = 1, \quad n_3 = 2$

3)
$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

4) $\Lambda_1 = 1, \quad \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$

5) $T_{об1} = 0{,}07, \quad T_{об2} = 0{,}06, \quad T_{об3} = 0{,}35$

1. Слияние n потоков $\lambda = \sum^{n} \lambda_i$
2. Ветвление потока $\lambda = \sum \lambda p_i$

Допущение: В стац.-ом СеМО суммарная инт. вх. = сум. инт. вых.

Баланс интенсивностей
$$\begin{cases} \lambda_1 = \Lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \Lambda_1 = P_{10}\lambda_1; \quad \lambda_2 = P_{12}\lambda_1; \quad \lambda_3 = P_{13}\lambda_1 \end{cases}$$

$$T_c = \frac{1}{\Lambda_1} \sum_{j=1}^{S} \lambda_j T_{cj} = 4{,}56$$

Вопросы?

Фетисов Михаил Вячеславович
fetisov.michael@bmstu.ru
fetisov.michael@yandex.ru